高校での図形と方程式の内容

元筑波大学附属高校　利根川誠

高校で学ぶ「図形と方程式」（数学Ⅱ）の内容の充実を考え、勤務校での実践例を紹介したいと思う。教科書にあるような問題は省略する。

１．この章での目指すところ

幾何学の問題を初等幾学的方法によって分析もしくは証明しようとすると、かなり思いつき的要素（補助になる線などを描かなくてはならない）が絡み、究明に限界がある。

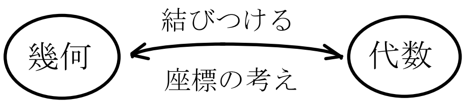
また、一方代数的問題を代数的方法（式の変形や等式、不等式の性質などを使って分析する）によろうとすると、大変厄介な計算をしなくてはならなかったり、やはり思いつき的要素が必要となったり究明が難しくなってしまうことがある。

このことを解決しようとして登場したのがフランスのデカルトであった。

以下デカルト著「方法序説」（岩波文庫　落合太郎訳）より、

・・・・・古代人の作図的分析や近代人の代数学についていえば、いずれもはなはだ抽象的な事柄の上に広がるだけであって、なんの用をもなさぬようにみえるばかりでなく、全者はつねに図形の考察のみに限られるために、構像力をひどく疲れさせることなしに理解力を働かせることができない。また後者においても、若干の規則や若干の記号に盲従させられるために、人はこのものをもって精神を開発する学問とはせずに、それを悩ますばかりの、混雑して分かりにくい技術としてしまった。・・・・こういうことが、それぞれの長所を含みながら、それぞれの欠陥からまぬかれているような、何か他の方法を捜さなければならぬと、私に考えさせたわけである。・・・・・

デカルトは座標という概念（考え方）を創り出し、幾何学と代数学の融合をはかった。すなわち、いくつかの数の順序のついた組で点を表現し、数を表わすいくつかの変数 x, y, ・・・の満たす関係式で図形を表現する考え方を創り出した。



点 ⟷ 数の順序対
図形 ⟷ 変数の間の方程式
領域 ⟷ 変数の間の不等式

この章では、座標の考えを入れ、幾何の問題を代数的に解くこと、また代数の問題を図形的に解くことを学ぶ。

以下、主だった定理の証明および問題は省略する。

２．平面上の点の座標と距離

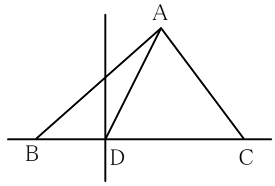
問１．放物線 $y = x^2$ 上の点Ｐで $\mathrm{A}(1,\ 9)$ と点 $\mathrm{B}(7,\ 3)$ から等距離にある点 P の座標を求めよ。

問２．△ABC の辺 BC の１：２の内分点を D とするとき、

$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3(\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2)$ を証明せよ。

（証明）右図のように△ABC を座標平面上に設定し、

$\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(-c,\ 0)$，$\mathrm{C}(2c,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 0)$ とする。



$$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left\{(a+c)^2+b^2\right\}+(a-2c)^2+b^2$$
$$=3a^2+3b^2+6c^2$$
$$3(\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2)=3(a^2+b^2+2c^2)=3a^2+3b^2+6c^2$$

よって，$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3(\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2)$

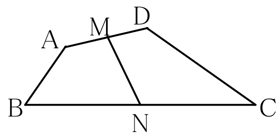
問３．線分 AB の $m:n$ 内分点と外分点を P, Q とし、線分 PQ の点を M とすると、M は線分 AB をある比に外分したことになっている。その比を求めよ。

（解）$\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$ とし、$\mathrm{P}(p)$，$\mathrm{Q}(q)$，$\mathrm{M}(c)$ とする。

$$p=\frac{mb+na}{m+n},\quad q=\frac{mb-na}{m-n},\quad c=\frac{p+q}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{mb+na}{m+n}+\frac{mb-na}{m-n}\right)=\frac{m^2b-n^2a}{m^2-n^2}$$

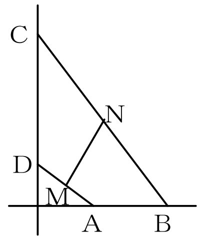
よって、M は線分 AB を $m^2:n^2$ に外分した点である。

問４．AB⊥CD なる四辺形 ABCD の辺 AD, BC の中点を M, N とするとき、$4\mathrm{MN}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2$ となることを示せ。



