草花から学ぶ１０才からの算数・数学

LMSG21 (Learning Mathematics Study Group)
埼玉大学名誉教授

町田彰一郎

は じ め に

もし、何気なく目をやった道ばたの草花、その葉に「おはよう！」という文字が浮き出ていたら皆さんはどう感じますか？　きっと仰天して、「何だこれは！」と叫ぶでしょう。次に、ひょっとしたら、自分はこの草花と話が出来るかも知れないと思うでしょう。こうしたことは何も奇想天外なことではないのです。　信じられない人は、この本を読んでみて下さい。草花とコミュニケーションが出来る。ただしその言葉は日本語ではなく、科学のことば＝算数・数学です。

実は、道ばたの草花たちのあるものは、算数・数学の言葉で私たちに話しかけているとも言えます。算数・数学なんて何も訳に立たないと言わないで、算数・数学の言葉を使って、「花たちが訴えていること」にしばし、耳（目！）を傾けてみて下さい。

この本に書かれていることは、科学的に正しいことを述べようとしているわけではありません。ここでは、算数・数学の言葉を使って、花たちの示している誠実な振る舞いを、俳句のように、自由に感じとってみることにします。この本を読んだ小中高校・大学生の中から、将来、こうした草花の振る舞いをＤＮＡの解読の中から科学的に解明しようとする専門家が出てくるかも知れません。きっとそのときは、ここに書かれている数学よりもずっと難しい数学を使うことになるでしょう。草花たちは、そうした数学を法則化してあの小さな身体の中に持っているといえるでしょう。もちろん、おなじ日本人でも人様々で、一通りにこれが日本人の顔ということは出来ません。それぞれ個性があります。草花もそうです。一つ一つ違っています。一律にこれは正三角形、これは六角形、ということはできないのですが、ここではあえて一つに絞ってみます。

身近な草花たちは、身体全体で表現しながら算数から数学へ、具体物から抽象の世界へ誘ってくれるでしょう。私たちは、この本を通じて草花たちとコミュニケーションしながら算数・数学の見方・考え方を草花から学ぶことにします。ここでは、小中学校から高校、大学までの算数・数学がでてきます。しかし、面倒な計算や難しい理論は展開しません。わからない言葉が出ても草花と話ができることを目指す英語のように算数・数学に慣れてください。

町田彰一郎

草花から学ぶ１０才からの算数・数学

目　　　次

第１話　偶数の好きな葉、奇数の好きな葉

１　上から何番目、みんなで何枚？

数は順番を数えるときと、多さを数えるときがある。

ここでは葉の数を数えてみよう。葉たちの言いたいことは？

この葉を数えると自然に

上から

１，２，３，４，５　枚

もっと多い葉も、

上から、

１，２，３，４，５，６，７，８，

９，１０，１１，１２，１３枚

（あ）　「葉の多さ」に興味を持つ人は次のように数えるだろう。

１	＝１枚
１＋１	＝２枚
１＋１＋１	＝３枚
１＋１＋１＋１	＝４枚
１＋１＋１＋１＋１	＝５枚

この葉を見て、「順番」に興味を持つ人は、次のように言うだろう。

（い）　上から１番目、２番目、３番目、４番目、５番目

上から５番目の葉っぱまでの枚数は５枚だ。

２　偶数；２，４，６，８，，，，

まわりを見わたすと、もっと個性的な葉もある。これはどうやって数えたらよいのだろう。　２，４，６，８

２	＝２枚
２＋２	＝４枚
２＋２＋２	＝６枚
２＋２＋２＋２	＝８枚

もっとはっきり自己主張している葉もあります。下の葉です。これは、２枚、１８０°回転して、２枚増え２＋２＝４枚、さらに１８０°回転して、２枚増え４＋２＝２×３＝６枚となっています。

