数学教育学会 2021～22年度学会課題 Study Group

Society 5.0に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み

報告書

2023年4月

数学教育学会

2021～22年度学会課題 Study Group

はじめに

2021年，学会課題SG「2030年代を俯瞰した我が国の一般数学教育の在りうべき内容を世に問う」を継承し，学会課題SG「Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み」が発足した。

数学は広範な数理科学の基盤である。さらに，いま，数学の利用が広がり，文理融合の数学カリキュラムが求められている。理系中心の発想で組み立てられた数学科カリキュラムの見直しが必須である。それは，たとえば，線形代数学は統計学の基礎であり，ベクトルの応用範囲は幾何学に限定されない時代への対応である。

そして，何よりも大切なのが，学校数学や受験数学にしか通用しない特殊技能を学ぶのではなく，広く現実世界に適用可能な汎用性のある数学を学ぶものに変えることである。数学の技術的側面はコンピュータが支援してくれる。コンピュータの支援を受けながら，数学を使って新たな分野を開拓していく人の育成が求められている。経済産業省の報告書「数理資本主義の時代 ～数学パワーが世界を変える～」は，「第四次産業革命を主導し、さらにその限界すら超えて先に進むために、どうしても欠かすことのできない科学が、三つある。それは、第一に数学、第二に数学、そして第三に数学である！」と数学の重要性を強調している。数学が使える人を育てて社会の要請に応えなければならない。

そして，Adaptive Learningをはじめとする新たな教育理念，教育手法を取り入れることが求められる。個別技能はコンピュータにまかせればよい時代である。技能の習得よりも概念理解に重点を置いた教育に転換しなければならない。そのとき，重要な示唆を与えるのが，2つのPBL，Problem-based Learning と Project-based Leaning である。PBLの手法が生きる数学科カリキュラムを実現しなければならない。

そして，新たな教育理念，教育手法に長けた教員を育てることも大切な仕事である。

コロナ禍で対面での研究会開催が難しい時期であったため，Zoom利用のオンラインでの活動となったが，月1回のペースでの研究会開催を実現することができた。学会の冬季研究会や，Google Formを利用した会員アンケートを利用して会員の声を聴きながら研究を進めることができた。2023年度からは新たな課題SGに仕事を引き継ぐ。今後ともご支援をお願いしたい。

（2023年3月　課題SG代表　白石和夫）

目次

1　研究のねらい　白石和夫　…………………… ….　1

2　全体まとめ　白石和夫 ……………………………3

3　小学校算数の構想　白石和夫 …………………………… 21

4　中学校数学の構想　白石和夫　………………………… 28

5　高校数学の構想１　白石和夫 …………………………… 53

6　高校数学の構想２　白石和夫 …………………………… 87

7　論点その１　３つの対立軸　白石和夫 …………………………150

8　論点その２　何が子供たちを暗記に走らせるか　白石和夫 …………………………151

9　小学校における教育内容について　丹　洋一 …………………………152

10　中学校におけるICTを取り巻く環境と考察　高山琢磨 …………………………155

11　ICT時代の小・中学校の「数と計算」　町田彰一郎 ………………………157

12　幾何学分野　酒井利訓 …………………………168

13　「Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み」に参加させて戴いて　船倉武夫 …………………………179

14　データの科学　船倉武夫 …………………………181

15　高等学校段階での数学の普遍教育　船倉武夫　………………………204

16　未解決の課題　白石和夫　………………208

2023年04月12日

数学教育学会 学会課題 Study Group

Society 5.0に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み

研究のねらい
2023年4月

白石和夫（課題SG代表，文教大学教育学部）
shiraish@bunkyo.ac.jp

学会課題SG「Society 5.0に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み」は，社会における数学の役割の変化に対応する文理融合の新たな学校数学の構築を目指し研究してきた。

今日的課題

21世紀は数学の世紀である。数学を理解して使える人を育てることが今日的な課題である。

一方，AIの進展により中間層の雇用が失われる労働市場の二極化が進行している。

高等学校では，数学を学ぶことから離れていく数学離れが顕在化している。学力中間層への教育に焦点をあてた改革が必要である。文系・理系の別なく数学が学ばれる社会を作らなければならない。

しかし，近年の学校数学のように内容を狭く限定して集中してドリルを繰り返す教育手法では，考える人を育てることができない。

研究の焦点は学力中間層に対する数学教育

学力中間層の教育には，学習指導要領を頂点として，学校教育の枠に収まらない大きな枠組みによって定まるメカニズムがあり，現場教員の努力だけでそれを変えることは困難である。その枠組みを変えるために，学会の総力を挙げた取り組みが必要である。

実現すべきこと

数学教育は，現代社会の課題を解決する技能を習得した社会人を育成することに焦点化されなければならない。数学教育の教育内容の大規模なアップデートが必須である。

学ぶべき数学は飛躍的に増大している。コンピュータに肩代わりさせることが可能なことはコンピュータにまかせることを前提に，本当に必要な数学を効率よく学べるようにしなければならない。

そこでは，学校数学や受験数学のような狭い世界だけで通用する限定的な技能ではなく，多くの課題に適用可能な，汎用的な技術として数学が学ばれるようにしなければならない。数学は言葉であり，道具である。数学を数理諸科学の記述言語として学び，数理モデル化し，計算で解決する技能を習得させることが重要である。

しかし，道具として使う経験だけで数学を習得することはできない。体系的に学ばなければ習得できないのが数学の難しいところである。歴史的にみれば，戦後の「生活単元学習」は数学を道具として使うことを重視した教育であった。我々が学ぶべきところもある。けれども，使う数学が高度化している今日，道具として使うだけでは数学を学びきれない。だから，「系統学習」が重要になる。

そのためには，数学を使うことを通して新たな概念を習得していくような学び方への転換を図らなければならない。どのような学習系統を用意したら，それが実現するのだろうか。そこでは，学習者が新たな概念を獲得していく過程を考察し，自然な流れの実現が目指されなければならない。

数学を学ぶのにPBLの手法は有用である。2つのPBL(Problem-based Learning とProject-based Learning)が有効に機能するカリキュラムの枠組みを作らなければならない。また，数学を習得するた

めにたどる道筋はひとつとは限らない。Adaptive Learningを視野に入れたカリキュラムを作らなければならない。また，数学の諸概念を学ぶのにコンピュータによる計算やグラフ化が有用である。コンピュータが身近に使える時代に適合した数学科カリキュラムが求められる。

考える人を育てるためには，数学が主体的に学ばれるものとならなければならない。そのためには，数学を学び進める過程で数学を学ぶ意義が感じられるものとなることが不可欠である。今学んでいることがどこでどう使われるのか，見えるものにしなければならない。まず，数学科カリキュラムを先の見えるものに改めることが必要である。そして，他教科との連携を進め，数学科のなかで他教科の内容を扱い，そして，数学で学んだことが他教科の学習に生かされる枠組みの構築も必要となる。

教員養成・教員研修の課題

社会に果たす数学の役割を認識し，中長期的な視野を持ってカリキュラムを作り評価することのできる教員の育成に教員養成・教員研修の主眼が移行されなければならない。

現場の教員はさまざま動機をもって教員を志望し，この業界に入って来る。また，出身母体の学部も教育学部，理学部，工学部など様々である。学習履歴や個性に応じて養成・研修ができる体制を作ることも大きな研究テーマである。

2023年04月22日

数学教育学会 学会課題 Study Group

Society 5.0に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み

全体まとめ
2023年4月

白石和夫（課題SG代表，文教大学教育学部）
shiraish@bunkyo.ac.jp

学会課題SG「Society 5.0に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み」は，社会における数学の役割の変化に対応し，文理融合の新たな学校数学の構築を目指し研究してきた。

1. Society 5.0に対応する学校数学

(1) 21世紀は数学の世紀

21世紀は数学の世紀である。数学を理解して使える人を育てることが現代的な課題である。

2014年，文部科学省は，「数学イノベーション戦略」を発表した[1]。

2016年，日本学術会議 数理科学委員会 数学教育分科会は「初等中等教育における算数・数学教育の改善についての提言」を発表した[2]。

2019年，経済産業省は，「数理資本主義の時代 〜数学パワーが世界を変える〜」という報告書を公開し，「第四次産業革命を主導し、さらにその限界すら超えて先に進むために、どうしても欠かすことのできない科学が、三つある。それは、第一に数学、第二に数学、そして第三に数学である！」と述べている[3]。

英国上院に提出された報告書“The Era of Mathematics”は，数学の重要性を指摘し，特に，数理諸科学間での暗黙知交換の活性化を求めている[4]。

内閣府は，現代社会をSociety 5.0と呼んで，サイバー空間での問題解決が現実空間にフィードバックされる社会であるとしている[5]。サイバー空間における問題解決において，数学を核とする数理科学が重要な役割を担う。

けれども，学校数学は時代の変化に追いついていない。1960年代に始まった数学教育現代化の時代に科学技術の進歩に対応させようと試みられたものの，その試みは後退し現在に至っている。

(2) 教育に求められるものと教育方法の進化

社会が大きく変わる時代である。社会を変える力を持つ人を育てることが求められている。数学教育の主目的は，数学を仕事に使う人を育てることである。また，ICT機器が教育現場に浸透し，教育技術に大きな進歩をもたらしている。数学教育は，ICTの活用を前提とし，多様な教育需要と多様な教育手法に対応するものに進化することが求められる。

経済産業省「「未来の教室」とEdTech研究会」(2019年6月　第2次答申)は，

【１】学びのSTEAM化

　一人ひとり違うワクワクを核に，「知る」と「創る」が循環する文理融合の学びに

【２】学びの自立化・個別最適化

　一人ひとり違う認知特性や学習到達度等をもとに，学び方を選べる学びに

【３】新しい学習基盤づくり

　学習者中心，デジタル・ファースト，社会とシームレスな学校へ

の３つのビジョンを提示している[6]。社会が求めるものを，新たな技術を援用することで実現しよ

うとしている。

内閣府 総合科学技術・イノベーション会議 は,「Society5.0の実現に向けた教育・人材育成に関する政策パッケージ」において,社会構造の変化と教室の中にある多様性を指摘し,教育・人材育成システムの転換を求めている[7]。

(3) 研究のねらい

この研究では,定型パターンの問題に対し素早く正確に対処することが学習の中心となっている現在の学校数学を見直し,数学を理解し使える人を育てる数学教育への道筋を示したい。

まず,数学という教科は難しい問題を解く教科だ,あるいは,数学学習の基本は公式を覚えることだという種類の誤解を解くことから始めたい。数学は道具であり,言葉である。

学ぶべき数学は飛躍的に増大している。コンピュータに肩代わりさせることが可能なことはコンピュータにまかせ,本当に必要な数学を効率よく学べるようにしなければならない。

そして,ICTの利用を前提として,探求学習やPBL,Adaptive Learningなどの教育手法が有効に機能するカリキュラムを実現することを目指したい。

2. 取り組むべき課題

(1) 数理諸科学の基盤としての数学

学校数学の核となるべきことは,数理諸科学を支える基盤しての数学である。数学は現象記述の言葉としての機能を果たしている。現象を数学の言葉で記述することで,計算問題に転嫁し,具体的な解決策を得ることもできる。

