草花から学ぶ１０才からの算数・数学

LMSG21 (Learning Mathematics Study Group)
埼玉大学名誉教授

町田彰一郎

は じ め に

もし、何気なく目をやった道ばたの草花、その葉に「おはよう！」という文字が浮き出ていたら皆さんはどう感じますか？　きっと仰天して、「何だこれは！」と叫ぶでしょう。次に、ひょっとしたら、自分はこの草花と話が出来るかも知れないと思うでしょう。こうしたことは何も奇想天外なことではないのです。　信じられない人は、この本を読んでみて下さい。草花とコミュニケーションが出来る。ただしその言葉は日本語ではなく、科学のことば＝算数・数学です。

実は、道ばたの草花たちのあるものは、算数・数学の言葉で私たちに話しかけているとも言えます。算数・数学なんて何も訳に立たないと言わないで、算数・数学の言葉を使って、「花たちが訴えていること」にしばし、耳（目！）を傾けてみて下さい。

この本に書かれていることは、科学的に正しいことを述べようとしているわけではありません。ここでは、算数・数学の言葉を使って、花たちの示している誠実な振る舞いを、俳句のように、自由に感じとってみることにします。この本を読んだ小中高校・大学生の中から、将来、こうした草花の振る舞いをＤＮＡの解読の中から科学的に解明しようとする専門家が出てくるかも知れません。きっとそのときは、ここに書かれている数学よりもずっと難しい数学を使うことになるでしょう。草花たちは、そうした数学を法則化してあの小さな身体の中に持っているといえるでしょう。もちろん、おなじ日本人でも人様々で、一通りにこれが日本人の顔ということは出来ません。それぞれ個性があります。草花もそうです。一つ一つ違っています。一律にこれは正三角形、これは六角形、ということはできないのですが、ここではあえて一つに絞ってみます。

身近な草花たちは、身体全体で表現しながら算数から数学へ、具体物から抽象の世界へ誘ってくれるでしょう。私たちは、この本を通じて草花たちとコミュニケーションしながら算数・数学の見方・考え方を草花から学ぶことにします。ここでは、小中学校から高校、大学までの算数・数学がでてきます。しかし、面倒な計算や難しい理論は展開しません。わからない言葉が出ても草花と話ができることを目指す英語のように算数・数学に慣れてください。

町田彰一郎

草花から学ぶ１０才からの算数・数学

目　　　　次

第5話　円や球が好きな草花

1 古代はすが目指すきれいな円

古代はすの葉は、茎が円の中心にないにも関わらず、きれいな円形を作っている。

最初は長細く、楕円形を作っているようだが、成長していくにつれ円になっていく。

こちらの葉もできるだけきれいな円形を作ろうとしているようだ。

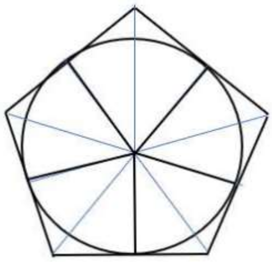
なぜ、蓮の葉は円をめざしているのだろうか？

最初は、中心から近い方が割れている。割れている部分が狭くなるにつれ円になっていくようだ。

2　多角形の中に円をひそませる花々

5枚の花びらの内側に円を描いている朝顔もある。

この朝顔、正5角形を作っているのだけれど、実は円を目指してもいるとも言えそうです。その仕組みを図に描いてみると次のようになります。

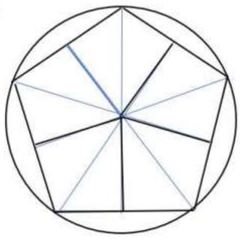


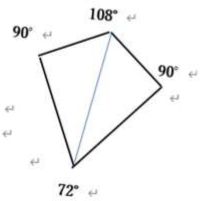
数学的には、円に外接している正5角形ともいえる。

問　正5角形に円を内接させるには、定規とコンパスを使ってどうやって描いたら良いでしょう。

また、朝顔の中には、下のように、円に正5角形を内接させているものもあります。

一見、下のようにたこ形を1点の周りにぐるっと巻いているように見えます。





中心に集まる頂角は、360÷5＝72°です。中心から正5角形の角辺へ垂直に2本の辺が伸びているので、直角が2個あり、72°に向かい合う角は180－72＝108°となります。これが、正五角形を作る5個のたこ形の基本形といえます。これは、前の円に外接する正5角形も同じです。