下に行くほど葉が大きく
向かい合いながら
日当たり良くし
２，４，６，８，，，
と増えていっています。

３　奇数；　１，３，５，７，，，

今度は、このような形で葉を出す葉のことです。どう数える？

１	＝１
１＋２	＝３
１＋２＋２	＝５
１＋２＋２＋２	＝７
１＋２＋２＋２＋２	＝９
１＋２＋２＋２＋２＋２	＝１１

どんな草木でもそれにあった葉の数え方ができる必要があります。

左の２つの枝の葉の数はそれぞれ何枚だろうか？

大きい方は、

１＋２＋２＋２＋２＋２＋２＝１３枚

小さい方は、

１＋２＋２＋２＝７枚

これは、最初に１枚あって、後は左右対称に並んでいるね。

このような数を奇数という。

奇数の奇という字は、奇妙なという意味だけれど。これはヨーロッパの国々の人の捉え方で、日本では、まとめ役が最初に一人いて、後はみな平等な力をもっている人の集まりということで、良い意味に使われているね。たとえば、　７才，５才，３才の祝いをする“しち、ご、さん”　　これは、自然界にもある。

下の葉は春のもみじの葉、春になって、葉が枝ごとに少しづつ伸びてきている。どのようにふえてきているか調べてみると！

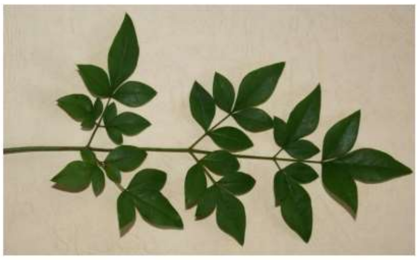
３枚の葉、５枚の葉、７枚の葉

偶数の葉はない！

紅葉は奇数が好きな葉のようだ。

４　３の倍数を作ろうとする葉

次のようなステレオスペルマムという葉もあります。



葉が３枚づつまとまって生えています。

中には、葉が２枚の所もありますが、

さらに成長すれば、１枚が３枚になり隣の枝のように３＋１×２から３＋３×２＝９枚になっていくのでしょう。

さらに、下の写真の枝をみてみると、

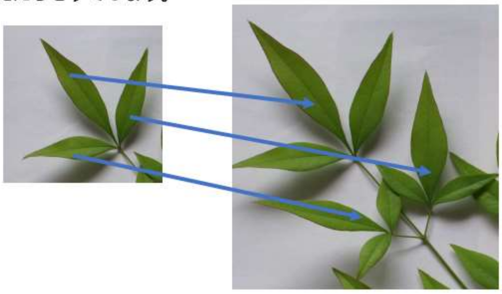
葉は３＋３×２＝３×（１＋２）＝３×３＝９枚で終わらずに、

３＋３×２＋３×２＝３×（１＋２＋２）＝３×５＝１５枚となっています。ひょっとしたら、さらに伸びて、３×２＝６枚増え、

３＋３×２＋３×２＋３×２＝３×（１＋２＋２＋２）＝３×７＝２１　となるのかもしれません。

これは、奇数の１＋２＋２＋・・・のそれぞれが、３倍され、この葉は奇数が好きだけれど、３の倍数が好きな葉と言えるかもしれません。

しかし、ここから次のようなことも空想できます。この葉は３を単位としてできているので、１枚の葉は実は３枚の葉を塊として作られ、下の葉は次の段階になると、左下のようになると考えたらどうでしょう。



３枚の葉が右上の葉のように、３＋３×２となって、後はこれを単位に増えていくことになります。

生き物はそれぞれの環境の中で個性的に生きているので、葉も一見すると勝手気ままに成長しているようにみえます。しかし、その奥になんらかの決まりにしたがって成長しているようです。いままでの３が（３＋３×２）に代わって増えると考え、考えを進めてみましょう。すると、

下の第１世代、第２世代、第３世代､､､のように葉を育てているように見えます。

第１世代　１＋１×２＝３枚

第２世代　３＋3×２＝3×３＝９枚

第３世代

第３世代は、第１世代の葉１枚が、３＋３×２＝９枚に代わり、

（３＋３×２）＋（３＋3×２）×２＝９×３＝２７枚　となります。

第４世代は、下図のようになるでしょう。

第１世代の葉は　　１＋1×２＝３枚

第２世代までの葉は　　３＋３×２＝3^2＝９枚

第３世代までの葉は　　９＋９×２＝９×３＝3^3＝２７枚

第４世代までの葉は　　２７＋２７×２＝２７×３＝3^4＝８１枚

ステレオスペルマムは複雑な葉の伸び方をしているけれど、最初の１枚から始まって、上下、左右に対称に伸び、奇数でも３の倍数を大切にしている葉だということが分かります。また、上のような見方ができれば、３の累乗｛3、3×３＝3^2, 3×3×３＝3^3, 3×３×3×３＝3^4,､､｝の仕組みが見えてきます。