しかし,現代化以後の数学教育の改革は,他教科の数学離れを招いた。対数やベクトル,微積分など他教科とのかかわりにおいて重要な意味を持つ内容の学習時期を調整し,STEMの枠組みのなかで数学を学ぶ体制を作らなければならない。たとえば,少し古くなるけれども,日本化学会の提言[9]や細谷治夫氏の論説[10]がある。しかし,数学科は化学会の要望を無視し続けてきた。

(2) コンピュータとのかかわり

もう一つの重要な柱は,数学の用いられ方が変化した時代への対応である。特に,数学を,コンピュータで計算することを前提として学ぶものに改めることが不可欠である。

一方,コンピュータを手許に置いて数学を学ぶことが当たり前の時代になった。数学を学ぶための手段としても,グラフ化やコンピュータによる数値実験などは有用なものである。また,複雑な数式の計算もコンピュータが代行してくれる。計算の実行をコンピュータに委ねることで,論理構成と現実世界への応用に数学学習を焦点化することが可能となる。アルゴリズムとして実行可能なことが分かったら,以後,計算はコンピュータに代行させる方針でいいと思う。

ここで重要な視点は,コンピュータを使って仕事をするために数学が必要なことである。たとえば,経済産業省の報告書「数理資本主義の時代」は,人工知能研究を推し進めるために不可欠な科学が数学だといっていることを思い返してほしい。

(3) 数学を学ぶ意義のわかる数学教育（先の見える学習）

経済産業省未来人材会議[8]などが言及しているように,日本でも,AIが中間層から仕事を奪う労働市場の両極化が始まろうとしている。数学教育においては,中間層に焦点をあてた取り組みが必要となる。焦点は,数学を学ぶことから離れ,文系志望へと転じていた層への数学教育である。数学を学ぶ過程で数学を学ぶ意義がわかるものに改めることが必要である。

そのため,基礎技能を細かく分割して技能の習熟を目指すカリキュラムを廃し,ICTの使用を前

提として，数学を記述言葉として使うことから始め，その後，徐々に深化させていく学び方（先の見える学び方）に変えていくことを目指したい。そして，学校数学全体を探求活動の結果として学べる体系に改めたい。

(4) 文理融合の数学教育

焦眉の急は文系志望者のための数学教育である。しかし，文系志望の生徒に文系向きの数学に絞って教えようとしても，それは容易なことではない。我々が目指すのは，文系数学を含むすべての数学を見通しのよいものに再構成し，幅広いニーズに対応できる数学が学ばれるようにすることである。

文系数学には，高度過ぎて理屈を理解させるのが困難なことがある。そのとき取られる方略が「使って覚える」ことである。しかし，その方略で新しい知識を学び続けることは難しい。

文系数学は，抽象的で捉えにくく，難解なことが多い。けれども，それらの数学に物理的意味，幾何学的な意味を与えることで学びやすくなることがある。幾何学や物理学を学ぶことを通して数学の基礎概念に習熟させることが可能となる。現実に多くの文系数学が物理学由来で形成されている。さらには，広範な数理科学で使われる数学を知ることが，目的に合う数学を探し，また，（必要であれば）新たな数学を作る源泉となる。

(5) 創造的思考力と自立思考

知識基盤社会となり，経済活動の中心が物の生産から知識の生産へと移行し，人が働くことの意味が変わってしまった。労働市場の二極化が大きな社会問題になってきている。

過去の数学教育は，定型パターンの問題を正確に素早く処理する人を育てることで，仕事の大半が定型業務であった時代の人材育成に貢献していたかも知れない。しかし，現代社会にそのような人材は求められない。今，求められるのは，創造的思考力の育成である。そこには，たとえば，断片的な知識を再構成して新たな技術を生む出すこと，数理科学の異なる分野で用いられる手法を援用して新たな手法を生み出すことなども含まれる。それは，数学をただのマニュアルとして学んでいたのでは実現できない。

しかし，今，現実に起こっていることは，理解を伴わない暗記学習である。意味が分からなくても，ドリルを繰り返すことで見かけ上はできるようになる。現在の学力中間層は，定型的な問題のドリル反復で学力が確保されている。自立思考を促し，独創的な発想を生かせる人を育てることが求められる。

重要なことは，考える人が育つ場として数学教育を整備することである。定理や公式を，見出すもの，作るものとして学ばせなければならない。みずから考えることの重要性を自覚し「理解できないことを受け入れない」学習態度が育つものとすることが肝要である。そのためには，考えて学ぶときに自然であるような流れを実現することが不可欠である。

3. 学校数学の再構築

(1) 数学は科学の言葉

かつて数学は自然科学と不可分の存在であった。しかし，抽象数学の成立によって数学は自立の道を歩むことになった。けれども，学校教育で数学を学ぶ目的の第一は科学の言葉としての数学である。数学を用いることで，多くの自然現象を統一的に理解することができる。

数学は，定義を与えてその定義のもとで成立する定理について考察する学問である。「数学は科学の言葉」という見方を説明すると，どういう定義を採用すると，自然現象を的確に説明し表現できるか，探るのが数学である。数学が自然科学と異なるのは，数学は論理のみに基づいて組み立てら

れた体系だということである。

(2) 計算による問題解決の時代

コンピュータの能力が飛躍的に増大した現代において，アルゴリズムによる問題解決の技法が有用である。限定された問題に対し手早く答えが求まる数学よりも，計算量が多くなるとしても広い範囲の問題に対し適用可能な数理手法の価値が増大している。

(3) 体系的知識の有用性

文理の別を問わず，学ぶべき数学は飛躍的に増大している。それらを個別の知識として学んでいたのでは頭がパンクしてしまう。数学のよいところは，芋づる式の知識体系を持つことである。カリキュラムを上手に設計すれば，少ない道具立てで多くのことを学ばせることが可能になる。

(4) 協働の基盤としての数学的リテラシー

知識基盤社会に生きる上で求められる知識は膨大なものであり，そのすべてを学ぶことは現実的に不可能である。そこで強調されるのが協働である。協働の相棒として人工知能が想定される日の到来も近い。学力中位層に対する数学教育において重視すべきことは，協働を成立させるための共通基盤としての数学的リテラシーである。

4. 数学教育の現状を踏まえて考える

学力中位層の教育を変えるのは容易ではない。学力中位層に考える学習が定着するためにはどういう枠組みを作ったらいいのだろうか。

(1) カリキュラム設計の重要性

現実を直視しなければ無意味な議論に陥る。たとえば，課題学習の重要性を強調しても，それを入試につなげる手法が示されければ絵に描いた餅に終わる。定型的パターンの学習に子供たちが追いやられているのはなぜだろうか。その根源を探り，改めなければ問題は解決しない。

数学教育は複雑な要因がからみあって進化する。しかし，大胆に単純化して述べれば，学習指導要領が定まると，それに合致する受験数学の大枠が定まり，それに対応すべく現実の数学教育が進化する。数学教育の世界は，粘菌のように，自律的に最適化する能力を持っている。だから，結果として得られる数学教育が理想に近づくような枠組みを作ることを考えなければならない。

(2) 現実世界との乖離

数学を生みだす源泉は現実世界にある。多くの人にとって，具体物を通して数学を学び，抽象化はその後という学び方が好ましいであろう。けれども，近年，数学を他教科から孤立したものとして指導する傾向が強まっている。

数学は，人間の脳内で論理に基づいて組み立てられた科学である。その意味で，数学は自然科学ではない。しかし，数学を学ぶ目的は，その論理体系を現実世界の理解や問題解決に役立てることにある。数学のよさは，現実世界から遊離しているところにあるのではなく，現実から離れ論理のみで組み立てられた理論体系で現実世界を説明するところにある。

(3) 広範囲に適用可能な数学

今，求められるのは，決まりきった答が出る問題ではなく，解決策がよくわからない問題に対し答を導き出す能力である。そのための数学の基礎として重要なのは，計算量は多くなるかもしれないけれど広範囲の問題に対し適用可能な数学である。たとえば，初等幾何は特定の問題に対して直観的で見通しの良い解決を与えるが，条件が少し変わっただけでお手上げとなる。

(4) 仕事に数学を使う人を育てる数学教育

多くの人が数学とかかわる仕事をする時代となった。けれども，現在，多くの人が学んでいる数学と，仕事をしていくうえで要求される数学との間には大きな隔たりがある。多くの中学生，高校生が学んでいるのは受験数学という狭い範囲でのみ有効な技法である。

たとえば，2乗に比例する関数（中学校），2次関数（高等学校）という限定された枠のなかで学習を進める過程で，それら関数の特徴をよく捉えた解法で素早く答を求める技法が普及している。けれど，その枠を超えるとまったく役に立たない。

我々が目指すのは，求められる数学と実際に学ばれる数学とのギャップの解消である。たとえば，有理数係数の範囲で因数分解する技能が役立つことは現実には，ほとんど，期待できない。学校数学や受験数学においてしか役にたたない仔細な知識を学ぶ無駄を省き，重要な概念や手法を早期に学ぶカリキュラムを実現したい。

(5) 学力中間層の特徴

数学ができる子は，教科書の通りには理解していない。けれども，学力中間層がその学び方を真似するのは無理である。教科書通りに理解しようとして，難解な記述に挫折し，結果として結論のみを覚える暗記学習に走る。

子供たちにとって，最優先課題は学力向上ではない。勉強に掛ける労力を最小化するのが良い勉強法である。試行錯誤をしてはいけない。数学の勉強とは楽に答えが出る解法を覚えることである。こういう学力中間層の学び方の特徴を把握して改革案を作成しなければならない。

(6) 「勉強は塾」の時代になった

中学生にとって「勉強は塾」の時代になった。建前ばかりの学校の授業では入試を突破できない。入試の出題範囲を的確に把握し，無駄を省いた教育によって学習塾は信頼を勝ち取った。

入学試験は学習指導要領の枠内で出題されるから，入学試験には入試向きの解き方がある。しかし，それを受験生が見つけ出すのは難しい。塾で習った通りに問題を解く学習習慣を身に付けた子供たちが受験競争を勝ち残る。

(7) 考える人が育たないのはなぜ？

子供たちには思い付くのが難しい上手な考え方で数学科カリキュラムを構築し，考えることの無力さを学習させているのが今の学校数学である。

「多様な見方・考え方」を育てる教育が近年のトレンドになっている。授業のなかで多様な考え方を出し合う授業方法が一般的であるけれども，最後には，あらかじめ敷かれたレールに乗る授業となることが多い。その結果，手間はかかるかも知れないけれど，地道に考えていけば正しく目的に到達できるはずの考え方が放棄されてしまう。正しい方針を取ったのに（単純なミス等で）正答にたどり着けなかったとき，自分の考えを捨てて模範解答を覚えようとする中・高生が多い。すべての子が上手なやり方でできるようになる必要はない。本当の意味で，多様な見方・考え方を育てる教育になっていない。

(8) 難解な理屈と暗記を強いるカリキュラム

数学離れは小学校段階から始まっている。算数では，割合の3用法の習得が求められる。それに対応して「きはじ」などの公式が流行っている。その裏には，難解な理屈と結論を急ぐ教育の存在が想定される。

中学1年で球の体積・表面積の公式を学ぶが，その理由を中1生に丁寧に教えると時間がかかる。丁寧に扱えばその過程で学ぶことは多いけれども，それは中学１年には負担が大きすぎる。結果と