（証）右図のように座標平面に四辺形を設定し、

$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ c)$，$\mathrm{D}(0,\ d)$ とする。



$$4\mathrm{MN}^2=4\left\{\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}-\frac{c}{2}\right)^2\right\}=(a-b)^2+(d-c)^2$$
$$=\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2$$

３．直線の方程式

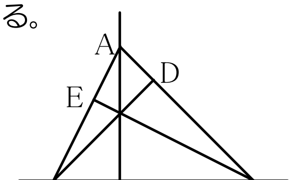
定理　２直線 $y=a_1x+b_1$ と $y=a_2x+b_2$ について

$$y=a_1x+b_1\perp y=a_2x+b_2\iff a_1a_2=-1$$

問１．三角形の各頂点から対辺に引いた３つの垂線が１点で交わることを証明せよ。

（証）底辺 BC を x 軸にとり、点 A から BC への垂線を y 軸にとる。

$\mathrm{A}(0,a)$，$\mathrm{B}(b,0)$，$\mathrm{C}(c,0)$ とする。



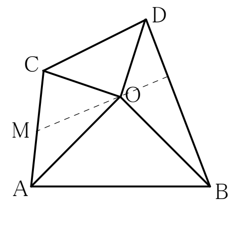
AC の傾きは $-\dfrac{a}{c}$ だから、直線 BD の方程式は $y=\dfrac{c}{a}(x-b)$

AB の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ だから、直線 CE の方程式は $y=\dfrac{b}{a}(x-c)$

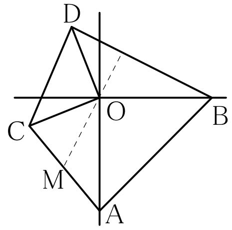
直線 BD と直線 CE の AO との交点はどちらも $(0,-\dfrac{bc}{a})$ となり、３垂線は１点であることがいえた。

問２．２つの直角三角二等辺 OAB と OCD が図のように点 O を共有している。線分 AC の中点を M とするとき、

OM⊥BD，BD＝２OM を示せ。



（証）$\mathrm{A}(0,\ -a)$，$\mathrm{B}(a,\ 0)$，$\mathrm{C}(b,\ c)$　とすると、



$\mathrm{D}(c, -b)$ である。このとき、$\mathrm{M}(\dfrac{b}{2}, \dfrac{-a+c}{2})$

より、（OM の傾き）×（BD の傾き）

$= \dfrac{-a+c}{b} \times \dfrac{-b}{c-a} = -1 \quad \therefore\ \mathrm{OM} \perp \mathrm{BD}$

$$2\mathrm{OM} = 2\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{-a+c}{2})^2} = \sqrt{(c-a)^2 + b^2} = \mathrm{BD}$$

問４．（1） ２直線 $x+y-5=0$，$2x-y-1=0$ を図示せよ。

（2） k を定数とするとき、次の方程式は①を考える。

$(x+y-5)+k(2x-y-1)=0$ ・・・①

$k=-1,\ 1,\ 2$ のとき、①の表す図形を図示せよ。

（3）①の表す図形の特徴は何か。またその理由を考えよ。

（解）（1)，（2）は略す。

(3) ①の表す図形は、２直線 $x+y-5=0$，$2x-y-1=0$ の交点を通る直線である。何故かというと、２直線の交点を (a, b) とするとき、①の方程式にこれを代入すると、$a+b-5=0$ かつ $2a-b-1=0$ が成り立ち、

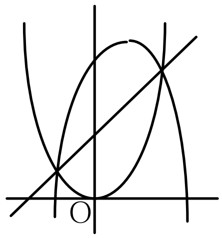
$(a+b-5)+k(2a-b-1)=0$ が成り立ち交点をとっている。

その上、①は $(1+2k)x+(1-k)y+(-5-k)=0$ となり $x,\ y$ についての１次方程式なので直線を表す。

一般に、以下の定理が成り立つ。

定理　図形 $f(x, y)+k\cdot g(x, y)=0$ は、２つの図形 $f(x, y)=0$ と $g(x, y)=0$ のすべての交点を通る図形である。

問５。放物線 $y=x^2$ と $y=-x^2+2x+4$ の２交点を通る直線の方程式を求めよ。

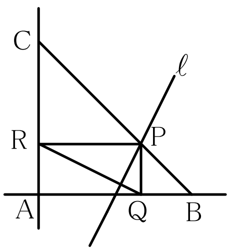


（解） $y-x^2+k(y+x^2-2x-4)=0$ が２交点を通る図形の方程式である。これが直線を表すには、$x,\ y$ についの１次方程式となればよいから、$k=1$ とすればよい。