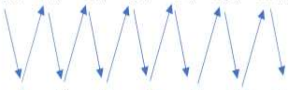
５　算数・数学の立場から一言

１，２，３，４，５，６，７，８，９，１０，１１，１２,､､

から偶数、奇数の関係を見てみましょう。上の数に０を加えて

0､1, 2, 3, 4､5､6､､､､という数は2組に分けてみると

0、 2、 4、 6、 8、 10、 12、、、



1、 3、 5、 7、 9、 11、 13、、、

偶数と奇数が交互に出てきます。どこでやめるかによって偶数になったり奇数になったりします。割り算ができれば、□÷2で余りが1なら奇数、割り切れれば偶数となります。

問 137は偶数？、奇数？

137÷2＝68あまり1 で137は奇数

ここまでしなくとも、137の最後の数が1, 3, 5, 7, 9ならば、奇数

なぜかというと、137＝100＋30＋7 100と30は必ず2で割り切れるので、最後の7で偶数、奇数をきめればよい。

774などのように、最後の数が、0, 2, 4, 6, 8, ならば、偶数となる。

700＋70＋4で700も70も2で割り切れるから4だけで決める。

第２話 正三角形を作りたがる草たち

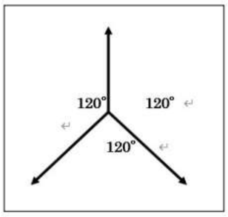
道ばたのシロツメクサ、何か正三角形を作っているように見える。

シロツメクサよりもっとはっきりと自己主張している、ティントベール

で考えてみましょう。算数の教科書では、三角形は３本の直線でできる形となっていますが、ここでは、平面上に３個の点があるとき、それらを３本の線分で結んで出来る図形とします。このとき、３個の点を頂点、３本の線分を辺と呼びます。

１ ティントベールはどうやって正三角形を作っている？

よく見ると、同じ大きさと同じ形（合同な形）をした３枚の葉がそれぞれ、３方向に分かれ（３６０÷３＝１２０度）伸びているのが分かります。



３枚の内の一枚の葉をよく調べてみましょう。

葉の根元から緑の液が図１のようにでて、一定の量が出たら消えていきます。どんなしくみで流れていくでしょう。

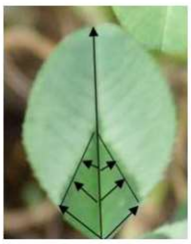


図１

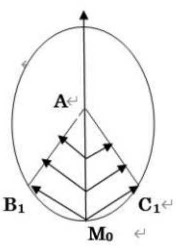


図２

図2を拡大して調べてみましょう。図1の葉の濃い緑の部分がこの図では、四角形 $AB_1M_0C_1$ となります。M_0 から濃い緑の液がでて、左右対称に60°傾いて別れ、M_0B_1, M_0C_1 まで進んで同じ量だけ液を使って消えます。