して，この単元は公式を丸暗記させることになる。

(9) 学ぶ意義が見えない

高校数学Ⅱでは複素数を学ぶ。数を複素数まで拡張する意義を理解することが目的とされている。しかし，現行数学Ⅱで，数学Ⅱの枠組みを超えることなくそれを理解させることは，事実上，不可能である（たとえば，フィボナッチ型の漸化式の一般項は高校では扱わない）。言われた通りにやるという学び方を身に付けた生徒にとって，複素数の計算は難しい課題ではない。でも，そういう学び方でいいのか？

(10) 暗記科目化した統計分野

統計分野の暗記科目化は顕著である。定義や公式を覚えることではなく，統計にまつわる数理を学ぶものに改める必要がある。

(11) 細切れカリキュラムの弊害

細切れカリキュラムは，計算技能を徹底するのに適している。しかし，何かができるようにするための基礎技能として必要なことを取り出して順序良く学ばせるカリキュラムは，学ぶ者にとって，先が見えないカリキュラムである。

ICT技術の発展により，個に応じた教育が容易にできる時代になった。人によって理解に至るルートが多様であっていいのに，細切れカリキュラムは，あらかじめ定められたルートで学ぶことを強要する。

また，細切れカリキュラムのもとでは探求活動をもとに数学を学ばせるのは容易ではない。たとえば，中学校で現実の問題を扱うと，学習範囲からはみ出てしまうことが多い。

これらの視点は今日的課題として重要なものであるが，細切れカリキュラムの問題点はそれにとどまらない。

ア) 結論のみを覚える学習に誘導している

$y=f(x-p)$のグラフと$y=f(x)$のグラフの関係を知ることは関数の学習で重要な視点であるが，現行数学Ⅰで，$y=a(x-p)^2$ のグラフを$y=ax^2$のグラフを土台にして描くにはどうしたらよいかという視点から考えさせる指導がなされることはほとんどない。なぜかというと，数学Ⅰでは2次関数しか扱わないから，その根拠を深く理解することよりも，単純に結果のみを覚える学習が有効だからである。

現行学習指導要領は，同様な弱点を多く抱えている。たとえば，中学3年で変化の割合を学ぶけれども，関数$y=ax^2$について$x=p$から$x=q$までの変化の割合は$a(p+q)$のことだと覚えたほうが効率よく得点できる。

イ) 不適切な理解に誘導する

学習指導要領で明示された範囲内の問題が的確に処理できることに特化した指導が幅を利かせている。

たとえば，中2で関数の基本は「切片と傾き」と習うから，中3でも，関数を学ぶとき，「切片と傾き」を考えることになる。また，中3で2次関数のグラフは原点を通りy軸に対称であることが徹底的に教え込まれるから，高校で一般の2次関数を学ぶときにもその考えを適用する。

ウ) 無意味な肥大化を招く

たとえば，高校数学Ⅰでは，2次関数を学ぶ。だから，「2次関数の問題」と呼べる問題が数学Ⅰの学習の主要な構成要素となっている。しかし，それらの多くは，そこで足止めして学ぶほどの価値を見出せない問題である。

5.　学習内容の組み立て

(1) 数学が社会に果たす役割

現代社会は「数学の時代」である。現代社会は数学に支えられている。

「数学の時代」の裏にあるのは計算機の存在である。従来は理論的に正しくても計算力が追い付かないために見向きもされなかった考え方が実用になる時代になった。

数学は数理科学の記述言語としての役割を担っている。そして，数学の枠組みで事象を記述することで，コンピュータの計算能力を活用した問題解決への道筋が見えてくる。

特に，直面する問題を数学の言葉で記述することで，問題解決に数学の知識を活用することができる。このとき，数学を利用して問題を解く過程を他者に委ねることも可能である。だから，子供たちに優先して学ばせるべきことは，言葉としての数学が使えるようにすることである。そして，他教科での学習を通して言葉としての数学に習熟させ，計算技能等はその後の学習で学んでいくものとしたい。

統計学の重要性が増大している。確率・統計を理解するための基礎を重点的に整備することが時代の要請である。そして，並行して学ばれる他教科の学習に必要な内容が数学科カリキュラムに組み込まれるように考慮すべきである。

(2) 数学のよさを実感させる

数学には直観でとらえられないものをとらえる力がある。厳密な論理展開で今まで見えなかったことが見えてくることがある。数学を学ぶことで，今まで見えなかったことが見えてくるという経験を積ませることが大切である。

ただし，これは，裏からみると，直観的に明らかなことに対して理屈をこねまわしても数学のよさは理解されないということでもある。むやみに理屈っぽい数学とすることは避けなければならない。

(3) 数学を学んだ成果が実感できること

社会が数学を必要としていることを知らせることは必要であるが，それだけでは足りない。各単元の学習において，学んだことが何であったのかを振り返ったとき，その意義を実感できるものとしなければならない。たとえば，数学を学び続けるためには，基礎体力に相当する文字式の計算力の育成が欠かせない。そのためには，それらの必要性を自覚させることが不可欠である。まず，使うことを優先し，技能としての習熟はその後の学習に委ねるものとすべきである。

(4) 見通しを持って学ぶ

コンピュータの計算に頼る現代社会においては，広い範囲をカバーする数学から学び始め，順次，範囲を狭め，その範囲で適用可能な手法を学ぶ学習戦略を採用することが適切である。たとえば，関数の学習は，整式や分数式が表す関数を対象に考察を進め，その後，1次関数，2次関数，・・・，と範囲を狭めてその特徴や役割を調べ，技能を磨いていく。そして，整式や分数式では表せない種類の関数（指数・対数，三角比）の学習へと発展していく。

全体像が見えるなかで細部を詰めていく学び方は，これから学ぶことが何を目指すのか理解して学び始めることを可能にする。

(5) 系統性

新しい内容を学ぶための基礎となる経験が前の段階で適切に学ばれるように系統を整備することがカリキュラム設計の基本である。たとえば，2次式の平方完成。この技能は随所で生きて来る。

また，2次元の集計表。縦の合計と横の合計を考えることは，多変量の統計を学ぶために不可欠な基礎である。重要なことは，何が求められるかを的確に見極め，系統的に学べるカリキュラムを作ることである。カリキュラムに系統性が求められることは今も昔も変わらない。しかし，系統の軸として求められるものは同じではない。重要なのは概念であって，計算技能ではない。

(6) 暗記不要の体系

数学を学ぶのに暗記は必要なのだろうか。今の数学教育は難解な理屈を掲げ，その結果として暗記を助長している。考えながら学ぶ基本を守りさえすれば暗記不要と確信をもっていえる理論体系に組み直すことを目指さなければならない。自分で確かめたこと以外信じない自立思考が育つようにカリキュラムを構築しなければならない。

重要なことは，数学は理論体系を作る教科だということを理解させることである。教える内容がそれと矛盾するものであってはならない。

(7) 内容の取捨選択

現行の学校数学には，歴史的な経緯を知らなければ，何のために学ぶのか，よくわからない内容が増えてきている。いずれ必要になるから学ぶというのでは学ぶ意義が見えない。それらの学習時期を，本当に必要とされる時期にまで遅らせることで取捨選択が進む。そして，必要性が明らかになってからの学習であれば，現行よりも少ない時間数で学習可能になる。

(8) 道具として使う経験を重ねる

多くの課題に対し適用可能な汎用性の高い道具として微積分と線形代数が選ばれている。その重要性は今後も変わらないであろう。道具として使う経験を重ねることでさまざまな問題の解決に生かせるようになる。さまざまな場面で有用であることを示すカリキュラムを作らなければならない。

(9) 探求活動を通して学ばせる指導系統

ドリルなどの詰め込み学習の先に探究を置くのではなく，探求活動の連続で学校数学全体を学ぶものとしなければならない。目指すのは，探求活動の結果として本質的な要素を抽出し，それを新たな概念として獲得させる学びの枠組みを作ることである。

(10) カリキュラム編成に求めること

以下のことをカリキュラム構成の原理として定めることを求めたい。

指導内容を示すことは，その内容にかかわる技能を集中して学ぶことを求めるものでなく，その内容を道具として使う経験をさせるための枠組みを示すことである。学習内容にかかわる技能の習熟は，以後の学習を通して継続的に指導されるものである。

カリキュラムは，様々な教育手法を許容にするものでなければならない。探求を通した学び方が有効に機能する枠組みを作らなければならない。数学の理論の組み立て方は一通りではない。探求を通して学ぶのに最適なルートは一つではない。

6. 各領域 内容の取捨選択の考え方

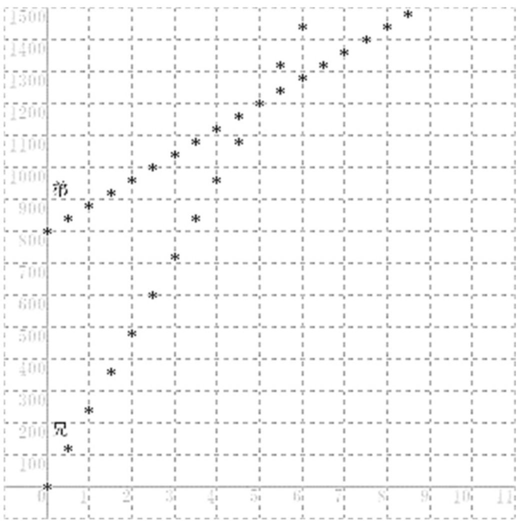
(1) 代数（関数と方程式）

方程式の代数的解法を学ぶのはグラフや数値計算によっておよその解決が可能となった後で十分である。優先して学ぶべきことは，数式（あるいは，数学の言葉）に表す技能である。そのとき重要なことは，現実の事象と具体的な関数との関係である。

整式や分数式で表される関数は，グラフを描くことを通して見通しを持つことができる。たとえ

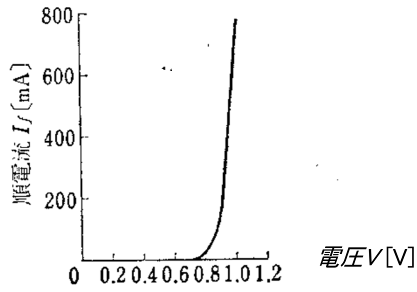
ば，異なる数式が同じグラフを持つことをみれば，式変形で等しいことが示せないか考えるきっかけになる。

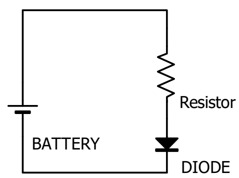
具体例として，「弟が毎分80mの速さで出発した10分後，兄が毎分240mの速さで弟を追いかけたとき，何分後に追いつきますか」という問題を考えてみよう。兄が出発したとき弟はすでに800m進んでいるので，兄が出発したx分後の位置は，弟が$80x+800$(m)，兄が$240x$(m)である。図は，弟と兄のx分後の位置を計算し，グラフに表したものである。このグラフから問題の答えを読み取ることができるばかりでなく，一次関数の性質について学ぶこともできる。