下のききょうのつぼみや花は　円とは無縁に正5角形を形作っている。

左のように正5角形を描いてみると、つぼみは、外側の5個の三角形を折りたたんでいるように見える。

その意味で、ききょうは正 5 角形が好きな花といえる。先にみたように、正5角形は円に内接したり外接したりします。

下の花は、6枚の花びら　や8枚の花びらから出来ているけれど、ききょうほど尖っていず、これも、円が好きだと言っているようです。

（シャイニーサン）

3　花びらの数をより多くもつ花

花の中には、もっと多くの花びらをつけようとするものもあります。

この花は、14、15枚の花びらをつけている。
見方によれば、多くの花びらをつけて花が円形になるようにしているともとれる。

この花は、正15角形を作ろうとしているのかもしれない。しかし、花びらの数が多くなってくると、正多角形がだんだん円に近づいていくように見えるのだろう。

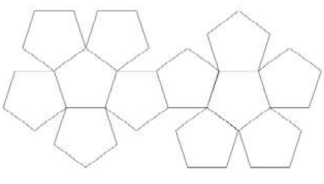
花によって花びらの数が違ってくるときがある、それは、環境や成長の過程によるのだろう。それが、数式と自然界との違いでもある。しかし、花びらが皆同じように、また重ならないように育とうとするために、1点から同じ間隔で、同じ長さ伸びようとするので、結果的には円を目指すことになっているようです。

実は、それぱかりではない。花たちがエネルギーを最小限にして、できるだけ大きな効果をもたらそうと努力している結果、こうなっていると数学を使うとわかることがあります。第11話を見てください。人間は手や目があるから一つずつ数えられたが、手も目もない花たちができるだけ効率よく「少ない面積にたくさんの花びらや種を作ろうとする」にはどうしたらよいだろうか、この問題を解決するときに花たちがたどり着いたのが「円を利用する」ということのようです。

4 円から球を目指す花

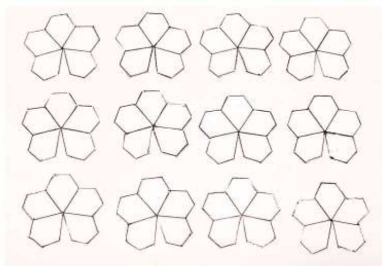
次ページのコデマリという花は、春先にたくさんの白い5枚の花をあたかも桜の花のように咲き、球形を作ろうとしている。5枚の花びらは数学的に言えば、正五角形なので、正五角形で球に近い正多角形を作るというと、まず、思い出すのが、下図のような正12面体です。

展開図は、正五角形の周りに5枚の正5角形をつけたものを2組作り、上下さかさまにし図のようにつけます

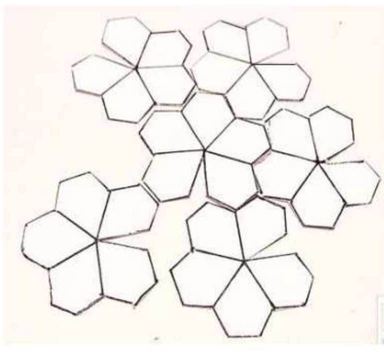


しかし、コデマリはもっと多くの花の面をつけ全体が球になるようにしています。

これよりも多くの面をもつ5角形からなる立体は、確かに球の形に近づいていくことが数学の世界で見つかります。下の5角60面体がそれにあたります。正5角形の12面体の上に、右のような花形をかぶせると、



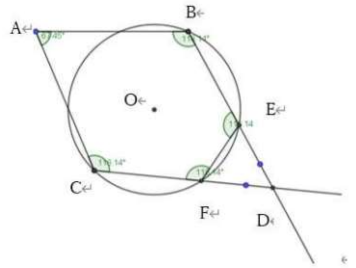
12面×5枚の花びら＝60面体ができます。コデマリは正5角形の形で数多くの面を作ろうとしているので、花びらの多くが重なってしまっています。