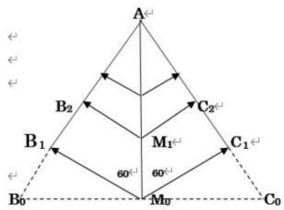


図３

このことを、ここでは M_0B_1 と M_0C_1 は同じ距離ということで、

$M_0B_1＝M_0C_1$ ①

と書きます。

もし、M_0 からそのまま、まっすぐ上って頂点 A まで行き緑の液が消えたとすると、$AM_0＝M_0B_1＋M_0C_1$ となります。

このことから、AM_0 は $M_0B_1(＝M_0C_1)$ の2倍

式で書けば、 $AM_0＝2M_0B_1＝2M_0C_1$

したがって、 △AM_0B_1 において、$AM_0:B_1M_0＝2:1$ ②

さらに、別の道をえらんだ緑の液はどうなるでしょう。

たとえば、M_0M_1 まで行ってからそれぞれ60° 曲がり、左右対称の道

M_1B_2、M_1C_2を通って消えたとします。

同じ量の液を使っているので、式でかくと、

$M_0M_1+M_1B_2=M_0M_1+M_1C_2$

したがって、$M_1B_2=M_1C_2$

このことから、 $\triangle AM_1B_2$において、$AM_1:B_2M_1=2:1$ ③

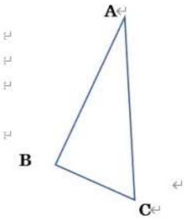
これは、M_1より上に登ったM_2, M_3, , , ,でも同じことが言えるでしょう。

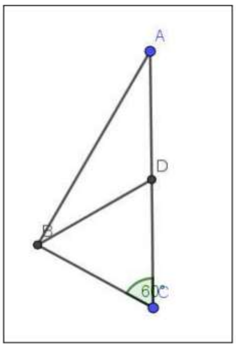
2 数学の話題から一言

△ABC で、∠C=60°

AC : BC = 2 : 1

のとき、∠B は直角となる。





なぜならば、

辺 AC の真ん中の点(中点)をとり D とすると、AC:BC=2:1 から、AD=DC=BC ①

△BCD において、∠BCD=60° ②

そこで、 △BCD に着目すると、

‘ ①、②から、△BCD は正三角形

なぜなら、①から、△CBD は二等辺三角形で、②から、

∠B＝∠D＝(180－60) / 2＝60 ③

となり、頂角はすべて 60°

△BCD が正三角形ならば、当然、BD=BC=CD ④

ここで△DAB に着目すると、DA=DB から、△DAB は二等辺三角形

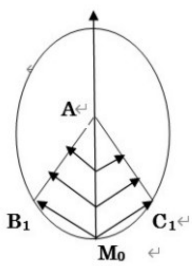
から、 ∠DAB＝∠DBA で、この2つの角の外角は 60° から、

∠DBA=30° したがって、

∠CBA=∠CBD＋∠DBA＝60° ＋ 30° ＝ 90° となる。

3 上の性質をティントベールの葉に当てはめてみよう

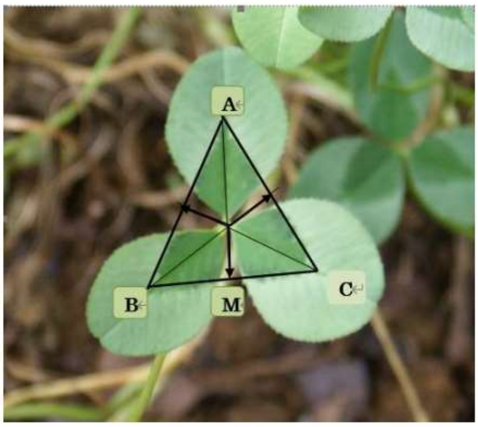
M_0の場所から流れていった濃い緑の液は、$\triangle AM_0B_1$が正三角形のちょうど半分の形を作って消えていくことが見て取れるでしょう。