さらに，上述の手法は一次関数に限らず，広い範囲に有効な手法だから，方程式の代数的解法に優先して学ぶ価値を持つ。

たとえば，次の問題を考えてみよう。次図は，ダイオードの電圧−電流特性である。

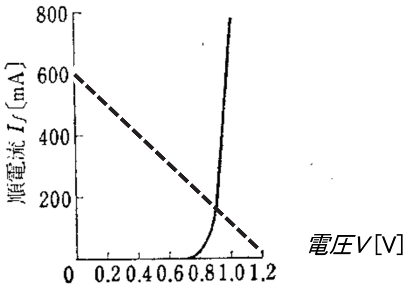




このダイオードに$R\Omega$の抵抗を直列に接続し，e_0Vの電圧を印加したら何Aの電流が流れるであろうか。ダイオードに流れる電流がiであるとき両端の電圧Vが$V=f(i)$で表されるとすると，

$$e_0=iR+f(i) \qquad \therefore\ f(i)=e_0-iR$$

$i=0$(A)のとき$e_0-iR=1.2$(V)，$i=0.6$(A)のとき$e_0-iR=0$(V)なので，$V=e_0-iR$は下図の破線。



この図から，回路に流れる電流とダイオードの端子間電圧が読み取れる。ここではダイオードの電圧−電流特性を図で与えたけれども，このグラフに相当する詳細な数値データがあればコンピュータ上で処理可能である。

(2) データの数学と対数

正の数は，大きな数や小さな数を$a\times10^n$の形に表現すると扱いやすくなる。大きさを表すとき重要な意味を持つのは指数部分のnである。nの部分を小数に拡張してすべての正の数を1×10^xの形に表せば数値の相対的な比較が容易になる。対数は，多くの数理科学において重要な役割を果たし，対数グラフが広く利用されている。

また，データを対数グラフに表すことは，関数関係を知るための有力な手法でもある。

データにみられる関数関係が非線形であることは珍しくない。自然界には，2乗に比例，3乗に比例，$\dfrac{3}{2}$ 乗に比例，(−2)乗に比例など，多くの型が見いだされる。それらを統一的に扱い，また，線形を前提とする数学を適用するためには，あらかじめ対数を用いて線形とみなせる状態に変換しておく必要がある。

(3) 幾何学

我々はコンピュータ上の3Dグラフィックスやカーナビの GPSなど，幾何学の恩恵のなかで生活している。しかし，ここで用いられる幾何学は初等幾何ではない。

コンピュータが普通に使える今日，座標を利用して図形を描くことを通して幾何学を学ぶのは難しいことではない。

計量の基礎として，相似と比例の関係を身に付けることが重要である。相似は，三角形の合同の理論と平行線の性質（平行なら錯角が等しい）から導かれる理論であるが，近年の中学校数学でそれを教える枠組みは破綻している。しかし，その再構築を目指すのは生産的でない。むしろ，小学校で学ぶ縮図（拡大・縮小）を素直に受け継ぐことで学ぶ意義を感じさせる学習とすることができる。1点を中心とする拡大・縮小で平面内のどの2点間の距離も同じ割合で伸縮することを自明なものと認めることで，三角比を利用する計量が可能になる。さらに，三平方の定理を学べば，座標幾何を学ぶ基礎が確立する。三角比は，直交座標と極座標を結びつける働きをする。

解析幾何が探求の道具として有用である一方で，初等幾何は学んだ事実を直観的に把握するのに役立つ。両者を並行して学び，双方の利点が生かされるカリキュラムとしたい。

(4) 線形代数（ベクトルと行列）

近代的な統計学は，線形代数と微積分の基礎の上に成立している。統計学を学ぶ上で，微積分と線形代数を学ぶことが欠かせない。しかし，大学で学ぶような抽象的な線形代数を中高生に学ばせることは難しい。具体的な問題と結びつけてその捉え方のよさを教えていく必要がある。

ベクトルや行列を記述の手段として利用することで幾何学を見通しよく展開することができる。行列の積は回転や裏返しなどの変換の合成を意味する。幾何学を学ぶことを通してベクトルや行列の利用に習熟することができる。

通常の線形代数の枠組みから外れるために見落としがちなのがΣ記号である。線形写像としてのΣの使用に習熟しなければ，たとえば，

分散（偏差の平方の平均）＝2乗の平均−平均の2乗

といった公式の理解が進まない。

線形代数の先には多変数関数の微分（偏微分）がある。機械学習技術の理解のためにも必須の知識であるが，高校でそこまで学ばせるかどうかについては検討が必要だろう。

(5) 数列

離散的な関数としての数列が現象の記述に必要となる。数列の概念と，それを用いた現象の記述法を早期に学ばせる必要があるだろう。

漸化式の役割が変化した時代である。漸化式で問題を表現する技能を習得させることを目標としなければならない。漸化式で定義された数列はコンピュータで計算できる。だから，一般項が求まらなくても漸化式には価値がある。

数列の漸化式の先にあるのは，再帰的な問題解決の手法である。コンピュータによる計算力を生かすためには再帰的問題解決の手法を身に付けなければならない。

(6) 微分・微分方程式

微分は，関数を多項式で近似するとき高次の項を無視して一次近似を考えることである。この思考を早期に習得させたい。

そして，問題を微分方程式で表現することは広範な数理科学において基本的な手法である。学校数学に微分方程式が適切に位置付けられる必要がある。微分方程式を学ぶ目的は，様々な現象を微分方程式で表す技能を習得することである。微分方程式は，離散化して近似することで数値計算が可能である。だから，微分方程式を立てること自体に価値がある。

昔は，微分方程式を学ぶことは解（厳密解）を求めることであった。しかし，初等関数の範囲での解を求めるのは数式処理（コンピュータ代数）にまかせればよい時代となった。微分方程式を学ぶ意義は，数値計算によって近似解が求まることを知ることにある。変数分離法などの微分方程式の解法を学ぶことを目的としてはならない。

たとえば，単振り子の微分方程式について考えてみよう。微小振幅のときにはよく知られた近似解が得られるけれども，少し振幅を大きくしたら振り子の周期はどうなるのだろうか。数値計算によって振幅の違いが周期に及ぼす効果を調べることができる。

微分方程式の学習の中心は「立式」である。それを実現されるためには，物理との融合が不可欠である。その実現のためには，力学を数学の一部として教えている英国の事例を参考とすることも考えなければならない。

(7) 積分

微分方程式も含め，不定積分の求積は数式処理（コンピュータ代数）に頼ることができる。原始関数（不定積分）の計算に習熟することが積分を学ぶ目的ではない時代となった。

積分が使われる場面では，和，すなわち，区分求積の意味での理解が不可欠である。たとえば，統計学では，確率変数の期待値や分散が該当する。物理学に現れる積分の多くは区分求積の意味でないと理解できない。

初等関数の範囲で原始関数が求まらない関数はたくさんあるけれども，定積分はコンピュータを使って近似計算できる。この計算も区分求積を知らなければ理解できない。

(8) 数学学習の基礎

数学学習において，基礎体力に相当するものは，計算力，論理的推論能力，アルゴリズム記述力である。これら基礎力の育成も重要である。

ここで，計算力は公式を利用して式変形を自在に行う能力を意味する。アルゴリズム記述力は，問題解決のアルゴリズムをコンピュータに委ねるとき必要になるものであるが，アルゴリズムの概念の理解と表裏をなすものである。

7. 学習内容の組み立て案（小学校）

(1) 数と計算の使い方を学ぶ

算数では，数や計算，あるいは表やグラフ等を使って何ができるか学ぶことが学習の中心となるであろう。計算のアルゴリズムを学ぶことは必要であるが，それを定型的な筆算の形で実行できるようにすることは不要な時代である。

(2) 直観と論理

近年の算数は妙に理屈っぽい。けれども，必ずしも子供の思考とは一致しない。論理思考は，自分の頭で考えることが出発点である。子供の直観をもとにした論理展開に改めたい。

(3) 計算指導に替わるもの

計算指導に多くの時間を割く必要のない時代となった。数量感覚や空間図形に関する直観を育てることなど，指導すべき内容は多々ある。それらに重点を移すことが可能になる。

(4) 計算の意味

計算の実行は電卓やコンピュータにまかせればよい時代である。算数では，計算の意味理解が目標になる。たとえば，除算（包含除）は，被除数から除数を何回引くことができるかの計算である。だから，2.5を0.7で割った商は3，余りは0.4であるが，大学生でも余りは4だと考える誤解が多い。計算本来の意味が理解されるものに変えなければならない。

(5) 比と比例，割合

一方が2倍，3倍，・・・となると，他方も同じように2倍，3倍，・・・となるという意味での比例の概念を習得させることが出発点となるべきである。比例の概念を一貫したものとする過程で，小数倍，分数倍の概念が生まれる。

比例概念は，2量にとどまらず，3個，4個など多くの量に対しても適用できる。比例するいくつかの量から比の概念が導かれ，全体を１とする割合の理解の根底になる。比の概念は，2量の比較だけではなく，連比に連がるものである。その先には，確率分布の概念がある。

だから，算数の学習範囲で「比の値」を定義する必要性は見いだせない。少なくとも，比が等しいことを比の値で定義することは廃止すべきである。

(6) 負の数

現在，負の数は，中学1年で導入され，加減乗除を一気に学ぶ体制となっている。計算に習熟させることが目的であれば，それはよい方法かもしれないけれども，意味を理解し使えるように教えるためには，小学校から継続的に指導する体制に改める必要がある。

負数は，本来，身近な存在である。たとえば，年間を通した気温の変化を考えるとき，負の数が現れる。負数の初歩に触れることは難しいことではない。

また，平面や空間に座標を設定するとき，全平面，全空間に座標を与えるためには，負数を用いるのが自然である。平面や空間での移動を通して，正負の数の加減算をどう定めるか考えることができる。また，座標の概念のもとで，数の大小を学ぶこともできる。

8. 学習内容の組み立て案（中学校）

(1) 数学の世界を広げる

限定された領域での技能の習熟ではなく，数学を使うための基礎的な概念の習得が目標である。

たとえば，加減乗除だけでは表現できないとしたら，新たな概念を追加し，世界を広げていくことができる。座標概念も直交座標だけではなく，極座標を学べば表現の自由度が広がる。

(2) 負の数の掛け算

負数に自然数を掛けることは累加の意味で定義するのが自然である。そうすると，負数を自然数で割ることの意味を定義することができて，負数に正の分数を掛ける演算が定義できる。

難しいのは，負数を掛ける演算をどう定義するかである。中学校では，この部分に重点をおいて学ぶことにしたい。重要なことは，適切に定義することで便利な道具となることの理解である。

(3) 方程式と関数

数量に関係する問題を数学的な表現に改めれば，たとえば，方程式であれば，多数のxの値に対して，右辺と左辺の値を計算して等しくなるところを探すことで答えを求めることができる。そのとき，グラフに表す考え方は有用であり，xの変化に対する右辺，左辺の値の変化に注目して法則性を見出すことができれば効率的に答えを求めることができる。この活動は，一次関数を考える出発点でもある。だから，一次方程式と一次関数を分離して指導するのは不適切である。

この手法は本質的に重要なものである。この手法は高次方程式にも通用する汎用性がある。しかし，この考えは，方程式と関数を分離して指導する学習からは生まれない。

(4) 2次関数と2次方程式

2次関数は中学校数学の題材になりうる。その場合の鍵は平方完成であって，（2次方程式を解くための）因数分解の技能は必要ない。無論，2次方程式の解の公式も無用である。

(5) 数列

変化の記述に数列や関数の概念が必要になる。たとえば，ウィルス感染症の広がりのシミュレーションで指数関数が重要な意味を持つことが多くの人に認知されるようになった。オーストラリアでは日本の中学校相当段階で指数関数を扱っている。中学生に難しすぎることはない。とりあえず，離散的な場合から中学校に導入することを始めてみてはどうだろうか。