ここでは、5角60面体のような少し細長い花びらをつけて60面体を作ってみましょう。上の図のように、桜の形より細長い各面を作っている五角形とは、尖った頂角が約 7.45°

他の4つの角は同じ角度で、約 118.14° となるものです。

この情報から、Geogebra という作図ツールでこれを作ってみましょう。

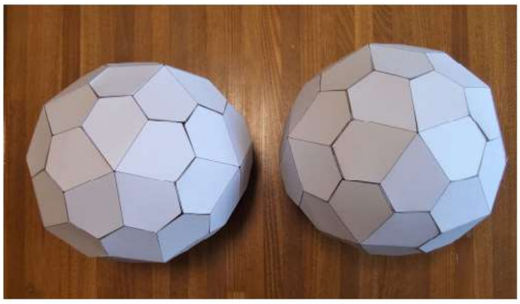


点Aを取り、AB＝6として、点 B をとり、∠BAC＝67.45° となる点 C をとる。∠ABD＝118.14° となる直線 BD をひく、一方、∠ACD＝118.14° となる直線 CD をひき、その交点を点 D とする。

線分 AD の中点 O を取り、それを円の中心として、半径 OB(＝OC)の円を描き、円 O と BD、CD との交点をそれぞれ、E,F とする。

∠BEF,∠CFE を測ってみると、それぞれ、118.14° となっていることがわかる。この5角形 ABCDE を基本図形として、点 A の周りに5枚作り桜のマークを作る。この桜のマークは、67.45° ×5＝337.25 から、360―337.25＝22.75° で、22.75° の隙間があく。これを詰めて5角形の傘のような形を作って、上に6枚の半球、下に6枚の半球を作ってできたのが、

下の5角60面体となります。これを上下合わせれば、同じ形から出来る多角形の中ではもっとも球形に近い形ができます。



このような視点からコデマリを見ると、自分の好きな球の形を作ろうと、一生懸命数学を活用しようとしている植物だと言えそうです。

“たかがコデマリされどコデマリ”

第6話　草花にひそむ“しきつめ模様”