左右対称なM_0C_1Aまで考えると、これも同じなので、$\angle B_1AC_1$は60° となっています。

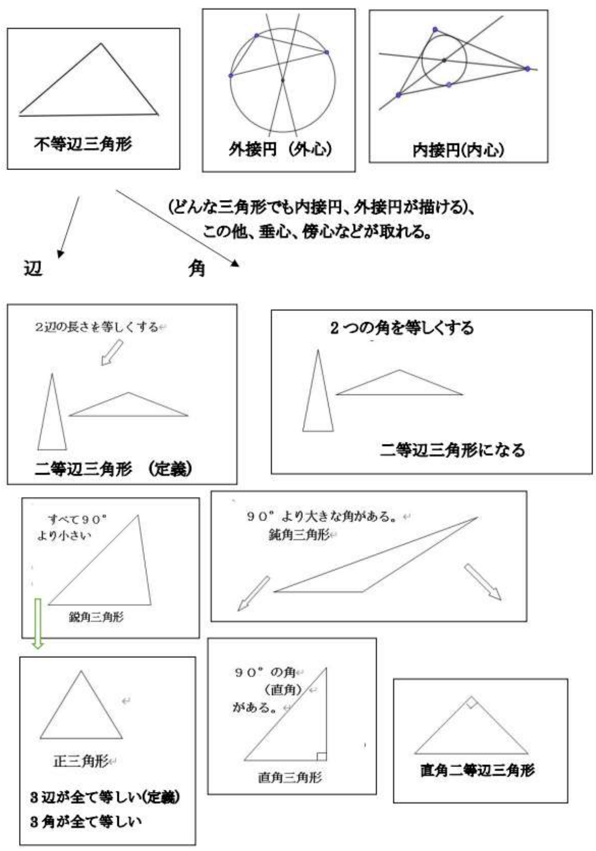
このことは、M_1,M_2, , , ,と上がっていっても、形は小さくなっていくけれど同じ形（相似な形）になっていて、濃い緑の液が正三角形の一部を塗り固めていることが理解できるでしょう。

これを120° ずつ回転して集めて作ったものが、次のティントベールが作った正三角形となります。



植物も数学を実践に役立てているのですね。草花たちが使っていそうな三角形の性質を整理しておきましょう。

4 三角形の分類整理



第3話　花はどうやって正方形やひし形を作っているか

1 花々から学ぶ正方形の描き方

学校では四角形は、4つの直線(線分)で囲まれた形として学びます。

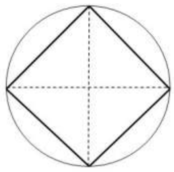
学年が進むと、まず4つの点を取って、それを結んで描きます。

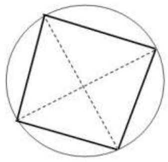
花はどのような性質に着目して形を作っているでしょう。

左の大根の花は正方形を作っているように見えますが、これは、対角線が直角になるように花びらを伸ばして正方形を作っているようです。

下の白いドクダミの花も、赤いペンタスという花も、4枚の花びらがそれぞれ直角(直交して)に交わって、同じ距離だけ進んで正方形を作っているように見ます。

この花たちが正方形を描くときは、「まず、円を描いて、中心を通り垂直で長さが等しい2本の直線を引けばよい」　と教えてくれているようです。（ビワの花）





2 ひしの葉からひし形を学ぶ

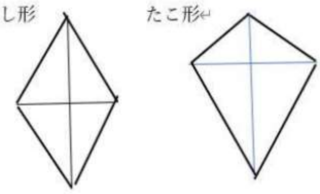
ひし形とはどのような図形かわかりますか？　下の写真が埼玉県の羽生水郷公園にある沼地に育っている菱の葉です。

ひし形というのは、この植物から取られた形です。正方形のように4つの辺がすべて等しい、ですし、対角線が互いに直角に交わっていますが、向かい合う角が正方形のように直角ではありません。

向かい合う角は等しいのですが、直角ではないのです。

平行四辺形の仲間ですが、4つの辺がすべて等しいという特徴をもっています。間違いやすい図形が、たこ形です。

風に舞うたこ(カイト)の形をたこ形といいます。左右対称で対角線が直角に交わっていますが、向かい合う辺の長さは等しくありませんので、平行四辺形の仲間でもありません。