(6) 数値の表現

数値の表現として$a \times 10^n$の形を扱う。その形の数の乗除算を学べば，仮数部を1にして10^xの形で統一する考えが生まれてくる。これは対数であるが，自然科学や工学で利用されている。現行学習指導要領で，水素イオン指数pHは中学3年の学習内容である。理科と並行して学ぶことは理解を深めるうえで有効な方策である。

(7) データの表現

2変数の問題は座標平面上に図示することができる。連立一次方程式ばかりでなく，連立一次不等式の解を座標平面上に図示することもできる。そこから，線形計画法などの応用が可能になる。多変数の問題を平面に図示することはできないけれども，2変数の課題での経験はよりよい見通しを持つのに役立つ。

(8) 確率・統計

数学の良さは，確率分布を考えることから，観測されたデータがどのようなメカニズムで生成されたか推測できることにある。そのことを踏まえてデータの分布（ヒストグラム）の扱いに習熟する必要がある。

確率分布では累積確率が便利なこともある。データの分布でも累積分布は有用である。中央値や

四分位数などが容易に読み取れる。そして，累積分布は積分における不定積分に相当する。

(9) 幾何

拡大・縮小を土台に相似の学習を進めることで，曲線図形に対しても相似の概念が及ぶことが定着するようにしたい。

近年，三平方の定理の導入に2項式の2乗の展開を利用する流儀が一般化しているが，面積を利用して導くこともできるから，2項式の平方の学習を待たず，三平方の定理の早期の導入を目指すことができる。そして，三角比と座標の利用に習熟することを目標としたい。ここで，三角比の定義域は全方向(0°～360°)である。

ある地点から，東に2㎞進み，さらに北から時計回りに20°の方角に向きを変えて1㎞進んだら現在地は元の点からどの方角にあって，どれだけ離れているだろうか。極座標と直交座標の相互変換とともに，座標の加算が必要な問題であり，ベクトル導入への伏線になる。ただし，ベクトル記法そのものを扱うべきかどうかは，別途，検討する必要がある。また，正弦定理や余弦定理などの形で定式化することは高校で学ぶべき内容であろう。

9. 学習内容の組み立て案（高等学校）

(1) 学習順序を変える

学ぶ順序を変えることは数学のよりよい理解のために有効な手段となりうる。たとえば，複素数は，ベクトルや行列を学んだ後で学べばその意味を理解しやすい。

(2) 小科目に分けない

現行課程のように多くの科目に分ける方式は弊害が大きい。たとえば，余弦の加法定理はベクトルの内積から容易に誘導できるけれども，ベクトルの内積と余弦の加法定理が別科目で学ぶことになっていると，この順序で学ばせることができない。多様な学び方を保証するためにも，高等学校普通科で標準的に開設する数学科の科目数を減らし，2科目程度に集約することにしたい。1科目は，高校普通科卒業生の標準的な数学の学習範囲を示すもので，もう1科目は，大学への進学を考えるなど，より高いレベルまで学ぶ生徒のための数学である。ただし，どちらも文理の別なく学ぶ科目である。

(3) 内容の取捨選択

学ぶべき数学が飛躍的に増大する社会を迎えた。多領域の内容を広く浅く学ぶ戦略では多くの人を仕事に使える水準にまで導くことはできない。そこで大胆な取捨選択が必要となる。

内容を選ぶときに重要なことは，それが大学などの高等教育での出発点になることである。それは一律であることのほうが望ましい。多様な要求を満たしながら，その一方で，一つの枠を定める努力が求められる。

(4) 論理を学ぶ

学習意欲が高い層に対しては形式陶冶論もある程度は有効であろう。どの分野の数学を学ぶ場合にも共通する数学の学び方の基礎を作ることを目指さなければならない。たとえば，問題を別な命題に言い換えて解くような手法は，数学的問題解決の本質である。重要なことは，結論が分かっている問題を証明するために論理を使うのではなく，探求の方法論として論理を使うことである。数学学習の第一歩は現実の問題を数学の言葉に翻訳することであるが，それに続く第二歩は数学の問題を別の数学の問題に言い換えることである。このとき，数学が論理的に組み立てられた学問体系であることが有効に機能する。

(5) 学び方と学ぶ内容は大きく変わる

数学学習の要は微積分と線形代数である。その基礎の上に幾何学や統計学が展開される。

数式処理（コンピュータ代数）が普通に使える時代への対応が必要である。微分・積分は何を意味する計算であるのか，その計算をどう使うのかなど，計算をコンピュータに委ねることを前提とすることで微積教育は大きく変わる。

数値計算を前提とすることで，推測統計（推定・検定）の学び方も大きく変わる。2項分布を正規分布で近似する必要はない。数値計算で確率分布を計算することで，$\pm 1.96\sigma$ などの公式を機械的に適用する学習から脱却し，推定・検定の意味に焦点をあてた学習が可能になる。

(6) 複素数は大学で学ぶ

複素数を高校生に学ばせることにどれほどの意義があるのだろうか。

多変量統計解析を学ぶときに現れる共分散行列は対称行列である。実対称行列の固有値はすべて実数であるから，線形代数を学ぶとき固有方程式の虚数解を無視して進んでも支障を生じない。

複素数は，２次元ベクトルのスカラー倍をベクトル×ベクトルの積に拡張して得られる。平面ベクトルでの経験が複素数を使う際の基礎になる。そして，行列を学べば，原点を中心とする拡大・縮小，原点のまわりの回転を学び，さらには，$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$として，$aI+bJ$ の形の行列の全体を扱うことができる。微積分では，正弦，余弦，e^xのマクローリン展開を学ぶことができる。それらは，複素数を学び始めるためのお膳立てとして十分なものである。

無論，上述の順序を踏まえたうえでであれば，複素数を高校で教えることが考えられていいだろう。指数関数e^xを複素数に拡張すれば，2階線形微分方程式の解法を統一的に議論できる世界が広がる。議論すべきことは，そこまでの速さで学べるかどうかである。一律の進度で進むことを是とする日本式の学校教育には，つらい論点である。

10. 他教科との関係（STEMなど）

数学を数理科学の枠組み，言葉として教えることに重点を移すとき，他教科との関係を構築していくことが重要な課題になる。理科や情報科，社会科（公民科）などとの関係をどう築いていけばいいだろうか。

「総合的な学習の時間」や「理数探究」など，複数教科を結び付ける試みが始まっている。けれど，他教科とのつながりが教科の枠外に置かれたままでいいのだろうか。　たとえば，統計の学習を数学科の中だけで完結させることはできない。数学科で学んだ手法を実際に応用する場面が他教科に存在することが必要である。また，物理学は，現在の文系数学，特に，経済系の数学のバックグラウンドとして不可欠な存在である。数学と物理，あるいは数学と理科とが共同歩調を取って教育にあたる環境を実現するにはどうしたらよいのだろうか。

数学の学習に，アルゴリズム記述力が不可欠である。アルゴリズム記述力はどこで学ぶことになるのだろうか。計算は数学科，プログラミングは情報科と分断された現状を変えなければならない。

11. 教員養成と教員研修

(1) 教職の専門性とは

現在の教員養成は，１時限の授業を展開する能力の育成に力点が置かれている。そして，評価も毎回の授業ごとに行うべきものとされている。これが，中期的な視点でみたときに的確な指導法が採用されにくい原因となっている。中期的な，つまり，各学校段階の学習カリキュラムを作り評価

することのできる教員を育てることに教員養成の主眼が移らなければならない。

(2) 意識改革

数学科の教育内容は，ここ何十年もの間，ほとんど変わっていない。数学の学習指導はルーチンワークと化してしまった。変化の大きい他教科に比べ数学は楽な教科と思われている。

しかし，数学を取り巻く社会の変化は大きなものがある。変化に対応できる教員の養成が求められる。とりわけ重要なのが，数学を教えることに対する意識の改革である。学力中間層に自立思考を促す指導が実現されなければならない。小ステップに区切り，ドリルを繰り返すことで学力を確保する時代ではない。

(3) 数学を学ぶ道筋の多様性を理解する

Adaptive Learning など，個に応じた教育への期待が大きい。

数学を学ぶ道筋は必ずしも一本道ではなく，多様な選択が可能である。複数ある道筋から，個に応じた最適な道筋を選ぶことが教職の専門性として重要なものとなる。

諸外国の算数・数学教育を学ぶことは有効な手法となるであろう。日本と異なる道筋で学ぶ教科書の存在を知ることができる。

(4) 数学という教科の本質の理解

数学は概念を明確に定義し，概念間の関係を調べる教科である。定義を変えることによって定理がどう変わるか調べる教科である。抽象数学が有用であるのは，汎用性を持つからである。抽象化することで，理論の論理展開の本質が見えてくる。

STEAMのA，Liberal Artsの視点でみると，現代数学の歴史で重要な視点は，無限を扱う数学が確立したことである。無限は便利な概念である。しかし，有限世界の論理をそのまま適用したら破綻してしまう。無限を上手に定義して，それを扱う論理を確立することで便利な数学が実現した。

しかし，教員志望者の多くは数学という教科の本質の理解が不十分である。反復練習によって問題が解けるようになった経験を後輩たちに伝えるのが教員の仕事だという考え方が支配的である。概念を明確化するためにどう定義を述べたらよいのか，定義を変えると理論がどう変わるかなどの本当の意味での数学的活動を行ってきた経験に乏しい。

既存の数学を点検し，他分野に応用するのに適するように調整していくことで数学の適用範囲が広がっていく時代である。上述の経験は教職志望者にとっても必須である。

(5) 広範な数理科学を学び数学が社会に果たしている役割を知る

数学を学ぶ目的が大きく変わってきた。統計学では，多変量解析などの記述統計の重要性が増している。教科領域で学ぶべき内容の変革が求められる。しかし，代数，幾何，解析，確率・統計，コンピュータの既存5領域の枠組みでは，数学がどのように利用されているか知るのに不十分である。広範な数理科学を学ぶ枠組みが用意される必要がある。

さらに，学校数学，受験数学以外，目にする機会に乏しい教育学部学生や現職教員に対し，現実に数学が使われている実態を知る機会が用意される必要もあるだろう。

(6) 教師の役割の多様化

現在，普通に見られる一斉授業はいずれ廃れていくであろう。経済産業省「「未来の教室」とEdTech研究会-第1次提言」[6] が述べているように，教師の役割が多様化する時代である。

個に応じるカリキュラムを生徒とともに選ぶことも教師の重要な仕事になる。同じ目標に向かうための様々なルートについて知っておかなければならない。そして，多様なカリキュラムを生み出

すことも教師の重要な仕事である。

12. 後記

(1) 時代に追いつく努力を

本稿に述べたことをすべて実現できたとしても，時代の変化に，ほんの少し，追いつくに過ぎない。実践を重ね，より本格的な改善策を見出していかなければならない。しかし，要求される数学の変化も早い。それは急いで実行されなければならない。

人工知能技術の進歩は，数学を学ぶことの意義をさらに大きく変えてしまうであろう。やがて，創造的思考の点で並みの人間は人工知能に勝てない時代が来るかも知れない。そのとき，数学教育は超絶頭脳の育成に最大の力点を置くものに変わるであろう。今，慌てふためいて中間層を伸ばす教育に転換を図ったとしても，右往左往していると，軌道に乗ったころにはそれはもう無駄という時代になっているかも知れない。躊躇している暇はない。