1 クローバは円とひし形から出来ている？

庭の片隅に息づいているクローバの葉、3枚のハートの形が寄り添って並んでいます。このハートの形、どんな特鋼があるのだろう。

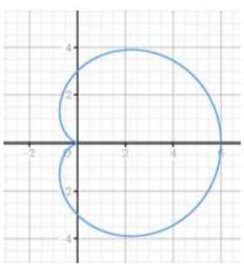
数学に詳しい人は知っています。

これは、心臓形(カーディオイド)と言われています。

高等学校の数学では「複素数と極座標」というところで学びます。

Casio-Pad という作図ツールを使って、複素数平面で次の式を書くと、下

$$r=a(\cos(\theta)+1)$$

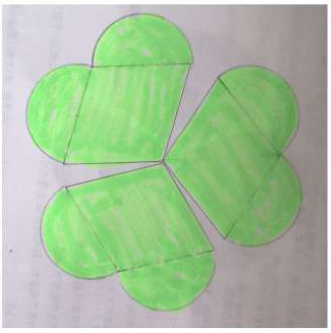


のようなグラフを描いてくれます。

これがカーディオイドとなります。

クローバのハートの形とは少し違いますね。

では、クローバのハートの形はどんな特徴をもっているのでしょうか。



クローバを取ってきて、コピーして、色を塗ったものが左の図です。よく観察してみると、このハート形は、半円とひし形から出来ていることがわかります。

ひし形といっても色々ありますが、どんな特徴をもっているでしょう。

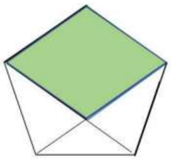
ひし形の角を測ってみると、72° と108° でした。

これは見たことがありますね。正五角形の中に潜むひし形です。

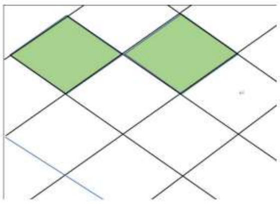
（正5角形の外角は、

360÷5＝72、

内角は、180－72＝108）

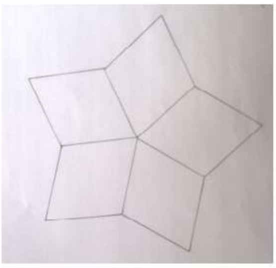


このひし形、下の図のように何枚も作って、敷き詰めると、すきまなく並べることができます。



クローバは、このような特徴を持ったひし形と円を半分づつつけて、個性的な独特の形を作っていたのでした。

ひし形の敷詰は水面に浮かぶ菱の葉で確認できました。



また、このひし形、72°ということは、

72°×5＝360°で、1点の周りに5枚敷き詰めれば、下のように敷き詰められます。

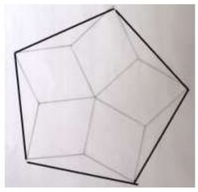
これは、五枚の花びらをもって咲く花に特徴的な形と言えます。

このきまりにしたがった5枚の花びらを持った花は数多くあります。

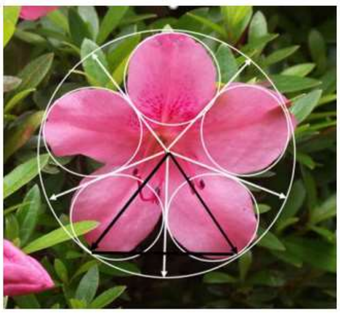
そこから、暗に正5角形の姿が見え隠れしているようです。

2　正5角形を作ろうとする花たち

次のカラスウリやきゅうりの花は、この形を描いて正五角形を意識するように、花びらを出しているように見えます。



さつきの花は正五角形をどのように作ろうとしているのでしょうか。

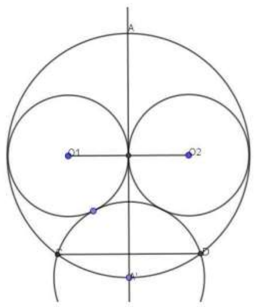


すこし調べてみましょう。5枚の花びらからは、こんな感じで、外側の円に内接し、互いに外接し合う5枚の円から出来ていると見ると、黒い三角形の頂角は、360÷5＝72で、

底辺はちょうど正五角形の1辺となっていることが読み取れます。

これとは別の見方もできます。

左のような図を描いて説明しましょう。



(1) 原点 O を中心として半径2の円Oを描く。

(2) x軸上に2点 O_1(—1,0)、O_2(1, 0)をとりそれらを中心とする半径1の円 O_1、O_2 を描く。

(3) 2円 O_1,O_2 は円 O に内接する。

(4) y軸と円 O との交点を上からそれぞれ点 A,A’とする。

(5) 点A’を中心として2円 O_1,O_2 に接する円を描く。

(6) 円Oと円A'との交点をそれぞれ、B,Cとすると、BCの長さは

半径2の円Oに内接する正5角形の1辺の長さとなる。

(7) この長さで円Oの周を区切ると、円Oに内接する正5角形ができる。

説明： 座標を使い式で円Oに内接する正五角形の1辺を求めます。

円 O_1; $(x+1)^2+y^2=1$ 円 O_2: $(x-1)^2+y^2=1$

に外接する円A'の方程式は、$A'O_1=\sqrt{5}$ から、円A'の半径は $\sqrt{5}-1$

円A'; $x^2+(y+2)^2=(\sqrt{5}-1)^2$ ①

円O; $x^2+y^2=2^2$ ②

①、② から、交点C(x、y)をもとめると、 $y=-(1+\sqrt{5})/2$ から、

$x=\sqrt{\{(5-\sqrt{5})/2\}}=\{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\}/2$

したがって、$CD=2x=\sqrt{\{2(5-\sqrt{5})\}}$

ここで、△OCDに余弦定理を適用して∠COD＝θを求めると、

$CD^2=2^2+2^2-2\times4\cos\theta=8(1-\cos\theta)=2(5-\sqrt{5})$

' $\cos\theta=(-1+\sqrt{5})/4$ ∴ $\theta=72°$

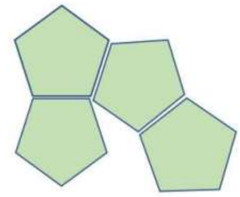
したがって、$CD=\sqrt{\{2(5-\sqrt{5})\}}$ は、半径2の円に内接する