よって、$y-x^2+y+x^2-2x-4=0$　すなわち、

$-2x+2y-4=0$　よって、$-x+y-2=0$

問６．∠A＝90°の直角二等辺三角形 ABC の辺 BC 上に点 P をとり、点 P から辺 AB，AC のそれぞれに垂線 PQ，PR を引くとき、点 P を通り線分 QR に垂直な直線 ℓ を引くと、P の位置に関わらず、ある定点を通っていることを示せ。またその定点はどのような点か述べよ。



（解）右図のように座標平面に三角形をおき、$\mathrm{B}(a, 0)$，$\mathrm{C}(0, a)$ とする。直線 BC は $y=-x+a$ なので、$\mathrm{Q}(t, 0)$ とすると、$\mathrm{R}(0, -t+a)$ と書ける。

QR の傾きは $\dfrac{-t+a}{-t}$ なので、直線 ℓ の方程式は $y-(a-t)=\dfrac{t}{a-t}(x-t)$、

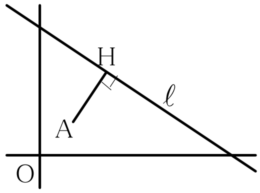
$(a-t)y-(a-t)^2-tx+t^2=0$、$ay-a^2-t(x+y-2a)=0$

よって、$ay-a^2=0$ と $x+y-2a=0$ の交点を通る。

すなわち、直線ℓは 常に 点$(a,\ a)$ を通る。

４．点と直線の距離

定理　点$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$から直線ℓ：$ax+by+c=0$へ引いた垂線 AHの長さdは、$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



問１．２直線$y=\dfrac{12}{5}x$と$y=-\dfrac{3}{4}x$によってできる角の２等分線の方程式を求めよ。

（解）２直線は、$12x-5y=0$，$3x+4y=0$ だから、２等分線上の点を(x,y)とすると、$\dfrac{|12x-5y|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\dfrac{|3x+4y|}{\sqrt{3^2+4^2}}$，$5|12x-5y|=13|3x+4y|$

$5(12x-5y)=\pm 13(3x+4y)$　これより、$y=\dfrac{3}{11}x$ または $y=-\dfrac{11}{3}x$

５．円の方程式

定理　中心が$\mathrm{A}(a,b)$で半径がrの円の方程式は、$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ である。

この円の方程式は、$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2-4C\geq 0)$と変形される。

問１．２つの円$x^2+y^2-8x-4y-5=0$・・・①, $x^2+y^2-4x-9=0$・・・②

について答えよ。

(1) この２円①，②の２交点 を通る直線の方程式を求めよ。

(2) この２円①，②の交点と点$\mathrm{A}(2,1)$を通る円の方程式を求めよ。

６．軌跡と方程式

軌跡を代数的に求めるには、

① 条件を満たす点Ｐの座標を$(x,\ y)$とする。

② 条件を$x,\ y$を使って式で表す。

③ ②でつくった式をなるべく簡単な式になおし、知っている式の形に変形し、どんな図形かを判断する。

問１．A，B を異なる定点とするとき、$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1$を満たす点 P の軌跡を求めよ。

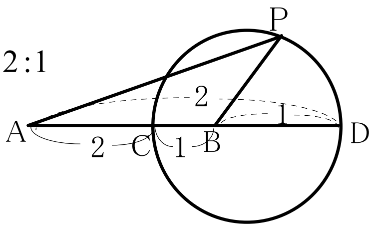
図のように座標軸を設定し、$\mathrm{A}(0,0)$，$\mathrm{B}(a,0)$とする。

$\mathrm{P}(x,y)$とすると、条件より$\sqrt{x^2+y^2}:\sqrt{(x-a)^2+y^2}=2:1$

$4\left\{(x-a)^2+y^2\right\}=x^2+y^2$　これを整頓すると

$x^2+y^2-\dfrac{8}{3}ax+\dfrac{4}{3}a^2=0$，$(x-\dfrac{4}{3}a)^2+y^2=(\dfrac{2}{3}a)^2$