(2) 新たな循環を

我々は，現実世界から切り離された学校数学という美しい世界を構築してきた。特に，閃きで一瞬にして難問を解く爽快さは格別である。そして，その美しさに魅せられた人々が教員となりそれを支える体制が構築されてきた。改革には，「愛する数学が失われる」との抵抗が起こる。また，形式陶冶論も根強い。教員の意識を変え，その体制を変えるのは容易ではない。

しかし，その抵抗を押し切ってでも，数学教育は変わらなければならない。数学は社会に出て仕事に使うために学ぶという教科観のもとで育った次世代の子供たちが成長して次の世代の教育を支える新たな循環を生み出すことを目指したい。

(3) 後記の追加

この文書の完成を目指していたら，ChatGPTという大ニュースが飛び込んできた。ChatGPTは，平気で大嘘もつくけれど，知識豊富な頼れる相棒である。たとえば，「底角が等しい三角形が2等辺三角形である」理由を問うと，2等辺三角形の底角が等しいことの証明を答えてくれる。ChatGPTを使うことは，全世界を相手に協働学習しているようなものである。自分の頭で論理を構築する人にとって，知識の幅を広げていくためのとても便利な道具である。課題は，本当に，自分の頭で考える人を育てているか，問い直すことだろう。

これから，我々の生活はますます人工知能(AI)に支えられていくことになる。しかし，人工知能の背後に数学があることが見えにくい。人工知能技術の習得を願う子供たちも数多く出てくるだろう。そのとき，数学と人工知能技術とのつながりを子供たちが感じとれるものとするためには，何が必要なのだろうか。そして，数学を学んでおくことの大切さをどう教えたらいいのだろうか。

(4) 蛇足（釈迦に説法）

算数・数学科が，計算ができることを目標とする教科であるのなら，授業時数をもっと減らしていい。数学教育が重要であるのは，言葉としての数学は概念形成を伴うものであって，一朝一夕に習得できるものではないからである。

文献

[1] 文部科学省 数学イノベーション委員会 「数学イノベーション戦略について」平成26年8月
https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/gijyutu/gijyutu23/002/houkoku/1352402.htm

[2] 日本学術会議 数理科学委員会 数学教育分科会 「初等中等教育における算数・数学教育の改善についての提言」2016年5月 https://www.scj.go.jp/ja/info/kohyo/pdf/kohyo-23-t228-4.pdf

[3] Engineering and Physical Sciences Research Council (UK) “The Era of Mathematics, An independent review of knowledge exchange in the mathematical sciences.” 2018年1月
https://www.ukri.org/publications/the-era-of-mathematics/

[4] 経済産業省 理数系人材の産業界での活躍に向けた意見交換会 「数理資本主義の時代 ～数学パワーが世界を変える～」2019年3月
https://www.meti.go.jp/shingikai/economy/risukei_jinzai/20190326_report.html

[5] 内閣府「Society 5.0」https://www8.cao.go.jp/cstp/society5_0/index.html

[6] 経済産業省「未来の教室」とEdTech研究会-第1次提言，2018年6月，
https://www.meti.go.jp/report/whitepaper/data/20180628001.html

[7] 内閣府 総合科学技術・イノベーション会議 「Society5.0の実現に向けた教育・人材育成に関する政策パッケージ」https://www8.cao.go.jp/cstp/tyousakai/kyouikujinzai/index.html

[8] 経済産業省未来人材会議 2022年5月（中間まとめ）
https://www.meti.go.jp/shingikai/economy/mirai_jinzai/index.html

[9] 科学教育の学習指導要領作成に関わる関係者への日本化学会からの提言 2007年9月26日
https://www.chemistry.or.jp/news/teigen-edu07.html

[10] 物理学者に期待する―数学教育の改善に向けて― 細矢治夫 大学の物理教育2001年3月号
https://www.jstage.jst.go.jp/article/peu/2001.3/0/2001.3_KJ00005748912/_pdf

小学校算数の構想

白石和夫　2023.03.16

ICT の発達は Adaptive Learning の可能性を広げた。人によって理解に至る経路が異なってよい。それを許容する（多様性を許す）カリキュラムの開発が求められる。Alternative Math と呼べる新たな算数科カリキュラムの開発を目指したい。

算数・数学の暗記科目化が小学校から始まり始めている。考えることを放棄するという意味での「数学離れ」は小学校算数から始まっている。「筋道を立てて考える」とは何だろうか。日本の算数は日常経験から離れた算数独自の世界を作り，小難しい理屈を用意してそれに従うことを求め，自立思考が育たない構造になっている。理屈抜きに覚える算数・数学が流行る理由を突き止め，理屈で考えれば公式の暗記など不要などいうことが理解されるものに改めることが必要である。基礎部分の論理を平易なものに改め，考えればわかるものにしなければならない。とりわけ，割合が使えない大学生を多く生み出している現状を踏まえてその原因を突き止め，対策を考えることが喫緊の課題である。

算数を実験・観察など経験から学ぶ教科に変えよう。経験は以後の学習の基盤になる。

計算は計算機に委ねればよい時代になった。計算技能を学ぶのではなく，数学を言葉として学ぶことに重点を置く。STEM の枠組みの中核として数学を位置付け，現実事象を数学の言葉で記述できるようにする。

考える人を育てることが今日的な重要課題である。公式を覚えることが数学の学習ではないことが理解されるものにしなければならない。PBL(Problem-Based Learning) で学べるように体系を組み替えたい。すなわち，技能の集積として数学を学ぶのではなくて，具体的な問題の解決を通して数学の意味を理解させ，何を目指して数学を学ぶのか，目標を適切に設定する必要がある。

想定する内容をすべて学ばせるためには，既存の内容の大幅な整理が不可欠。それは，手計算から計算機による計算の時代への変化を反映させることでも，ある程度，実現できる。しかし，大幅な改変は，技能の習熟のために学ぶのではなく，概念理解のために学ぶという理念なしでは実現できない。

負の数は小学校から継続指導し，中学校で負数を掛けることの意味を確定して完成させる。比は同値類の意味で導入し，連比も扱う。比の概念を利用して割合を定義する。比の値で比を定義するのを止める。

1　基礎概念を理解しやすいものに

1.1　数

1.1.1　加減乗除（整数）

減法が用いられる場合

小学校学習指導要領　算数第１学年では，

(ア) 加法及び減法の意味について理解し，それらが用いられる場合について知ること。

と規定されている。指導要領に「減法が用いられる場合」と一括して指示されているため，求残，求差が続けて指導されている。しかし，求残が加法の逆算であるのに対し，求

差は2数の比較のために差を用いる方法である。同列には扱えない。他国の教科書を見ると，求差の扱いは一様ではない。2数の比較を考えるところで扱う指導法があってもよい。

掛け算九々

九々の表を作ったら，以後はその表を見ながら学ぶ学び方も選択肢に在ってよい。

九々の表から割り算の答が求まることを理解させたい。

筆算は不要

原理的に計算できることが分かれば，実際の計算は機械にまかせればよい。たとえば，つぎのような処理ができれば十分である。

加法　$25+38=20+5+30+8=20+30+5+8=50+18=68$

減法　$76-48=76-(40+8)=76-40-8=36-8=20+16-8=20+8=28$

☆ $a-(b+c)=a-b-c$

乗法　掛算は加法の累積である。たとえば，

$$
\begin{aligned}
14\times 23 &= 14+14+14+\cdots+14 \\
&= (14+\cdots+14)+(14+\cdots+14)+(14+14+14) \\
&= 14\times 10+14\times 10+14\times 4=140+140+56=336
\end{aligned}
$$

分配法則に繋がる考え方を経験させることが重要。

乗法の交換法則

乗法の交換法則は，長方形状に並べたものの個数をかぞえることから見出される。

除法（包含除）

$a\div b$ の計算

a から b を引く計算を繰り返して q 回引くことができたら，$0\leqq a-b\times q<b$。

q を商，$a-b\times q$ を余りという。

参考　初期のマイコンは，ハードウェアで割算ができないので，この方法で地道に商を求めていた。

除法（等分除）

a を n 等分するのに，それが実現したらその答えを $\square$ として $a=\square\times n$。

包含除の計算で $a\div n$ の計算を実行して割り切れるときその商を q として $a=n\times q$

乗法の交換法則を用いて $n\times q=q\times n$　$\therefore \square=q$

このようにして，等分除の問題を包含除の問題に置き換えて解くのが現行の算数。

a を n 等分することは，$a=x\times n$ となる x を求めることだから掛算の逆算。

現行だと掛算九々の範囲で答を求めることに相当する。

これは，掛算九々の表を大きく広げさせすれば原理的に実行可能。

1.1.2　乗法の意味の拡張

小数倍・分数倍

n を自然数，a を正の数とするとき，n 倍して a になる数を $a \times \dfrac{1}{n}$ で表す。すなわち，

$\left(a \times \dfrac{1}{n}\right) \times n = a$

m, n を自然数とするとき，正の数 a の $\dfrac{m}{n}$ 倍を $a \times \dfrac{m}{n} = \left(a \times \dfrac{1}{n}\right) \times m$ で定める。

このように定めると，たとえば，

$a \times \dfrac{6}{3} = \left(a \times \dfrac{1}{3}\right) \times 6 = \left(a \times \dfrac{1}{3}\right) \times (3 \times 2) = \left\{\left(a \times \dfrac{1}{3}\right) \times 3\right\} \times 2 = a \times 2$

となって自然数倍の積の意味の拡張になっている。

面積・体積

面積・体積は，単位正方形，単位立方体の個数をかぞえている。「長さを掛ける」ように乗法の意味を拡張しているのではない。

乗法の交換法則

小数倍に拡張したときでも交換法則は成立することを説明するのに一番簡単な方法は計算の過程で交換法則が成立する計算（九々）を使っていること。計算指導を省力化するとその手が使いにくくなる。縦横が小数の長方形の面積で説明するのがいいのではないだろうか。

1.1.3　除法の意味

割算の筆算のために包含除を置いておく必要はない（包含除それ自体の存在意義はある）。

除法を，余りを考える割算と余りを考えない割算に分類する。

余りを考えない割算を乗法の逆算として教える（除数を小数，分数に拡張後）。

余りを考える割算

a を b で割った商が q，余りが r であるとは，

$a = b \times q + r$，q は整数，$0 \leqq r < b$

この割算は，掛算を加法の累加の意味にとどめる範囲での乗法の逆算（被乗数は小数・分数でもよいが乗数は整数）。

☆世の中には，商を小数第 n 位まで求める割算を考える人がいる。その種の割算は算数では扱わないことにしよう（その先の数学でも無用）。

余りを考えない割算

$a \div b$ は，b を掛けると a になる数，すなわち，$\square \times b = a$ となる $\square$。

$\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d}$ は，$\square \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$ となる $\square$ を求めればよい。

$\dfrac{d}{c} \times \dfrac{c}{d} = 1$ であることを利用すると，$\dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$