正5角形の1辺を表していることが分かります。

CDの長さで、円Oの円周を区切っていけば、それぞれ円周角が72°

となり円周が5等分され、線分で結べば正5角形が出来上がります。

3 草はどんな5角形で平面を敷き詰めようとしているか

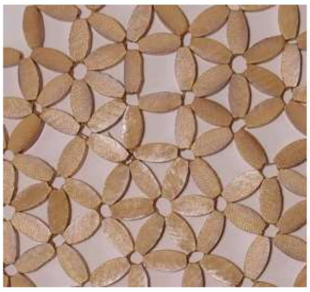


正5角形を作っても、正五角形では平面をすきまなく敷き詰めることはできません。

108° ×3＝324° で、

360－324-36°

のすき間ができてしまいます。

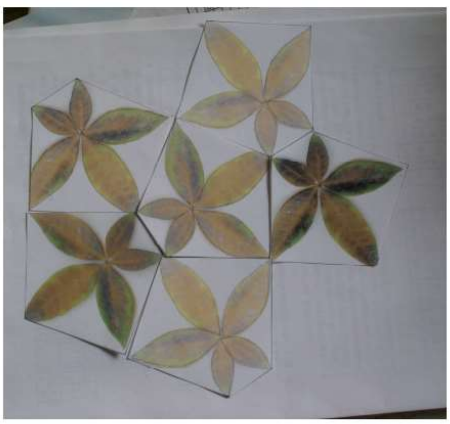


左のしきつめ模様、一見正五角形で敷き詰められているように見ますが、よく見ると、真ん中に正6角形、その周りに円形に何組かの正五角形が重なっているようで、正5角形の敷詰ではないことが分かります。

平面を敷き詰められる 5角形というとどんなものがあるか見つけてみましょう。

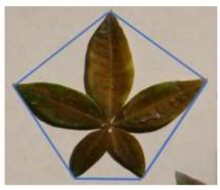
下の葉はどうでしょうか。この5枚の葉からどんな形が思い浮かべられますか？

写真の撮り方から正確な図ではないですが右のような5角形ができます。正5角形ではありませんが、コピーをとって、切り抜き、紙に張り付けてみましょう。

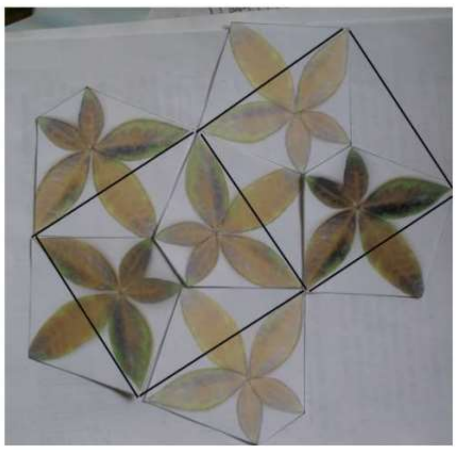


左のように、平面上に敷き詰めることができます。

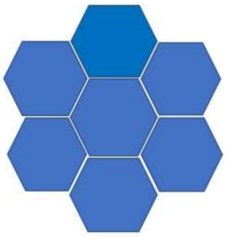
この図を見ていると、次の駅前の歩道で見かける敷詰模様を思い出します。



この形でどうして平面がしきつめられるのでしょうか？



この葉の両腕のところを直線で引いてみると、左の図のように正方形ができるのが見えてきます。

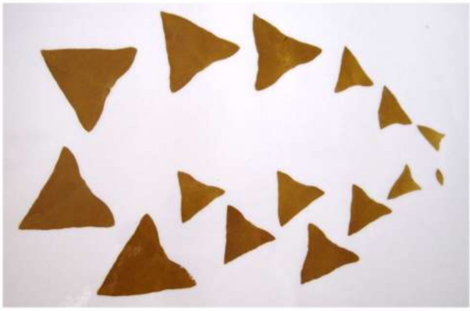


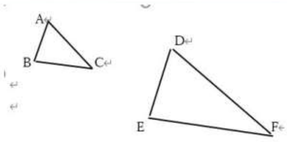
正三角形、正方形、正六角形の3種の正多角形は、左の正六角形のように平面を隙間なく敷き詰めることができる。しかし、正5角形などはどうしてもすき間が空いてしまうけれど、この葉が採用している特別な5角形は、平面を前ページのようにすきまなくしきつめることができる。この葉はこの数学を知っているのでしょうか。

