草花から学ぶ１０才からの算数・数学

LMSG21 (Learning Mathematics Study Group)
埼玉大学名誉教授

町田彰一郎

は　じ　め　に

　もし、何気なく目をやった道ばたの草花、その葉に「おはよう！」という文字が浮き出ていたら皆さんはどう感じますか？　きっと仰天して、「何だこれは！」と叫ぶでしょう。次に、ひょっとしたら、自分はこの草花と話が出来るかも知れないと思うでしょう。こうしたことは何も奇想天外なことではないのです。　信じられない人は、この本を読んでみて下さい。草花とコミュニケーションが出来る。ただしその言葉は日本語ではなく、科学のことば＝算数・数学です。
　実は、道ばたの草花たちのあるものは、算数・数学の言葉で私たちに話しかけているとも言えます。算数・数学なんて何も訳に立たないと言わないで、算数・数学の言葉を使って、「花たちが訴えていること」にしばし、耳（目！）を傾けてみて下さい。

　この本に書かれていることは、科学的に正しいことを述べようとしているわけではありません。ここでは、算数・数学の言葉を使って、花たちの示している誠実な振る舞いを、俳句のように、自由に感じとってみることにします。この本を読んだ小中高校・大学生の中から、将来、こうした草花の振る舞いをＤＮＡの解読の中から科学的に解明しようとする専門家が出てくるかも知れません。きっとそのときは、ここに書かれている数学よりもずっと難しい数学を使うことになるでしょう。草花たちは、そうした数学を法則化してあの小さな身体の中に持っているといえるでしょう。もちろん、おなじ日本人でも人様々で、一通りにこれが日本人の顔ということは出来ません。それぞれ個性があります。草花もそうです。一つ一つ違っています。一律にこれは正三角形、これは六角形、ということはできないのですが、ここではあえて一つに絞ってみます。
　身近な草花たちは、身体全体で表現しながら算数から数学へ、具体物から抽象の世界へ誘ってくれるでしょう。私たちは、この本を通じて草花たちとコミュニケーションしながら算数・数学の見方・考え方を草花から学ぶことにします。ここでは、小中学校から高校、大学までの算数・数学がでてきます。しかし、面倒な計算や難しい理論は展開しません。わからない言葉が出ても草花と話ができることを目指す英語のように算数・数学に慣れてください。

町田彰一郎

草花から学ぶ１０才からの算数・数学

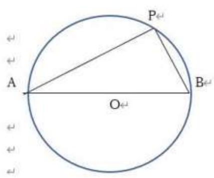
目　　　　　次

第9話　花たちの特徴をコンピュータで調べてみよう

1 花たちの世界は極座標の世界

　小中学校では、x軸、y 軸からなる直交座標上に点をプロットしていろいろな性質を調べます。では、下のオーム貝を見てください。今までとは違っています。左の点から、ある角度で直線を伸ばし一定の距離までいったら止まる活動を、水平の位置から左回りに90°、さらに、水平から右回りに90° 回って同じ活動をしています。そして、いつもの間にか円ができます。

円をグラフで表すと、直交座標ならば、$(x-5)^2+y^2=25$などとなりますが、このオーム貝はそんな複雑な式は使いません。

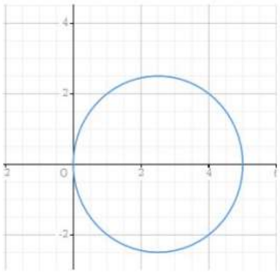


　左の図は、直径をABとする円 O 上に点 P を取ると、点 P が円周上の A,B 以外のどの位置にあっても、∠APB＝∠R（直角）となることを示しています。

どうも、オーム貝はこの性質を使って、AB＝2r、∠BAP＝θ（シータ）とすると、AP＝2rcosθ　となるように、左回りにはθが0から90°まで、下向き＝右回りには、0から-90°まで動いていると考えられます。

このような捉え方は、直交座標ではなく、極座標といいます。少し難しくなりますが、複素数平面上で表すと表現は簡単になります。

これをコンピュータ上にCasioのClass-Padというソフトで表してみます。



複素数を使って

r＝5cosθ

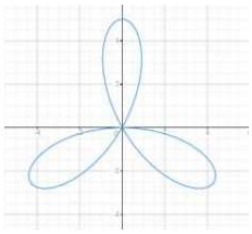
とかくと、左のようなグラフを描いてくれます。直径が5で、θが-90°～90°（円周率πを使うと、$-\pi/2 \sim \pi/2$)まで動いたのですね。

オーム貝と同じ仕組みで円を描いていることになります。

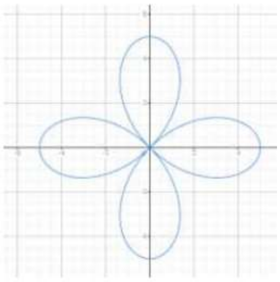
それでは、本題の花たちがどのような仕組みで花びらをつくっているか同じくClass-padを使って描いてみましょう。

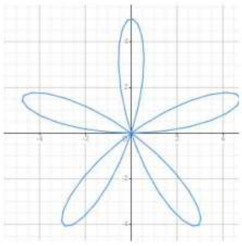
3枚の花びらの形　r＝5sin(3θ＋π)、下向きならr=5sin(3θ)

4枚の花びらの形　r＝5sin(2θ＋π/2)