だから，$\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$

□ $\times a = 1$ となる□を a の逆数という。
割り算は割る数の逆数を掛ければよい。

1.2　比と比例

比が等しいことの意味

２数 a, b に対し，$a : b$ を**比**といい，a を前項，b を後項という。
前項と後項に同じ数を掛けて得られる比は等しい。
たとえば，$a : b = 2 \times a : 2 \times b = 3 \times a : 3 \times b = \cdots\cdots$
この比の定義は，2 量が同種の量であるか異種の量であるかを問わない。
たとえば，酢と油の量について，
100ml : 100g ＝ 200ml : 200g ＝ ……
100ml : 80ml ＝ 200ml : 160g ＝ ……
計測単位が異なる２量（たとえば，一方で cm でもう一方が寸）にも適用できる。たとえば，
1.8m : 2 寸＝ 90cm : 1 寸
☆　酢，油どちらも体積のときは同種の量，酢を体積，油を重さで計測するときは，異種の量？。それとも，酢と油は同じ単位で計測しても異種の量?，それとも，計測単位が異なっても液体は同種の量？

小数倍と分数倍

n を自然数とするとするとき，$a : b = na : nb$ である。$na : nb$ の側から見て $a : b$ が同じ比であるというためには，乗数を分数に拡張する必要がある。すなわち，$a : b = \frac{1}{n}a : \frac{1}{n}b$。
その結果として，必然的に，$a : b = \frac{m}{n}a : \frac{m}{n}b$ でもある。

比例

いろいろな値をとって変わる数量を表す文字を変数という。
2 つの変数 x, y は，$x : y$ がいつでも同じであるように変化するとき，x と y は**比例**するという。
例　一定の速さで走る車の走行時間と走行距離は比例している。
例題　1 時間に 40km で走る車が 60km 走るのに要する時間を求める。
　1 時間 : 40km ＝ x 時間 : 60km　となる x を求める。
60km は 40km の 1.5 倍なので，x 時間は 1 時間の 1.5 倍，すなわち，
　1 時間に 40km で走る車が 60km 走るのに要する時間は 1.5 時間。

単位量当たり

同じ比を与える同値類のうち，一方が 1 のときを考える。
例　60km 走るのに 1.5 時間かかるとき，前項，後項を 1.5 で割って
60km : 1.5h ＝ 40km : 1h
1 時間だと 40km 走る。ただし，走行距離と時間は比例するものと仮定。
さらに，後項を 1h で割って 1 にする。

60km : 1.5h = 40km/h : 1

1時間あたりの走行距離（速さ）を求めておくと,（距離）＝（速さ）×（時間）の計算で時間から距離を求めることができる。

連比

３つ以上の項を持つ比を連比という。

各項に同じ数を掛けて得られる連比は等しい。すなわち,

$a : b : c = a \times 2 : b \times 2 : c \times 2 = a \times 3 : b \times 3 : c \times 3 = \cdots\cdots$

例題　酢，油，塩を混ぜてサラダドレッシングを作るとき，それらが同じ比であるとき同じ味になる。　酢 400ml, 油 500ml，塩 1g と同じ味のドレッシングを作る。酢 1000ml のとき，油，塩をどれくらい用いたらよいか。

☆関数 $y = f(x)$ の枠組みで考えるかぎりは $\frac{y}{x} =$ 一定を比の定義にして支障ない。けれども，相似な三角形の 3 辺の長さの比や，空間ベクトルの向きなど，連比として捉えないと認識しずらい事柄もある。たとえば，相似な三角形では対応する辺どうしの長さの比が等しいことから，三角形の 3 辺の長さの比の概念が生まれる。3 辺の長さの比の概念が形成されないと，正弦定理を $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ と捉えることができない。

1.2.1　割合

全体に占める割合

水	食塩	計
$475g$	$25g$	$500g$
95	5	100

合計が 100 %となるようにする。500g を 100 にするためのは，5g で割ればよい。

水，食塩も同様に 5g で割る。その結果，全体に占める食塩の重量比は 5% とわかる。

除算を利用する比較（割合）

2 量を比較するのに，差で比較する，商（割合）で比較する，方法がある。

割合で比較するとは,

2 量 a, b に対し $a : b = \frac{a}{b} : 1$ なので，$\frac{a}{b}$ を後者を基準とする（基にする）ときの前者の割合という。

例　男子が 40 人，女子が 20 人いるとき，男子の人数は女子の人数の 2 倍，このことを，女子 1 人あたりの男子の人数は 2 人であるという。また，女子の人数は男子の人数の 0.5 倍，このことを男子 1 人あたりの女子の人数は 0.5 人であるという。

☆　割合の背後に比例関係はない。意味的には等分除（a を b 等分する）の拡張。

けれども，同値な比（比の値ではない）を先行して学び，比の扱いに習熟した後に比に擬態して割合を学ぶことで割合が学びやすくなることが期待できる。

参考　シンガポールの算数

5 年 Ratio → Rate → Percentage

6 年 Ratio and Fraction　→ Ratio and Proportion　→ Percentage → Speed

国定カリキュラム改定で多少の前後はあるけれど，Ratio を初めに学ぶことは一貫している。

Singapore Method を標榜する英国向け教科書では比を比の値で定義しているのに，シンガポール国内では比の値で比を定義することをしていない。
参考　「学ぼう！算数」（西村和雄，岡部恒治　編著，数研出版）
　3 年で比を扱う。比の定義は，前項と後項に同じ数を掛けて得られる比は等しい。

2　内容の充実

2.1　図形

概念の包摂関係（集合）

ファンヒーレ (van Hiele) の学習水準理論で第 2 水準にあたる指導を充実させる。

水準	対象	方法	
0	具体物	図形	形の弁別を行い，名前を付ける
1	図形	性質	それぞれの図形の性質を知る
2	性質	命題	図形の性質相互の関係。図形の包摂関係などを含む
3	命題	論理	論証幾何
4	論理		幾何の公理系の役割を知る

正三角形は 2 等辺三角形の一種であり，長方形は平行四辺形の一種であり，長方形は台形の一種でもある。平行四辺形でも台形でもある四角形は何と呼ばれるかなど，ベン図を書いて説明する。

中学校からの移行

「精選」,「厳選」ではいずれ必要なくなる計算技能ではなく，算数の使い道，算数の見方の部分が削減された。その多くは新時代に生きる者にとって必須の能力である。
また，図形を操作する経験は直観を育てるために必要なことである。昔から中学校の内容とされる内容であっても中学校からの移行を検討したい。

2.1.1　平面図形

定規コンパスによる作図

角の 2 等分線，垂直 2 等分線，垂線を描く。
線対称に気づかせる。

線対称

2 等辺三角形の底角は等しい ⋯ 頂角の 2 等分線で折り返すと重なる。
☆　逆命題「底角が等しい三角形は 2 等辺」は底辺の垂直 2 等分線で折り返すと証明できるが難解かも。

垂直 2 等分線

垂直 2 等分線の性質を利用して，円の中心を作図で求める。

2.1.2　空間図形

空間図形に関する直観は幼少期に養われる。適切な時期に適切な活動が行われるように。

投影図

立体図形をさまざまな角度から見る。

立体の展開図

表面積を求めることを含む

円錐の展開？　扇形の中心角

錐体の体積

実験的な方法で推測する。水で置換，あるいは，目方（重さ）。

2.2　日常に現れる算数・数学

等差数列・等比数列　次々に同じ数を加える，同じ数を掛ける。

数列の規則を調べるために，階差を調べる，比を調べるなどの視点を持つ。

倍々ゲームなどの数列の変化についての感覚を養う。

負の数

負の数は気温など日常的に用いられる数である。その扱いについて経験を積むことが可能。

たとえば，逆方向を表すのに負数を用い，正方向，負方向に移動したときの座標がどうなるかの経験を積ませる。

標本調査

標本から全体を推計する（以前は算数の内容）。割合が同じという仮定から推計する。

中学校数学の構想

白石和夫　　2023.04.11

計算は計算機に委ねればよい時代になった。計算技能を学ぶのではなく，数学を言葉として学ぶことに重点を置く。STEM の枠組みの一角（中核）として数学を位置付け，現実事象を数学の枠組みのなかで記述できるようにする。

計算機による問題解決の時代の幾何学は座標を主体に学ぶものになる。中学校数学の焦点は座標幾何への移行である。ベクトルに繋がる考え方程度までは学ばせたい。

考える人を養成することが今日的な重要課題である。公式を覚えることが数学の学習ではないことが理解されるものにしなければならない。

コンピュータによる数値計算は，法則性を探るのに有効な手段である。コンピュータを使って問題を解決するために数学を使う一方で，数学を学ぶのにもコンピュータを利用する時代である。そして，コンピュータ上で動作するソフトウェアの背後にある数理を理解させることも数学教育の役割である。

伝統的な学校数学の枠組みを脱却し，現実の問題を扱うのに適した数学とする。

PBL で学べるように体系を組み替えたい。すなわち，技能の集積として数学を学ぶのではなくて，具体的な問題の解決を通して新たな数学の概念を抽出し，それを活用することが数学の学習であるように変える。何を目指して数学を学ぶのか，目標を適切に設定する必要がある。

想定する内容をすべて学ばせるためには，既存の数学の大幅な整理が不可欠。それは，手計算から計算機による計算の時代への変化を反映させることでも，ある程度，実現できる。しかし，大幅な改変は，技能の習熟のために学ぶのではなく，概念理解のために学ぶという理念なしでは実現できない。

計算技能は一時に集中的に学ぶのではなく，使いながら（複数学年にまたがって）習熟を図るものと考えている。ただし，ここでいう計算技能は，主として文字式の運用技能のことである。

Adaptive Learning が実質的に意味を持つカリキュラムとしなければならない。中学校入学時から卒業までのカリキュラムは個々の生徒によって学ぶ順序が異なることが許容されなければならない。だから，どの学年で何を学ぶかは限定すべきではない。

数学は定義から何がいえるか調べる教科である。定義を覚えることが目的となるような科目構成をしてはならない。重要なことは，定義の有用性が理解できるものとすることである。

以下に示す内容には，小学校で学ぶべきと考える内容も含む。たとえば，比と比例，負数の加減は，小学校で学ぶ内容と想定している。

1　数と式

1.1　数の演算

1.1.1　正の数の演算

数の加法（和）

いくつかの数に対し，それらの和を，それらを「＋」の記号で繋げて書く。数の和は，加える順番に拠らない。

だから，数の加法には，結合法則，交換法則が成立する。また，逆に，結合法則と交換法則から任意個の数の和について，数の和は加える順番に拠らないことがいえる。

数の分解と数の減法

正の数 a と正の数 b に対し，$b \leqq a$ のとき，$a = b + c$ の形に表すことができる。この c を $a - b$ で表す。

乗法（自然数倍）

n を自然数とする。数 a の n 個の和 $a + a + a + \cdots + a$ を $a \times n$ で表し，a の n 倍という。

乗法の性質　$a \times (m + n) = a \times m + a \times n$　　　$a \times (m \times n) = (a \times m) \times n$

特に　　　$a \times (n + 1) = a \times n + a$

積は，乗数が 1 増えると a だけ増え，乗数が 1 減ると a だけ減る。

分数

n を自然数とするとき，n 倍して 1 になる数を $\dfrac{1}{n}$ で表す。すなわち，$\dfrac{1}{n} \times n = 1$。

m, n を自然数とするとき，$\dfrac{1}{n}$ の m 倍を $\dfrac{m}{n}$ で表す。すなわち，$\dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{n} \times m$。