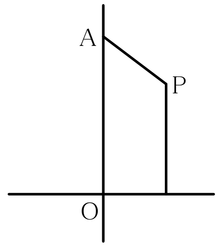
よって、右図のような円になる。



線分 AB の２：１に内分点 C と外分点 D を結ぶ線分 CD を直径とする円である。

問２．点$\mathrm{A}(0,8)$がある。点 P からx軸へ引いた垂線を PH とするとき、

$PA+PH=10$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。



（解）$P(x, y)$ とする。

$\sqrt{x^2+(y-8)^2}+|y|=10$　より

1）$y \geq 0$　のとき、$\sqrt{x^2+(y-8)^2}=10-y$

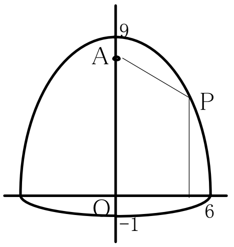
両辺を２乗して $x^2+y^2-16y+64=100-20y+y^2$，

$y=-\dfrac{1}{4}x^2+9$ ・・・①

2）$y<0$　のとき、$\sqrt{x^2+(y-8)^2}=10+y$　両辺を２乗して

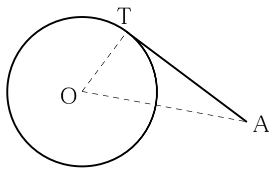
$x^2+y^2-16y+64=100+20y+y^2$，　$y=\dfrac{1}{36}x^2-1$ ・・・②

①，②の図形を表すと、右図のようになる。



定理　点 $A(x_1, y_1)$ から円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ に引いた

接線 AT の長さは、$AT=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2}$ である。



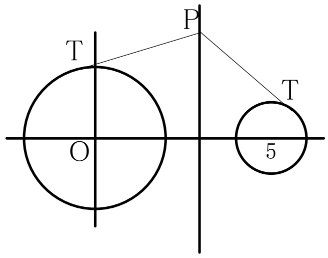
（証）$\angle ATO=90°$ なので、三平方の定理より

$AT^2=AO^2-TO^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2$

よって、$AT=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2}$

問３．２つの円 $x^2+y^2=4$　と　$(x-5)^2+y^2=1$ への接線

PS と PT が等しい点 P の軌跡を求めよ。



（解）点 P の座標を (x, y) とする。

$PT=\sqrt{x^2+y^2-4}$，$PS=\sqrt{(x-5)^2+y^2-1}$　だから、

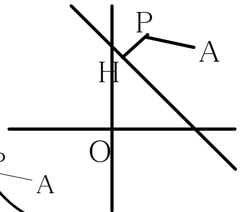
$x^2+y^2-4=(x-5)^2+y^2-1$　これを展開して整理

すると、$x=\dfrac{14}{5}$

問４．点 $A(2, 2)$ と直線 ℓ ： $x+y=2$　がある。点 P から直線 ℓ

へ引いた垂線を PH とするとき、$PA：PH=\sqrt{2}:1$ となる点 P

の軌跡を求めよ。

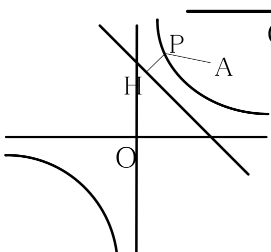


（解）$P(x, y)$ とする。条件より

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}:\frac{|x+y-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}:1$$

$(x-2)^2+(y-2)^2=|x+y-2|^2$　これを計算

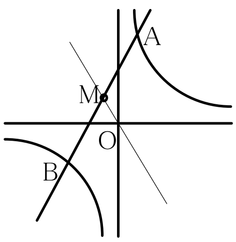
すると、$y=\dfrac{2}{x}$　　よって、右図のようになる。



問５．双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と傾きが２の直線の２交点を A, B とする。

この直線を上下にいろいろ動かすとき、線分 AB の中点の

軌跡を求めよ。



（解）直線 AB は、$y=2x+k$　と表される。

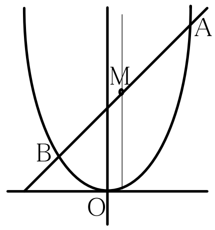
交点 A，B の x 座標は、$2x+k=\dfrac{1}{x}$　すなわち $2x^2+kx-1=0$

の解だから、この解を$\alpha,\ \beta$とすると、中点Mの座標(x, y)は、$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$で、

解と係数の関係から、$x=\dfrac{1}{2}\times(-\dfrac{k}{2})=-\dfrac{k}{4}$・・・①　また　Mは直線ABに乗っているので、$y=2\times(-\dfrac{k}{4})+k=\dfrac{k}{2}$・・・②　　①より $k=-4x$ これを②に代入して