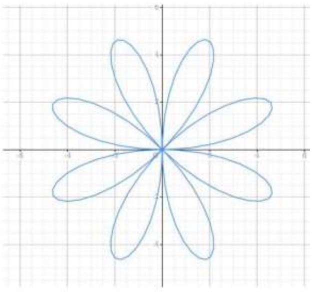


上のドクダミの花は、左の3枚の葉を180度回転してもう1組作って6枚にしている。



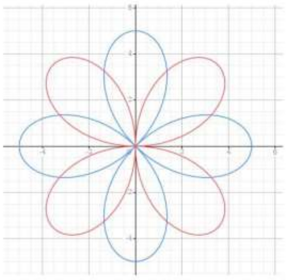


ミカンの花；　r＝5sin(5θ)



r＝5sin(4θ＋π)

左右で4枚づつ花びらがある



もし、4枚の葉が90°回転して、さらに4枚重なって咲いたら左のようになるでしょう。

r=5sin(2θ)と

r=5sin(2θ＋π/2)

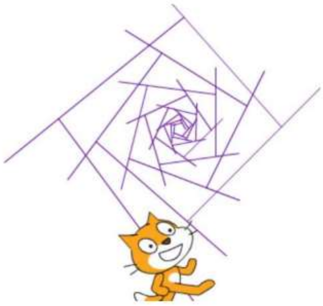
（左は皇帝ダリア）

この他、いろいろと数学上の知識を使って式を複雑にすると花たちに近い形を作ることができます。

2　葉ボタンの形をスクラッチでプログラミングしてみよう

下の花は葉ボタンの一種。小さな鉢の中からこちらを見て語り掛けようとしている。この形、簡単な線を少しずつ変えて花柄を作っている。

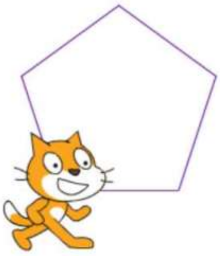
どのような仕方でこの美しい構造を作っているのだろうか　調べてみましょう。



左の図は、スクラッチというプログラム言語でこの顔の模様をデザインしたものです。

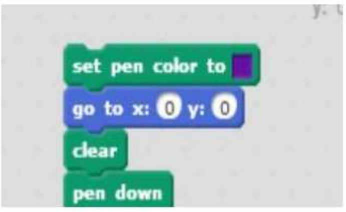
スクラッチでこの形を描き、葉ボタンがどのようにこの柄を作っているか調べてみましょう。

中央に正五角形があるようなので、まずこれを描きます。



1 辺の長さを、歩幅＝100ぽ歩くとします。上を向いている猫を右向きにして100ぽ歩く、次に、72° 左に回転する。これを5回繰り返せば、正五角形を描いてくれる。

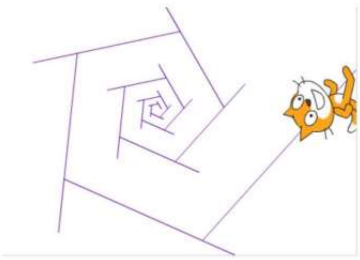
まずは下準備；



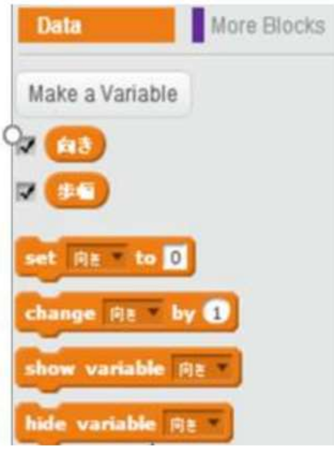
線を描くペンの色は青、画面中央(0, 0)から、真上から 90° 右横へ向き(―90° の方向)、ペンを下ろして動き出す。