第7話　草花たちの相似―曲線図形の相似とは？

1　直線図形で作る相似

一つの枝から複雑な形をした同じ形の葉が数多く出ているものを見かける時があります。よく見ると少しづつ違っていますが、葉たちはどれも大きさは大小あるけれど皆同じ形となるように成長しようとしているようです。大きさが違うけれど同じ形、学校ではこれを相似図形として学びます。下の葉はどことなく三角形を思い起こします。この葉が作ろうとしている形、三角形で相似図形を考えてみましょう。



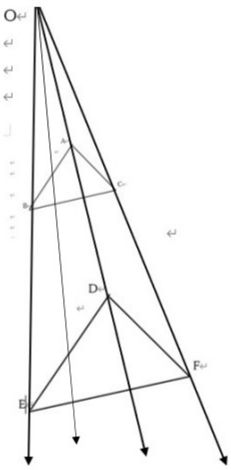


右の△ABC と△DEF で、△ABC と△DEF が相似とは;

∠A＝∠D、∠B＝∠E、∠C＝∠F　で、しかも

AB : DE＝BC : EF＝CA : FD

この関係を、向かい合う角が等しく、向かい合う辺の長さの比が等しい。



という。 向かい合う角、向かい合う辺という言葉は、対応する角、対応する辺という言い方をするときもあります。左の図のように、点Oから頂点A,B,Cに引いて延長すると、頂点 D,E,F を通る関係になっているとも言えます。

この関係から、次のようなこともわかります。△ABC を同じ比で拡大・縮小していくと△DEF に一致するとき、これらの2つの図形は相似図形といえます。 もちろん、この関係は三角形だけでなく、直線で囲まれた多角形（直線図形）についても言えます。植物はそれだけでなく、次のような曲線図形で相似図形を作ろうとしているのです。

2　曲線図形で作る相似

小さくなってくると、微妙に相似関係が破れてくるが、葉たちは、一生懸命、同じ形＝相似図形を作ろうとしていることが見て取れます。

中には、次のページのような複雑な形の相似図形を作ろうとしているものもある。

3 カーブの曲がり具合を測る曲率

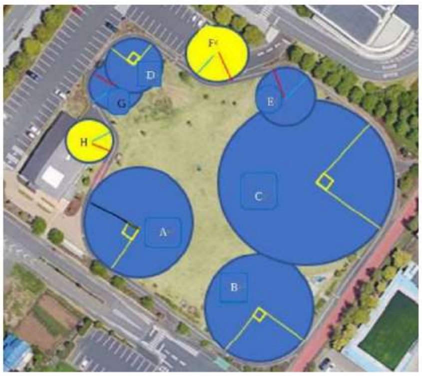
曲線図形の相似を考える時に、一番わかりやすいのが円でしょう。

円であれば、どんなに半径が異なっていても皆一律に拡大・縮小すれば、一方が他方に重なって相似となります。花たちが円が好きなのは、そのためかもしれません。

曲線図形は、直線部分とカーブの部分から出来ている。

カーブの部分は適当な大きさの円を重ねると重ねることができます。この円のことを曲率円、この円の半径のことを曲率半径といいます。これによって緩いカーブなのか、急なカーブなのかを数で表すことができのです。

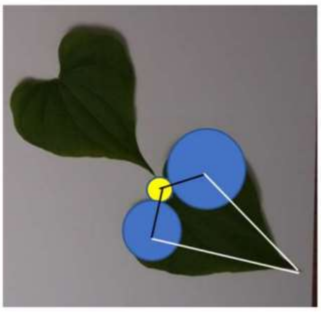
左の図は、ある公園の400mトラックを表している。コースにそってまわりながら競争すると、急なカーブと緩いカーブ、左回りのカーブ、右回りのカーブなどがあります。この曲がり具合を正確にはかるときには、下のように様々な半径を持つ円をカーブにあてはめ、