$y=-2x$となる。

問6．放物線$y=\dfrac{1}{2}x^2$と傾きが1の直線の交点をA，Bとする。



この直線を上下にいろいろ動かすとき、線分ABの中点の軌跡を求めよ。

（解）直線ABは、$y=x+k$ と表される。

交点A，Bのx座標は、$\dfrac{1}{2}x^2=x+k$　すなわち

$x^2-2x-2k=0$・・・①　の解だから、この解を$\alpha,\ \beta$とすると、

中点Mの座標(x, y)は、$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$で、解と係数の関係から、$x=\dfrac{2}{2}=1$

Mは直線AB上なので、$y=1+k$・・・②

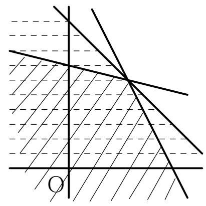
ところで、放物線と直線は共有点をもたなければならないので、①の解は実数解でなければならない。すなわち、①の判別式は0でなければならない。よって、

$(-2)^2-4\times1\times(-2k)=4+8k\geq0$　$\therefore\ k\geq-\dfrac{1}{2}$　②より $y\geq\dfrac{1}{2}$

７．不等式と領域

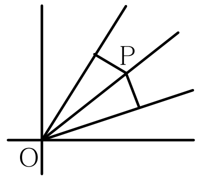
ここでは、代数的な問題を図形的に解釈しないと解きにくい問題を示してみよう。

問１．$x+4y\leq18$ かつ　$2x+y\leq8$ ならば　$x+y\leq6$ を示せ。



（解）右図より明らかである。

問２．直線AO，BOの方程式が $y=\dfrac{4}{3}x,\ y=\dfrac{5}{12}x\ \ (x\geq0)$



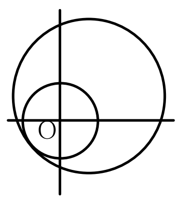
であるとき、∠AOBの２等分線の方程式を求めよ。

（解）２等分線上の点を$\mathrm{P}(x, y)$とすると、AO，BOへの垂線の長さは等しいので、$\dfrac{|4x-3y|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|5x-12y|}{\sqrt{5^2+12^2}}$

$4x-3y\geq0$，$5x-12y\leq0$ より、$\dfrac{4x-3y}{5}=\dfrac{-(5x-12y)}{13}$　この式を整理すると

$y=\dfrac{7}{9}x$（$x\geq0$）となる。

問３．P：$x,\ y$について、$x^2+y^2\leq2$ が成り立つ。



Q：$x,\ y$について、$x^2+y^2\leq2x+2y+6$ が成り立つ。

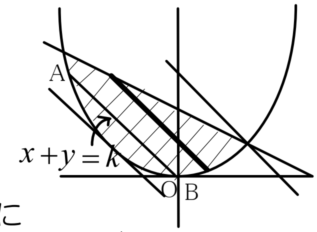
このとき、① P⇒Q　② Q⇒P　③ P⇒Q も P⇒Q のどちらも成立しない①，②，③のどれが成り立つか。

（解）P，Q の表す領域を図で表すと、P は小さい円の内部、Q は大きい円の内部となるから、①が成り立つ。

問４．$x,\ y$ について、$x+2y \leq 4$　かつ　$x^2-4y \leq 0$　が成立している。このとき、次の(1)，(2)に答えよ。

(1)　上の $x,\ y$ で，$x+y=1$　を満たす点 $(x,\ y)$ を図示せよ。

(2)　上の $x,\ y$ で、$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。



（解）(1)　$x+2y \leq 4$　かつ　$x^2-4y \leq 0$　は斜線部分なので $x+y=1$　を満たす点 $(x,\ y)$ は右図の太線である。

(2)　上の $x,\ y$ で、$x+y=k$　を満たす点 $(x,\ y)$ は斜線部分の線分 AB である。

k の値をなるべく大きくするには、直線 $x+y=k$ を上方に移動すればよい。そのためには、直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$　と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ の右側の交点を通るようにすればよい。交点は $(2,1)$ なので、$2+1=k$　すなわち、最大値は 3 である。

一方、k の値をなるべく小いさくするには、直線 $x+y=k$ を下方に移動すればよい。そのためには、放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ と直線 $x+y=k$ が接するようにすればよい。

$x+y=k$　と　$y=\dfrac{1}{4}x^2$　連立させて、方程式 $\dfrac{1}{4}x^2=-x+k$　すなわち、方程式 $x^2+4x-4k=0$　が重解を持てばよい。判別式を $\dfrac{D}{4}=4+4k=0$　より　$k=-1$

最小値は -1 である。