100歩 歩いて、360÷5＝72° 左まわり、また、100歩 歩くこれを5回繰り返すと、正五角形が描ける。

この葉ボタンをよく見ると、左のように、少しずつずれている。



いったん進んでから、少し後ろに下がり、左回りに72° 回転し、一定の比率で辺の長さを伸ばして動いている。

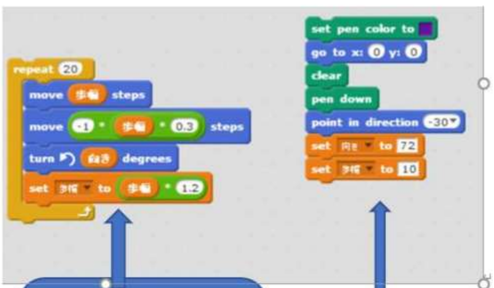


2つの変数 向き、歩幅 を作る

これを描くのに、まず、2つの変数 向き、歩幅 を作る

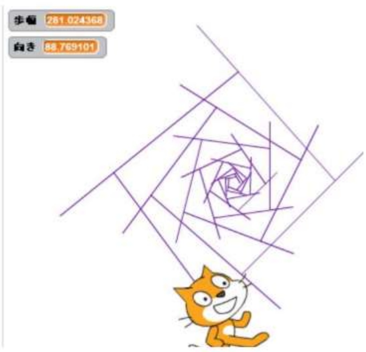
向きは、最初は 0で 1づつ進む

子ネコは、次のページのプログラムに従って動きます。



１００歩進んで、
３０％下がり、
７２° 左に体を向け
前より２０％ほど長い間移動
これを２０回繰り返す

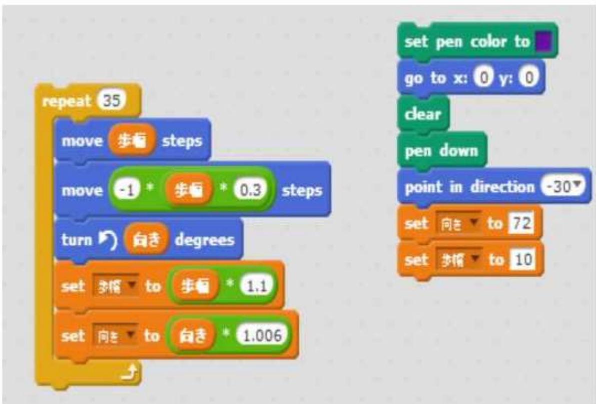
子ネコが動くまでの準備



葉ボタンは歩幅だけ進んで左に曲がるとき、角度が少しづつ大きくなっている。そこでこれを加味して次のページのようにプログラミングしてみたら左の図のようになった。

曲がる向きを前の向きよりも、ごく小さく増やし、その代わり回転数を20回から35回としてみた。歩幅を元の長さの 1.1 倍にし、向きを 1.006 倍ずつ増やして作ったのが、最初の図形となります。

これらの数値を変えてみるとさらに変わった図形ができるでしょう。

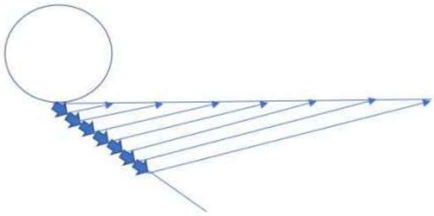


第10話　1枚の花びらで作る年間カレンダー

1　7枚の花びらを持つ花はあまりない、どうして？

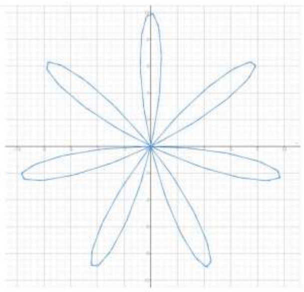
7枚の花びらを持つ花は身近なところではほとんどありません。その中で有名なのは、タヒチ島の国花、日本的に言うとクチナシの花ともいえるタヒチ・ティアレ、6 枚から8枚の花びらが咲く白い花だが、7枚の花ビラを持つものがあります。左の画像は、新潟県三条市の TAHITIMARCHE(タヒチマルシェ)社からのものです。東京板橋区の熱帯環境植物館にもあります。7枚の花びらはタヒチ行の旅客機の車体にも描かれています。日本で探してみると下の小輪多花ダリアがありました。しかし、時にはこうなるときもありますが、通常は8枚です。不思議なことに 7 枚の花びらをつける花はほとんどない。7枚の花弁は正7角形を思い起こしますが、数学的には、正7角形は定規とコンパスで作図ができないことが知られています。

通常花は、2 枚、3枚、4枚の花びらを1段ずつ2段に渡って咲かせ、全体で4枚、6枚、8枚の花にしています、その方が確実です。ここでは、万年カレンダーの作成に7枚の花を使おうとしていますが、これは難しいようです。それは数学の世界での「正7角形は、定規とコンパスでは作図できない。」ことと関係があるのでしょうか。花たちも定規とコンパスで正7角形を作るのと同じ仕組みで作ろうとしているのだろうか、興味があるところです。しかし、定規とコンパスだけでは不可能だけれど、コンピュータで作図



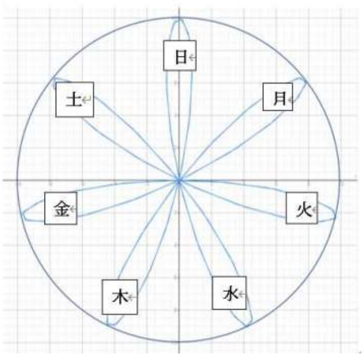
したり、上のように、円周を一回りさせた糸をほどいてピンとはり、定規を利用し糸を7等分して、それを再び円周上にもどして点をとり正7角形を描くなどの（近似的な作図）は可能です。

ここでは、CasioのClass.Padというソフトを使って、複素数座標上に $r=10\cos(7\theta+\pi/2)$ という関数のグラフをパソコンで描いてみましょう。

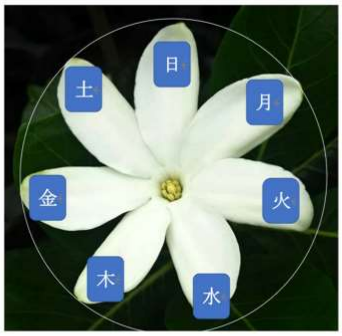


この式を枠の中に書くだけで、左のような7枚の花びらを自動的に描いてくれます。これを利用して、万年カレンダーを作ってみましょう。

2 「7枚の花びらを持つ花でカレンダー」を作り



前の7枚の花びらに円を重ね、これに、日、月、火、水、木、金、土をつけてみます。左のようになりました。



左の図は、タヒチ チアレの7枚の花びらで曜日をつけてみました。

これらを使って、万年カレンダーを作ることができます。

しかし、これを月ごと、年ごとに作るのは大変だと思う人もいるでしょう。そんなことをする必要はありません。 数学を使って、これ1枚で1年分のカレンダーにしてみましょう。どうやって作るか。そのために、カレンダーの仕組みを調査してみます。