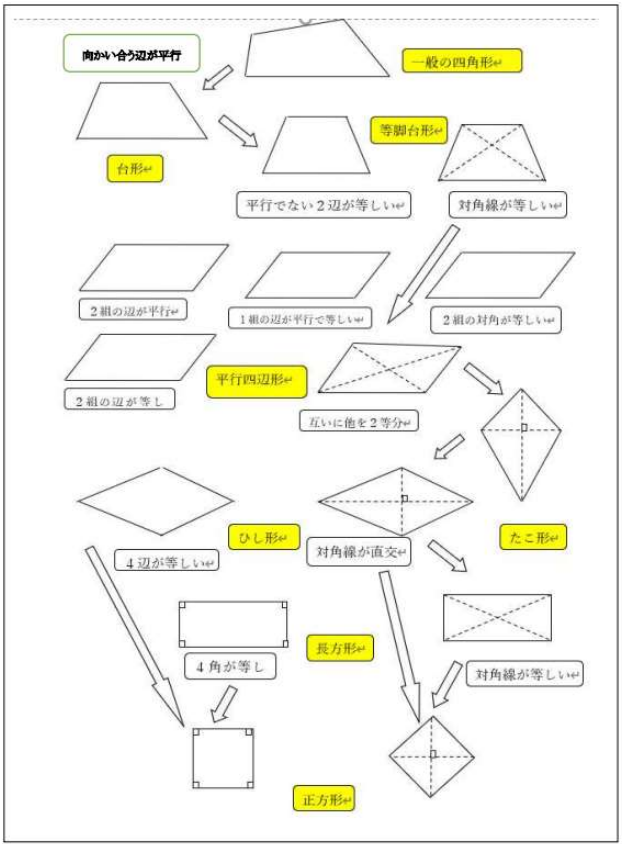
植物のひしの葉は、下の写真のように水に浮かぶひし形です。

図形の特徴を表わす言葉としては、次のようなものがあります。

平行、垂直；　対角線；　隣り合う辺、　向かい合う辺
隣り合う角、向かい合う角；　角の大きさ、　辺の長さ

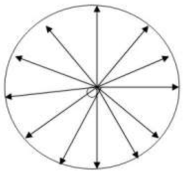
次ページに四角形の相互関係を図で表しておきます。上の言葉をいろいろに使って四角形のそれぞれの関係を説明してみましょう。

四角形の分類



第4話　線対称できちんとしたい草花たち

みなさんは、円をどうやって描くでしょうか？　コンパスを使う！そう手が使える人はコンパスを使えればいいですね。しかし、植物はコンパスを使えません。どうやって描いているのでしょう。



一つ考えられるのは、観覧車のように、中心から四方八方に等しい距離に進み点をつけていけば円ができることが分かります。それだけでしょうか。

花や草の姿を観察して、この仕組みを考えてみましょう。

1　線対称な形、120°ずつ回転する形の葉

木の葉や草花は、葉や花びらをいつも同じ数にして、花や葉の形を自分らしく見せようとしているようです。どうやって作っているのでしょうか。

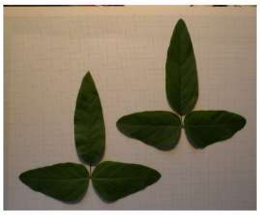
3枚の葉で見てみましょう。たとえば下のクローバー、中心から3方向に

円を3等分するように作っている。

ハート形の葉が精いっぱい伸びてこの形になったのでしょう。皆で協力し合えば等分できることを示しているとも言えます。また、紙に写して真ん中から折ると重なります。このような形を線対称な形といいます。クローバは3本の線対称の軸があります。

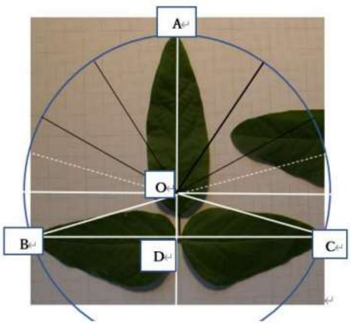
また、別の見方をすると、円の中心のまわりに120°ずつ回転しているとも言えます。120°、240°、360°で元へ戻ります。この意味で、クローバは回転図形とも言えます。

2　線対称な形をもつ葉



この葉も線対称な図形です。対称軸は1本です。右のヨットの形の葉、この他にどんな特徴をもっているでしょうか？次のようにヨットを内に含む円を描いてみましょう。そして、補助線を引いてみます。すると、見えてくることがあります。この垂直に交わる3枚の葉がこの円を3等分しているのです。