その半径を求めてみると、そのカーブの曲がり具合が数でされます。

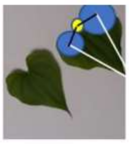
A,B,C,D,E,G は左まわり、F,H は右回りとなっている。

カーブの曲がり具合(曲率という)を曲率円の半径の逆数であらわすことになっています。Cの半径を10とすると、そのカーブの曲率は 1/10＝0.1、 Bの半径を5とすると、このカーブの曲率は、1/5=0.2 となりCよりも急なカーブとなることが分かります。



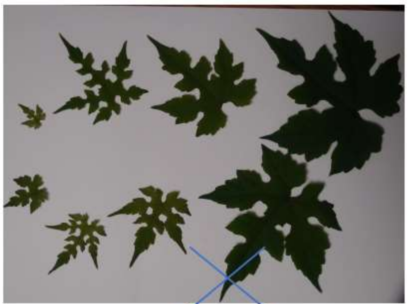
左の2枚のハート形が相似となるときはどんなことが成り立てばよいでしょう。

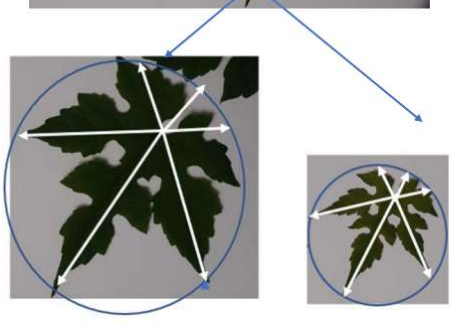
たこ形の2つの直線図形が相似のとき、この直線図形の相似比を求め、3頂点を中心とする3個の円の半径を求めると、大小2種類の円の半径の比と、直線図形の対応する辺の比（相似比）とが同じとなり、これらの2つのハートの形は、小さい方を均等に拡大して大きなハート形に重ねると、ピタと一致することになるので二つは相似な形ということになります。



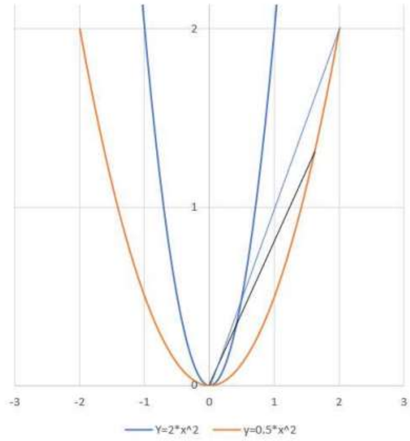
4 葉はどうやって相似な曲線図形を描くのか

こう考えてくると、身近な草花、葉っぱは、何気なく相似な形を作っていると思いがちですが、結構、数学的な知識を駆使して生きているのかと驚きます。どうやって作っているのでしょう。下のような複雑な葉で考えてみましょう。





前に見てきたように草花、葉たちは、円が好きということを知りましたが、これが一つのヒントになっているのではないでしょうか？



円はどれも、相似、その円に内接しながら、同じ角度で葉を伸ばすして成長すると、複雑な形でも、比較的容易に相似形ができることになります。

生物学的な厳密な知識ではありませんが、草花や葉たちを見ていると花や葉たちは、このような数学をうまく利用しているように見えてきます。

5　数学の話題から一言

円はどれも相似になる。それでは、放物線はどうでしょう？

下のグラフは、放物線 $y=2x^2$ と $y=0.5x^2$ のグラフですが、このグラフ相似でしょうか？

相似な図形ならば、原点Oから直線を引き、この2本の放物線と交わった点をA,Bとすると、Oを通るどんな直線でも

OA:AB＝一定　となるはずです。

実際、$y=mx$という直線と、$y=2x^2$、$y=0.5x^2$ との交点 A,B を求めてみます。$y=mx$と$y=2x^2$ との交点Aは、$mx=2x^2$ から、