１月から１２月まで１２か月すべてが出ている年間カレンダーを見てみましょう。すると、次のことに気づきます。

① ２月は28日と29日、

② 1月，3月，5月，7月，8月，10月，12月は31日、他は30日

③ 曜日の下に並んでいる数の列はどの月でも同じ数の列から出来ている。

ある年の1月1日の曜日が分かれば、年間のカレンダーができます。

2 カレンダーに隠れている仕組み

これはある年の1月のカレンダーです。

日	月	火	水	木	金	土
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

1年分のカレンダーを作るには、12枚作らなければいけないでしょうか。来年になったらまた、新しい12枚のカレンダー作りをするのでしょうか。しかし、カレンダーを作っている仕組みを見つければ、そんなことをしなくてもよいのです。 実際調べてみましょう。まず初めに、

'(1) 暦をよく見てみると、縦に並んだ数字の列は月が変っても変らないことに気付きます。

たとえば、金曜日の下に並ぶ数の列、1, 8, 15, 22, 29 は、次の月の1日、月曜日の下にそのまま並びます。1の後は＋7、していけば良いのです。前のページのカレンダーを見てみると、たとえば、1 日の日は木曜日で、下に並ぶ数字は、1, 8, 15, 22, 29。 だから、曜日ごとに並べてみると、

水曜日を見てみると、	(0), 7, 14, 21, 28	①
木曜日	1, 8, 15, 22, 29	②
金曜日	2, 9, 16, 23, 30	③
土曜日	3、10、17, 24, 31	④
日曜日	4、11, 18、25	⑤
月曜日	5、12、19, 26	⑥
火曜日	6、13、20、27	⑦

また、31日の月は、1月，3月，5月，7月，8月，10月，12月

30日の月は、4月、6月、9月、11月

さらに、2月は平年が28日、 うるう年は29日 をチェックすると、

うるう年とは、4の倍数はうるう年、しかし、100の倍数なら平年、

さらに、1000で割り切れれば、うるう年

たとえば、1900年は、4で割れるけれど、100でも割れるので平年で2月は28日で、1年は365日でした。1904年はうるう年で1年366日

ところが2000年は、4で割れ、100で割れ、1000でも割れるので、これも、うるう年となって、2月は29日あり、1年間の日数は366日ありました。

平年の年は、365÷7＝52あまり1 で次の年の曜日が52週後で1日ずれることになります。うるう年ならば、366÷7＝52あまり2で、次の年の曜日は2日ずれます。

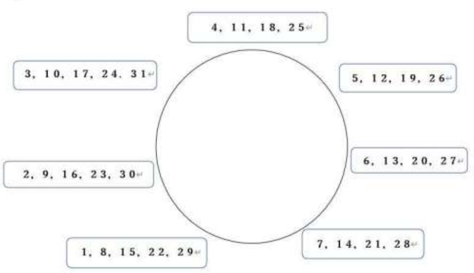
このことを知れば、花のカレンダーが作れます。たとえば、2020年12月31日は木曜日から、次の日の2021年の1月1日は金曜日、また、2021年は4で割り切れないので平年で2月は28日、したがって、2022年の1月1日は木曜から1日づれ金曜日となります。

このようにして、各年の元旦の曜日は以下のようになります。

2023	土	平年	次の年は、1日づれ
2024	日	うるう年	次の年は、2日づれ
2025	火	平年	次の年は、1日づれ
2026	水	平年	次の年は、1日づれ
2027	木	平年	次の年は、1日づれ
2028	金	うるう年	次の年は2日づれ
2029	日	平年	次の年は、1日づれ

・・・・・・・・

これでカレンダーは作れます。まず次のページのような曜日なしのカレンダーを作ります。その数字は、上の①～⑦の数字の列です。



ここに、花に書いた日～土の曜日をつければ、出来上がり。

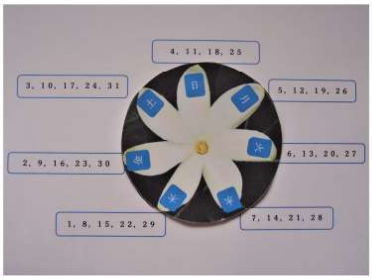
2021年の1月のカレンダーを作ってみましょう。

2021年の元旦が金曜日なので、金曜(FRI)の花びらを

1, 8, 15, 22, 29の列にまわして置けばできあがり。

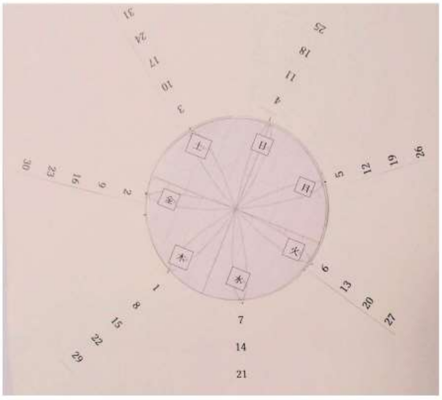
この年の2月1日の曜日は、金曜日から 31÷7＝4あまり3 で3日後で、土、日、月曜日。そこで、 花びらの曜日の月曜(MON)を1, 8, 15, 22, 29のところに合わせれば良いことになります。 面白いことに、平年の3月1日の曜日は、28÷7＝4あまり0 なので、2 月のカレンダーはそのまま

変わらず、3月も使えることになります。



左のカレンダーは5日が月曜日の月のカレンダーです。30日までの月では31は無視してください。

これをうまく使うと、歴史的な事件や出来事の年月日がわかればその日が何曜日だったかを知ることもできます。



花のカレンダーを作りましたが、このように、PC で7枚の花びらを描き、日、月、火,,,、土の曜日を言えて作ることもできます。1日が木曜日の月のカレンダーは前ページのようになります。