下の図のように円の中心 O から3本の半径 OA、OB、OC を引き、扇形 AOB、BOC、COA の面積を求めると、皆同じ面積となり、円の1/3となる。



なぜなら、円の中心 O から AO に垂直に直径をひくと、円は4等分される。そこで円弧 AB と OA,OB で囲まれた図形 OAB と

斜線を引いた部分の面積は皆等しい。どうしてそうなるのか？

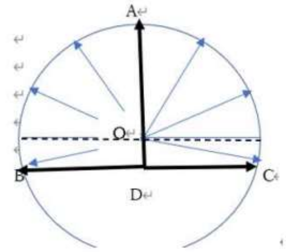
図 A　　図 B　　図 C

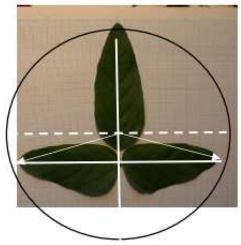
円の中心を通って垂直な2本の線を引くと円は4等分される。

四分円の中心角は90°から、30度づつ分けると、中心のまわりが12等分され、90°のおおぎ形は円の面積の 1/12×3＝1/4。

円弧 AC と OA,OC で囲まれた図形 OCA、さらに下側の円弧 BC と OB,OC で囲まれた図形 OBC の3個の図形はすべて同じ面積となることがわかる。 図形 OAB、OAC、図形 OBC を略して、以下のようにすると、

下の図で2枚の葉が作る線 BC は中心を通る水平線より、ほぼ15度下にずれている。





そこで、四分円の下の部分は、中心角が15°のおうぎ形と∠OBD＝15°の直角三角形 OBD を合わせたもの、この二つは、少し誤差がでるけれども同じ面積と考えると、図形 A,B の面積はそれぞれ、3/12＋1/24×2＝4/12＝1/3 となり、

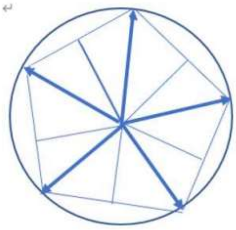
図形 A＝図形 B＝1/3

そこで、図形 C＝1—図形 A—図形 B＝1—1/3—1/3＝1/3

したがって、この葉は面白いことに、対称軸は1本だけれど、見えない

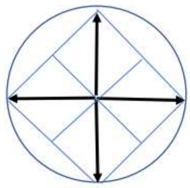
4　円を五等分する花

3枚の花びらを観測してきましたが、5枚の花びらもよく見ます。下の花は円の中心から同じ広がり(面積)になるように花びらが出ています。したがって 360÷5＝72 で、72°ずつ回転して円上に5枚の花びらを作っている5回転図形です。 五枚の花弁が円上に並ぶと、円の内側に正五角形が見えます。 この花も対称軸が5本ある線対称図形です。



左の朝顔などは、まさに円を五等分していることがよくわかります。5枚の花びらというより1枚の花に5本の“すじ”があるといった方がよいかもしれない。

5　偶数の好きな花、あるでしょうか？



ドクダミは４枚の花びら

花びらが、円の中心から、四方へ直角に出ているように見えます。人によっては、陰に正方形の形を見ている人もいるかもしれません。

正方形は、4つの頂角が等しく、4つの辺が等しい図形ですが、等しい対角線が互いに垂直に二等分しながら交わってできる四角形ともなっています。したがって、線対称図形ですが、対称軸は上下左右の2本と、花びらと花びらの間の空間上にある対称軸2本の、計4本の対称軸がある対象図形といえます。もちろん、90°、180°、270°、360°の回転角をもつ回転図形とも言えます。