$x=m/2$、$y=m^2/2$ から、$A(m/2, m^2/2)$ で、$OA=1/2\sqrt{1+m^2}$

交点Bは、$y=mx$と$y=0.5x^2$から、$x=2m$で、$y=2m^2$から、

$B(2m, 2m^2)$で、$OB=2\sqrt{1+m^2}$、したがて、$AB=3/2\sqrt{1+m^2}$

$OA:AB=1/2\sqrt{1+m^2}:\ 3/2\sqrt{1+m^2}\ =1:3$

$y=mx$の傾きがどんなときでも、$Y=mx$と2つの放物線との交点との日は、$OA:OB=1:3$ と 傾きmに関係なく一定なので、

放物線$y=2x^2$ と$y=0.5\ x^2$ の2つの曲線は相似形となっていることが分かります。

第8話　球の表面にどうやって種を垂直に伸ばせるのだろうか

1　球の好きな草花たち

花たちの中には、きれいな球の形を作ろうとしているものが結構ある。そのうちのいくつかを紹介しよう。

地面から伸びた茎の先端が球の中心となりそこから四方八方へ花びらを伸ばしてつくるのだろう。

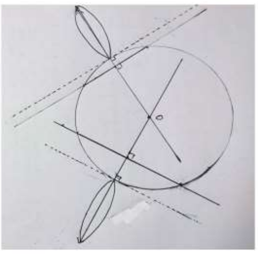
その原理を示しているのが左のようなビルの上からおりて周囲を照らす球状のシャンデリアだろう。

球かどうかもう少し分析的に捉えようとするときは、太陽の光にあててみてその影の形を調べるとよい。斜めに置くと影はいびつにゆがむが、太陽の光に垂直な板(平面)上に移すと球形ならば、完全な円になる。

2　球の表面に種をどうやって垂直に伸ばしているだろ

円形の黄色いたんぽぽの花は中心から等距離に花びらを伸ばし、円形の花を作っている。これらは結構性格だ。これを下のノースポールの花で観測してみよう。

中心から等距離に線を引いてみるとみな同じ長さで円を作っていることがわかる。



平面で考え、タンポポは小さな円の周上にどのような仕組みで種を伸ばし、より大きな円を作ろうとしているのだろうか？

考えてみよう。

実際、中心が分からない円周上に勝手に取った点から、円の中心に向かって直線を引くのは、どうしたらできるだろうか？

円を描き、円に交わる直線を引く、そうして出来た線分の中点を通って、この直線に垂直な直線を引くと、その直線は円の中心を通る。この交わる直線を外側にすこしずつ平行にずらしていって直線が円に接するようにすると、前のページのノースポールの花や図の写真のようになる。

タンポポは、中の小さな円周上の点を選び、円に接する直線を思い浮かべ、それに垂直に花びらを伸ばしていっているのだろうか。

タンポポの花は種ができる頃になると、左の図のように、円形から球の形になる。これは、球の中心から等距離に種の茎をのばしているのだろうか？

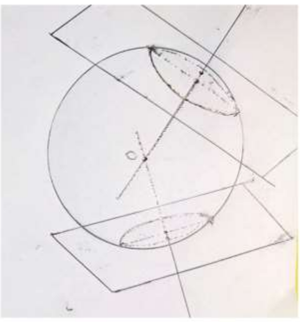
しかし、子どもらが、タンポポをつかみ取って息を吹きかけると、種が四方八方に飛んで、花びらで囲まれていた中心は点でなくより小さな球であることが見えてくる。

そこで、前と同じ疑問がわいてくる。

「タンポポは、小さな球の周上から花びらをどのように出して大きな球を作るのだろうか？」

次は、球面上ではどうなるだろう。球を平面で切ると、左の図のように交わったところに円が出来る。

この円の中心は、平面上の図形でやったように円に交わる直線の垂直二等分線を2つ以上作って交わったところだから、この中心を通ってこの円に垂直な直線をとると、その直線は、球の中心を通る。実際は、平面を平行にずらして接した平面上で行い球に垂直な方向を決



ればよい。実際写真を拡大してみると次のようになる。