最後に、元旦が日曜日の年の各月の1日の曜日を下にあげておきます

平年　2月が28日(＝7日/週×4週)

1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
日	水	水	土	月	木	土	火	金	日	水	金
(0)	(3)	(3)	(6)	(1)	(4)	(6)	(2)	(5)	(0)	(3)	(5)

うるう年　2月が29日(＝7日/週×4週＋1日)

1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
日	水	木	日	火	金	日	水	土	月	木	土
(0)	(3)	(4)	(0)	(2)	(5)	(0)	(3)	(6)	(1)	(4)	(6

この表を使えば元旦の曜日がわかれば、どの年のカレンダーも作ることができます。たとえば、1月1日が金曜日だったら、金曜日は日曜(0)から5番目から、平年ならば、平年の表で、＋5足せば、その月の1日の曜日が分る。 2月1日は上の表で(3)から、3＋5＝8、8―7＝1で、(1)の月曜日。9月1日は、(5)から、5＋5＝10、10－7＝3で、 (3)で水曜日となります。

第11話　ひまわりから学ぶ大きな数と面積の求め方

1　円の面積公式からひまわりの種を数える

ひまわりの花；

成長したときのひまわりの種は何個くらいあるのだろう？

ひまわりの形は円形だから、円の面積公式が使えないか？

そこで、中心から半径分の線を引いてみる。

この線上に種がおよそ何個あるか調べてみる。

数えてみると、およそ20個から21個ありそうだ。 そこで、

ひまわりの円の面積＝ひまわりに隙間なく並んでいる種の数

と考えて、円の面積公式を使って面積を求めてみることにします。

円の面積＝半径×半径×3.14 から、種が

20個だったら1256個

21個だったら1385個

(1256＋1385)÷2

＝1320.5 個、 そこで、およそ、1320個～1321個

2　実際にかぞえてみましょう。

種を取り出し、器に入れます。

量が多いので、

10個づつ分けてみましょう。

左の箱の中には

5×6×10＝300個

あります。

これが4箱分ある。

さらにあふれた種が、

左の箱に130個

あります。

それでは全部でいくつ？

300×4＋130＝1330個

これを求めるには、結構手間がかかる。

円の面積公式からの求めた数は、1320個～1321個 なので、

それほど大きな違いはなかったといえる。

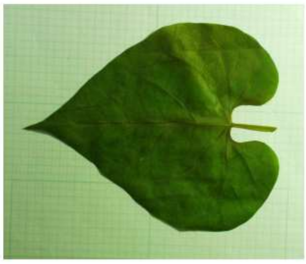
3 ひまわりの葉の面積を求める

学校では、直線図形の面積を求めることはいろいろと学ぶけれど、曲線図形の面積は、高校の積分を学ぶまであまり目にしない。しかし、植物の世界や自然界の身のまわりでは、求めたくなる時がよくあります。

右の葉はひまわりの大きな葉です。下の新聞紙と比べてみてもその大きさはわかります。このような面積はどうしたら求められるでしょうか？

次のページの小さなひまわりの葉で、面積の求め方を考えてみましょう。

最初は、円の面積と三角形の面積の公式を使って求めてみます。



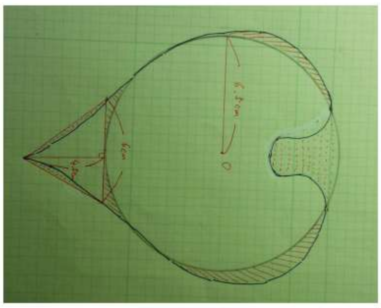
円と三角形それに、残った部分の面積を考えて、計算してみます。

下の図で、

円の半径は、6.5ｃｍ

底辺 6cm、高さ 4.5cm

となる、

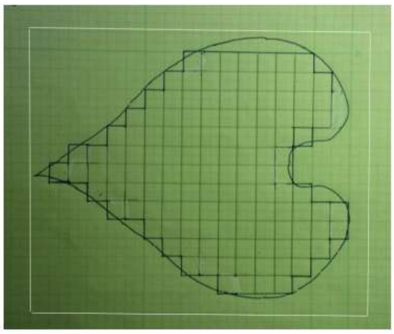


そこで、円の面積は、6.5×6.5×3.14＝132.665

三角形の面積は、6×4.5÷2＝13.5

合計 132.665＋13.5＝146.165cm^2

図の点線の部分と、斜めの線の部分、円と三角形の増えた分、減った分を考えると互いに打ち消し合っていると考えられ、面積は約 146cm^2 と言えます。 では、下の方眼のマス目を数える方法ではどうでしょうか？



1cm^2 のマス目が上から、7＋9＋10＋11＋11＋12＋13＋12＋13＋11＋9＋7＋4＋はみだし部分＝129＋はみだし部分

ここで、はみだし部分は、半分の三角形18個＋上側の底辺6、高さ1の三角形＋はみだし部分＋右側のほぼ2個分からなる面積 と考え、

はみ出し部分の面積＝1/2×18＋3＋6×1÷2＋2＝17となり、

曲線の面積＝129＋17＝146cm^2 となるので、計算で求めた面積とほぼ同じ結果となる。 身の回りの世界でのやり取りから、正確な値よりもこのように誤差(ごさ)を認めた計算が必要になることがわかります。

この他、乱数を使っても面積を求めることができます。前の写真で、白く囲まれた長方形の中の点の数とハート型の小さなひまわりの中に入る点の数の比(ハート型/長方形の比)に長方形の面積をかけてハート型の面積を求められます。これも答えは近似値です。