ドクダミはこのような数学を意識して活用しているのでしょうか。

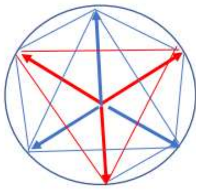
6　もっと大きな数を作る草花はあるかな？

数が多くなると、数を間違えるものも出る。花や葉は中心から放射状に延びるので、図では中心から円周に広がるようにかけばよい。

数えてみましょう！

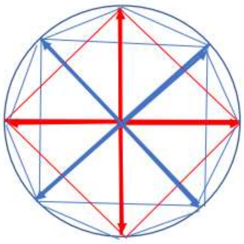
(1)　花はたし算、かけ算や正多角形を知っている？

3＋3＝6、3×2＝6で6枚と計算を知っているよう。



円周上に3頂点を持つ正三角形が180°回転して、正六角形を作っている？

こちらは、4＋4＝8、4×2＝8で8枚



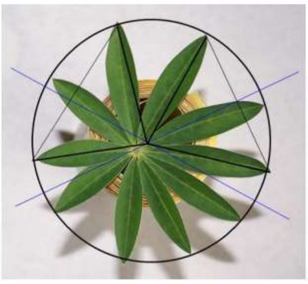
十字の形をした正方形の対角線が2組、45°回転して正8角形を作っている。 この花たちは、こうした算数・数学を理解している？

(2)　中心からずれて円を描く葉―ルピナス

この葉の名前はルピナスといいます。葉の先端が円周上にあるようですが、どうしたら確かめることができるでしょう？

まず、この葉の中心がどこにあるか見つけてみましょう。

もし、葉の先端が円周上にあるなら、2つの先端を結び、その垂直2等分線を引けば円の中心を通ります。 もう一つ別の所にとって、2本の垂直2等分線が交わったところが、この葉がすっぽり入り込む円(内接するという)の中心となります。上の図はこうして描きました。ほぼすべての葉の先端が円周上に来ていることが分かりますね。



ルピナスは数学好きです。

7　もみじの葉も円が好き？

紅葉（もみじ）の葉、一見なんでもないように見えますが、下のように円形の定規(テンプレートという)の上に載せてみると、7角形のように見える葉の先端が同じ円の円周上にあるように見えます。

本当に同一円周上にあるのでしょうか？

もみじを1枚とってきてコピーをし、このもみじを取り囲んでいる円を描いてみましょう。

次のようにしてみました。

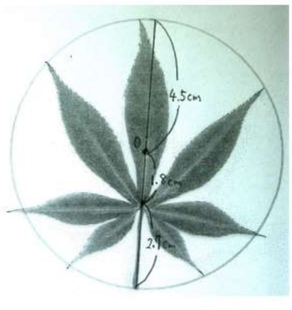
① 茎の長さを測る。

2.7cm

② 茎を延長し円の直径に相当する長さを測ると、 9cm、

そこで、半径 4.5cm

③ これから、中心は茎の根元から 1.8cm の所



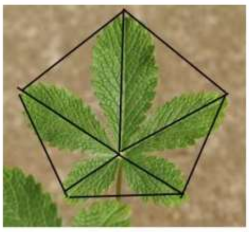
このデータから、円を描くと、前ページの図のようになり、2本を除いて、ほとんどの葉の先端がこの円周上に来ていることが分かります。やっぱり、もみじも円が好きなのだ。

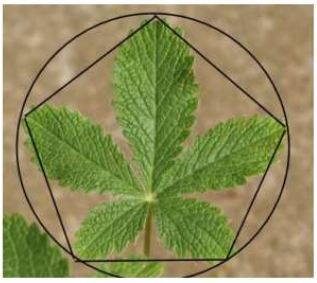
4　これと同じく円が好きな葉はほかにもいる

もみじと同じ7まい葉では、下の「もみじいちご」

円に内接しているが、葉のつけねは、円の中心ではない。
下の方から円周をめざして
長さを調整しながら葉を伸ばしている。

5 枚の葉をもつものもある。たとえ、葉が生える中心が、円の中心になくとも葉の長さを計算しながら数学を使って円周上に葉の先が来るように調整している。





8　円を目指す草花たち

このように見てくると対称軸の多い図形ほど、円に近づいていくのが分かります。円は無数の対称軸を持つ回転図形だと言えるでしょう。

左は沼地に浮かぶ古代蓮です。円の中心に茎がないのに大きな円を描いています。どんな数学を使っているのでしょう。多くの花や葉が円を目指しているのを見ると、それぞれの花や葉を作っている多くの細胞たちがそれぞれの立場で自立・協働しながらよりきれいな、よりたくましく生きようとして、自分たちのあるべき形を目指している姿が見て取れます。