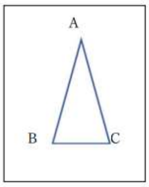
4　数学の話題から一言

ひまわりはできるだけ効率よく「少ない面積にたくさんの種を保存しようとする」のに円形を選んだのだろうか？

これは一般的には等周問題といって、一定の長さのひもを使って図形を作るときどんな図形だと面積が一番大きくなるだろうかという問題です。ここでは、直感的にエクセルを使ってシミュレーションしてみましょう。

課題　長さ20cmの細いひもがあります。このひもを折って正多角形を作ります。こうして折ってできた図形の面積が一番大きな図形はどんな図形でしょうか？　この問題は、高校生の問題となります。

ひもの長さをacm　とし、このひもで正n角形を作ると1辺の長さは a/n、もし円を作ると、$a=2\pi r$　から、半径は　$r=a/2\pi$



正n角形では、1辺の長さ $BC=a/n$

ABとACの長さをxとすると、$\angle BAC=2\pi/n$

余弦定理から、$(a/n)^2=2x^2-2x^2\cos(2\pi/n)$

$=2x^2\{1-\cos(2\pi/n)\}$

$\therefore\ x^2=(a/n)^2/\{2(1-\cos(2\pi/n))\}=(a/n)^2/\{4\sin^2(\pi/n)$

△ABCの面積$=1/2x^2\sin(2\pi/n)=x^2\sin(\pi/n)\cos(\pi/n)$　から、

$=(a^2/4n^2)\cos(\pi/n)/\sin(\pi/n)=(a^2/(4n\pi))\{(\pi/n)/(\tan(\pi/n))\}$

正n角形の面積＝n△ABCの面積$=(a^2/4\pi)\{(\pi/n)/\tan(\pi/n)\}$

この式を使って、エクセルで計算してみると、円の面積が他より大きい。

２０cmのひもを円周とする円の面積を求めると、約31.85cm^2

正ｎ角形のｎの値を大きくすると、面積は大きくなるが、円の面積を超えない。

ひもの長さ(a＝２０）、正ｎ角形の一辺の長さ＝a/n

円の半径をｒとすると、a＝2πｒからｒ＝a／2π＝3.18

円の面積＝πr^2＝31.85

正ｎ角形の面積＝(a^2/4π)×｛(π/n)/tan(π/n)｝

＝円の面積×(π/n)/tan(π/n)

	比率	正ｎ角形の面積
n	(π/n)/tan(π/n)	円の面積×(π/n)/tan(π/n)
3	0.605034388	19.26861108
4	0.785625366	25.0199161
5	0.864947093	27.54608578
6	0.906995837	28.88521775
7	0.932010561	29.68186501
8	0.94811265	30.19467039
9	0.959092393	30.54434371
10	0.966916592	30.79352204
11	0.972689864	30.97738422
12	0.977071989	31.11694231
13	0.980476998	31.22538209
14	0.983175469	31.31132066
15	0.985350335	31.3805839
	↓	↓
	1	円の面積(31.85)

もっと詳しく知りたい人は、$(\pi/n)/\tan(\pi/n)$　の値が、n　が大きくなるにつれて増加していくが、1を超えることはないことを、高校から大学の数学を使って調べるとことができます。ここでは、これ以上扱わないですが、興味を持った人は、「等周問題」として検索すると、一般的な、長さ　a　cm　のひもで、どのような閉じた曲線図形を作ってもその面積が最大のものは円になることを、数学を使って解説しているものが見つかるでしょう。

ただし、それには大学での数学の基礎知識が必要です。

ひまわりがなぜ円形に種を生えさせていたか、たかが「ひまわり」と思っていると間違いだということが分かりました。ひまわりがさらに高度な数学を使っていることを後で紹介しましょう。

第12話　　花や葉はどうして人をひきつけるのだろう？

1　黄金比を作っている花

道端に咲いている朝顔、どこにでもある花ですが、きれいな星を描いています。

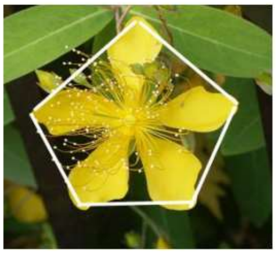
これを算数・数学の目でみると、高校生も驚くでしょう。

この朝顔、正五角形の内側に星形を描いているのです。何を強調しているかって？　そう、

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$ (ファイ)

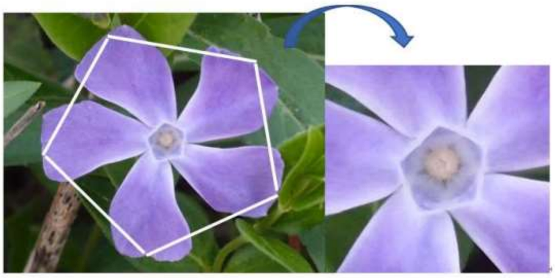
正五角形の1辺の長さを1とすると、その対角線の長さ、またはこの星形の1辺の長さを表しています。この比　$1:\phi$ は黄金比と言われています。古代ギリシャのパンテノン神殿に使われている比から始まって様々な美術品に使われている美しい比の代表です。　身近

な花には、正5角形を作る花はたくさんあります。これらは皆、この黄金比を備えていると考えると改めて花たちを見直します。



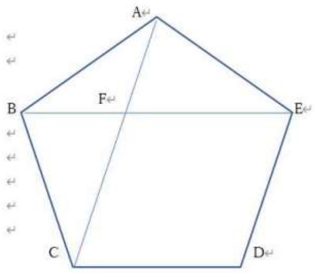
下は回転して正5角形を作っています。

なぜ、正5角形の対角線が $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるのでしょう？



左の花を拡大すると、中にまた正5角形が見えてくる。

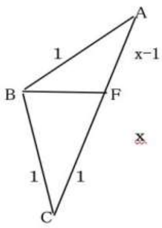
2　数学の言葉で一言



正5角形は次のような性質を持っています。

△ABC、△ABE は二等辺三角形で合同

したがって、△AFB も二等辺三角形だから、△ABC と△AFB は相似、



△EAB、△CFB も二等辺三角形で合同だから、EA=EF＝CF＝CB

辺 AB＝1、対角線 AC=x（x＞0）

とすると、左の図から、

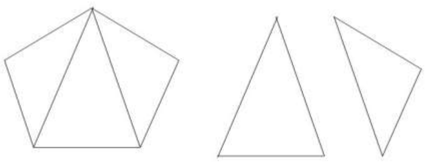
AB＝CB＝CF＝1、AF＝x−1で

△ABC∽△AFB から、

1＝ x（x−1）、x＞0

したがって、 $x^2-x-1=0$ を解くと、 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

となる。ちなみに、$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は小数で表すと約1．618 となります。



正5角形の性質をさらに調べてみましょう。 正5角形は、

上図の2種類の三角形、鈍角二等辺三角形2個と、鋭角二等辺三角形1個から出来ています。そして、

正五角形の外角は 360÷5＝72°、内角は、180－72＝108° から、

鈍角二等辺三角形の2つの底角は、72÷2＝36° となり、

正5角形の頂点に集まる3つの角はいずれも36°（36° ×3＝108°）、

前に述べたことで、正5角形の1辺の長さを1とすると、

鈍角二等辺三角形の3つの辺は、$1:1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

鋭角二等辺三角形の3つの辺は

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}:\frac{1+\sqrt{5}}{2}:1=1:1:1/\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1:1:\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

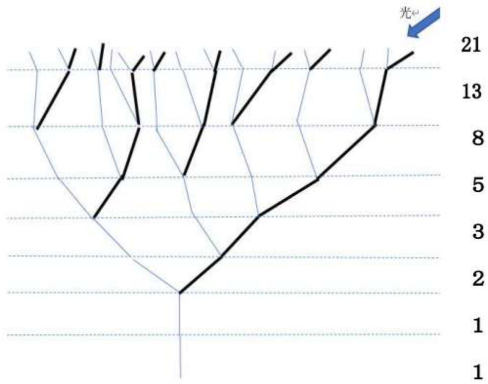
（ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の逆数は、$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1$ から、$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ となります。 ）

これらの比は、いずれも、黄金比といえるでしょう。そして、これら2つの二等辺三角形を、黄金三角形と呼ばれています。

3 枝わかれから生まれたフィボナッチ数

黄金比を持った花というと、次のフィボナッチの数列を思い出します。

草木が成長するときの原理に次のような決まりがあると言われています。



上の図は、ある木の枝の生え方の決まりを示しています。

そこには、次のような決まりがあります。

① 第1節、第2節は枝がそのまま、1、1 伸びていきます。

② 1，1と2節まで伸びると、二股に分かれます。太陽があたる右側の方が太く、左側が細い枝です。

③ 太い枝の方は、次の節で、右が太く、左が細い枝がでて二股に分

かれます。

④　太い枝は次の節でまた二股に分かれます。細い方は、次の次の節までいったら2股に分かれることになります。

このような決まりで、枝が伸びたとすると、枝は次のように増えていきます。これをフィボナッチの数列と言います。

1＋1＝2

1＋2＝3

2＋3＝5

3＋5＝8

5＋8＝13

8＋13＝21

13＋21＝34、21＋34＝55、34＋55＝89、‥‥

ひまわりは渦巻が右まわり、左まわりがあり、合わせて34＋55＝89となり、

いずれも、フィボナッチ数列を作っている数となる。

このフィボナッチ数列の増加率を求めてみると、興味あることに行きつきます。そう黄金比です。

1/1＝1、2/1＝2、3/2＝1.5、5/3＝1. 66‥、8/5＝1. 6、

13/8＝1. 625、21/13＝1. 61538‥‥、34/21＝1. 619‥

55/34＝1. 6176‥‥、89/55＝1. 61818‥‥

とこれを続けていくと、不思議なことに黄金比$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$＝1. 618‥‥

に近づいていく。

5　フラクタル(自己相似形)図形

(その1)

$(a+b)^2$の展開式の係数は 1,2,1

$(a+b)^3$の展開式の係数は 1,3,3,1

$(a+b)^4$の展開式の係数は 1,4,6,4,1

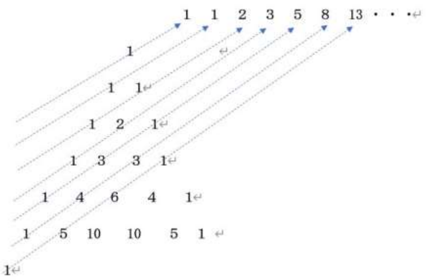
$(a+b)^5$の展開式の係数は、1,5,10,10,5,1 となる。

これを一覧して、次のように並べると、フィボナッチ数列

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21、34, 55, 89、、、が見えてくる。

そして、ここでは深く扱わないが、次のような黄金比との関係がある。

$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\{((1+\sqrt{5})/2)^n-((1-\sqrt{5})/2)^n\}$　f_1, f_2, f_3, ‥ :フィボナッチ数



(その2)　360°を黄金比で分割すると、360÷$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$＝222.4969

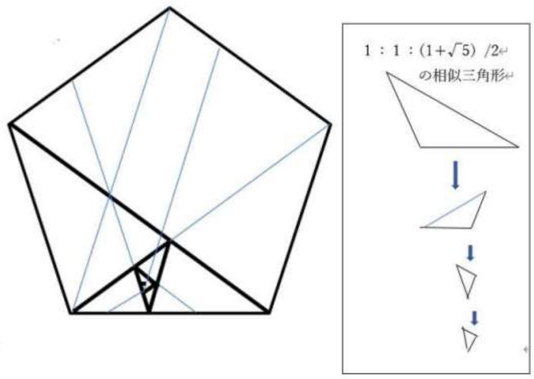
360-222.4969＝137.5031 となり、 一周を137.5:222.5に分割

この性質を体現しているのが次の多肉種(ペンタンドルムか)といえる。

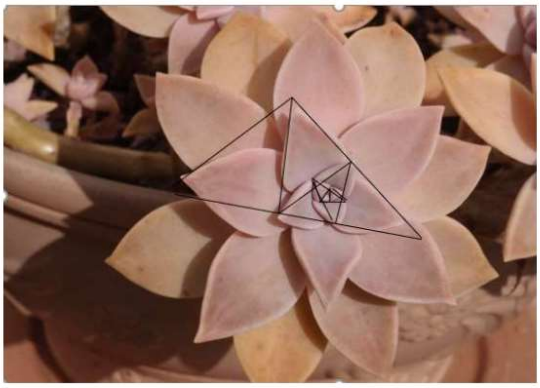
(その3)　子宝草は黄金比を使ったさらに興味ある形を作っている。それはフラクタル、自己相似形と言われている。実際に見てみよう。そのまえに、自己相似な形を正五角形の中に見てみよう。

フラクタル図形 (自己相似形)

互いに相互作用しながら、ある決まりに従った図形を作る。
ときには、全く制御不可能な図形を作ってしまうかもしれないし、
全く動きのとまった状態になるかもしれない。
下の図は、2辺が黄金比をなす相似な
二等辺三角形からできている。
1:(1＋$\sqrt{5}$)/2



葉っぱに線を入れてみると、見えてくるものがある。自己相似形をなす三角形だ。



黄金比は葛飾北斎の波裏富士など芸術作品にも数多く利用されている。

終わりに

ここで扱ったことは、身近な草花を見て感じたことを学校で学んだ算数・数学を使って表現してみようとしたことです。対象は、小中高の児童・生徒と学校の先生です。算数・数学は基礎基本の知識・技能を積み上げていけば将来、科学の言葉＝数学を使いこなせるようになると考えがちですが、そうして大学を出るまでに数学を学ぶ意欲を失ってしまう生徒たちが多いと言われています。最近では、数多くのデータ（Big Data）をコンピュータで処理しながら問題解決する仕事が増えてきています。そこで、文理融合といって文系でも理系のどの分野でも科学の言葉＝数学を使って問題解決する仕事が多くなってきました。ここでは、ごく普通に見かける身近な草花と数学の言葉を使って交流する中から、学校で学んだ、またこれから学ぶ算数・数学に親しんでいくことを目指しています。

以下の本は、これに比べるとかなり高度な内容を扱っている本です。生物の専門家や数学の専門家が書いているために、草花と算数・数学の関係を必ずしもともに扱っているとは限りません。しかし、あえてここで挙げたのは、自然界を数学的に見るときの見方・考え方や、草花だけでなく自然の営みを科学的に見るときの見方・考え方を教えてくれる本として紹介するものです。ここで取り扱ったことはそこへの第一歩です。

さらに学びたい人へ

1　イアン・スチュアート、林昌樹、勝浦一雄　訳「生命に隠された秘密　―新しい数学の探求」、愛智出版

2　イアン・スチュアート、吉永良正　訳「自然の中に隠された数学」、草思社

3　J.A.アダム、一樂重雄、一樂祥子　訳「自然の中の数学　数学で見る自然の美しさ上、下」、シュプリンガー　ジャパン、

4　ステファノ・マンクーゾ、久保浩次　訳「植物は「未来」を知っている」、NHK 出版

5　松下　貢「非線形・非平衡現象の数理　②、生物に見られるパターンとその起源」、東京大学出版会

6　大内　東、山本雅人、川村秀憲、柴　肇一、高柳俊明、當間愛晃、遠藤聡志「相互作用科学シリーズ、　生命複雑系からの計算パラダイム」、森北出版

7　「植物の軸と情報」特定領域研究班編　「植物の生存戦略」―「じっとしているという知恵」に学ぶ、　朝日新聞出版

8　イアン・スチュアート、梶山あゆみ「自然界の秘められたデザイン　―雪の結晶はなぜ六角形なのか」、河出書房新社

9　Stefan Hilderandt, Anthony Tromba,　小川　泰、神志那良雄、平田隆幸　訳「形の法則　―自然界の形とパターン」、東京化学同人

10　Richard A. Dunlap　「The Golden Ratio and Fibonacci Numbers」、World Scientific

11　H.ヴァルサー、蟹江幸博　訳「黄金分割」、日本評論社