乗法の意味の拡張（分数倍）

n を自然数，a を正の数とするとき，n 倍して a になる数を $a \times \dfrac{1}{n}$ で表す。すなわち，$\left(a \times \dfrac{1}{n}\right) \times n = a$

m, n を自然数とするとき，正の数 a の $\dfrac{m}{n}$ 倍を $a \times \dfrac{m}{n} = \left(a \times \dfrac{1}{n}\right) \times m$ で定める。

このように定めると，たとえば，

$$a \times \frac{6}{3} = \left(a \times \frac{1}{3}\right) \times 6 = \left(a \times \frac{1}{3}\right) \times (3 \times 2) = \left\{\left(a \times \frac{1}{3}\right) \times 3\right\} \times 2 = a \times 2$$

となって自然数倍の積の意味の拡張になっている。

累乗

n を自然数とするとき，a の n 個の積 $a \times a \times a \times \cdots \times a$ を a^n で表す。

例　$5 \times 5 \times 5 = 5^3$　　　$a \times a \times a \times a = a^4$

a^n において，a を**底**（てい），n を**指数**という。

累乗は，乗除より優先順位が高い。

例　ab^n は，$a(b^n)$ を意味する。

除法（商を整数にする除法）

a, b を正の数とする。

a から b を最大 n 回取り去ることができると，$0 \leqq a - nb < b$

$a - nb$ を r と置くと，$a = nb + r, 0 \leqq r < b$

n を a を b で割った商，r を a を b で割った余りという。

除法（掛け算の逆演算）

割算は掛算の逆演算。すなわち，$a \div b$ は b を掛けると a になる数。

a に掛けると 1 になる数を a の逆数という。

a の逆数を a^{-1} で表すと，$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

b の逆数 b^{-1} を利用すると，$a \div b = ab^{-1}$

なぜなら，$(ab^{-1})b = ab^{-1}b = a \times 1 = a$

☆ 実際に教科書を作るとき，a の逆数を a^{-1} と書くことは意図していない。

$\sqrt{\quad}$（ルート）

$x^2 = a$ となる x を $\sqrt{a}$ で表す。

例　1 辺の長さが 1cm の正方形の対角線の長さは $\sqrt{2}$cm。（面積を考える）

1.2　比と比例

比が等しいことの意味

２数 a, b に対し，$a : b$ を**比**といい，a を前項，b を後項という。

前項と後項に同じ数を掛けて得られる比は等しい。

たとえば，$a : b = 2 \times a : 2 \times b = 3 \times a : 3 \times b = \cdots\cdots$

比例

いろいろな値をとって変わる数量を表す文字を変数という。

2 つの変数 x, y は，$x : y$ がいつでも同じであるように変化するとき，x と y は**比例**するという。

例　一定の速さで走る車の走行時間と走行距離は比例している。

例題　1 時間に 40km で走る車が 60km 走るのに要する時間を求める。

　1 時間 : 40km ＝ x 時間 : 60km　となる x を求める。

60km は 40km の 1.5 倍なので，x 時間は 1 時間の 1.5 倍，すなわち，

　1 時間に 40km で走る車が 60km 走るのに要する時間は 1.5 時間。

比例のグラフ

x と y が**比例**するとき，それをグラフに表すと x, y が表す点は一直線上に並ぶ。

逆に，グラフ上で x, y が表す点が原点を通る直線上にあるとき，x と y は**比例している**。

x と y が**比例**するとき，$x = 1$ のとき $y = a$ であれば，$y = ax$ と表せる。

x と y が**比例**するとき，$x = x_1, x_2, x_3, \cdots$ に対し，$y = y_1, y_2, y_3, \cdots$ であるとすると，$\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{y_3}{x_3} = \cdots$

内項の積と外項の積

$a:b=c:d$ のとき，$c=ka, d=kb$ とすると，$k=\dfrac{c}{a}=\dfrac{d}{b}$ なので $ad=bc$。

Note.

伝統的な数学では，比の値を根拠にして $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ から $ad=bc$ を導く。

けれど，$y=ax$ のとき，$x:y$ の比の値は $\frac{x}{y}=\frac{1}{a}$ である。比の値を持ち出して無用な混乱を招くことは避けたい。

連比

３つ以上の項を持つ比を連比という。

各項に同じ数を掛けて得られる連比は等しい。すなわち，

$a:b:c=a\times 2:b\times 2:c\times 2=a\times 3:b\times 3:c\times 3=\cdots\cdots$

例題　酢，油，塩を混ぜてサラダドレッシングを作るとき，それらが同じ比であるとき同じ味になる。　酢 400ml, 油 500ml，塩 1g と同じ味のドレッシングを作る。酢 1000ml のとき，油，塩をどれくらい用いたらよいか。

☆相似な三角形の 3 辺の長さの比や，空間ベクトルの向きなど，連比として捉えないと認識しずらい事柄もある。たとえば，相似な三角形では対応する辺どうしの長さの比が等しいことから，三角形の 3 辺の長さの比の概念が生まれる。3 辺の長さの比の概念が形成されないと，正弦定理を $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ と捉えることができない。

1.3　文字式

数を文字で表すときの表記に関する約束を学ぶ。

文字

数学では，一つの数を一つの文字で表す。同じ文字は同じ数を表す。

積

文字と文字，数と文字と積は掛け算の記号「×」を省いて書く。

例　$a\times b\times c$ を abc で表す。

　　$23\times a$ を $23a$ で表す。

注意　数が先頭にあるときにかぎり数に続く「×」を省く。数が先頭にないときは「×」を省かない。

例　$a\times 23$ を $a23$ とは書かない。

括弧で括られた文字式の積も掛け算の記号「×」を省いて書く。

例　$(a+1)\times(a+2)$ を $(a+1)(a+2)$ で表す。

　　$23\times(a+1)$ を $23(a+1)$ で表す。

文字あるいは文字式と数の積は，数を先頭に書いて乗算記号を省く。

例　$ab\times 12$ は $12ab$ と書く。

代入

文字を具体的な数や別の文字式で置き換えることを**代入**という。

代入するときには乗算記号「×」や括弧（）を補うことが必要な場合がある。

例 abc の b に 25 を代入する。

$b = 25$ のとき，$abc = a \times 25 \times c$

例　abc の b に $a + 2$ を代入する。

$b = a + 2$ のとき，$abc = a \times (a + 2) \times c$

商

除法 $A \div B$ を $\dfrac{A}{B}$ で表す。除算を分数の形に書くとき，分子，分母を計算した後に除算を実行する。たとえば，$\dfrac{1+3}{2+3} = (1+3) \div (2+3)$，$\dfrac{1}{ab} = 1 \div (ab)$。

1.4　数と演算

1.4.1　負の数

負の数

正の数 a に対し，加法に関する逆元（足すと 0 になる数）がただ一つ存在する。それを $-a$ で表す。すなわち，

$$a + (-a) = 0。$$

$\square + a = 0$ となる $\square$ は $-a$ 以外にはない。

負の数は，つぎのような場面で利用される。

金銭勘定において，借入金を表す。

数直線上の座標として反対方向を表す。

数直線の応用として，温度，水位などを表すのに用いられる。

整数

0 および自然数 $1, 2, 3, \cdots$，負の数 $-1, -2, -3, \cdots$ を**整数**とよぶ。

負の数と負の数の和

負の数を含む体系においても，数の和の法則は保たれることを仮定する。

負の数 $-a$，$-b$ の和は $-(a + b)$ である。なぜなら $(a + b) + \{(-a) + (-b)\} = 0$ だから。

（ここで，逆元が一意的に定まることが根拠になっている … わかりにくさの原因）

正の数と負の数の和

正の数 a と負の数 $-b$ の和。

$a > b$ のとき，$a = b + c$ と表すと，$a + (-b) = b + c + (-b) = c$

$c = a - b$ だから，$a + (-b) = a - b$

$a < b$ のとき，$b = a + c$ と表すと，$a + (-b) = a + \{-(a + c)\} = a + \{(-a) + (-c)\} = -c$

$c = b - a$ だから，$a + (-b) = -(b - a)$

例　$5 + (-3) = 2 + 3 + (-3) = 2$

$5 + (-8) = 5 + \{(-5) + (-3)\} = -3$

負の数 $-a$ に対し，もとになる正の数 a を $-a$ の**絶対値**という。また，正の数 a を $+a$ と書いて，絶対値の前に書かれる $+$ または $-$ をその数の**符号**という。正の数または 0 に対し，その絶対値はその数自身を表すものとする。

絶対値の語を用いて正の数と負の数の和を表すと，その絶対値は，大きい方の数の絶対値から小さい方の数の絶対値を引いた差で，符号は，絶対値が大きい方の数の符号と同じ。

正の数，負の数の減法

a, b を数とするとき，b に加えると a になる数を $a-b$ で表す。

b を正の数とする。

$a-b=a+(-b)$　なぜなら，$b+\{a+(-b)\}=a$ だから。

$a-(-b)=a+b$　なぜなら，$(-b)+(a+b)=a$ だから。

負の数 $-a$ に対し $-(-a)=a$ と定める。

すると，a, b が正の数であるか負の数であるかにかかわらず，

$a-b=a+(-b)$

すなわち，引き算は，符号を反転させた数を加える加算で表せる。

1.4.2　負の数の乗法

負の数の n 倍（n は自然数）

n を自然数とする。数 a の n 個の和 $a+a+a+\cdots+a$ を na で表す。

負の数 $-a$ の自然数倍は，

$2\times(-a)=(-a)+(-a)=-2a$

$3\times(-a)=(-a)+(-a)+(-a)=-2a+(-a)=-3a$

$\cdots\cdots\cdots$

$n\times(-a)=(-a)+(-a)+(-a)+\cdots+(-a)=-na$

負の数の分数倍

n を自然数とするとき，n 倍して a になる数を $a\times\dfrac{1}{n}$ で表す。すなわち，$\left(a\times\dfrac{1}{n}\right)\times n=a$

m, n を自然数とするとき，a の $\dfrac{m}{n}$ 倍を $a\times\dfrac{m}{n}=\left(a\times\dfrac{1}{n}\right)\times m$ で定める。

このように定めると，たとえば，

$$a\times\frac{6}{3}=\left(a\times\frac{1}{3}\right)\times 6=\left(a\times\frac{1}{3}\right)\times(3\times 2)=\left\{\left(a\times\frac{1}{3}\right)\times 3\right\}\times 2=a\times 2$$

となって自然数倍の積の意味の拡張になっている。

負数倍

a の自然数倍は，乗数が 1 減ると a だけ減る。そこで，

$a\times 2=2a$

$a\times 1=a$

$a\times 0=0$

$a\times(-1)=-a$

$a\times(-2)=-2a$

$a \times (-3) = -3a$
のように負の整数倍を定め，さらに
m, n を自然数とするとき，a の $-\dfrac{m}{n}$ 倍を $a \times \left(-\dfrac{m}{n}\right) = \left(a \times \dfrac{1}{n}\right) \times (-m)$ で定める。
すると，負数を含めて，積について，
交換法則　$ab = ba$
結合法則　$(ab)c = a(bc)$
分配法則　$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + ac$
が成立する。

負数を含む数式の表し方
負数を数式中に書くとき，その前後を括弧で括る。たとえば，$(-4)+(-3)$ や $(-4)\times(-3)$，$(-4)^2$。

1.5　文字式

1.5.1　単項負号

単項負号
文字（あるいは数式）a に対し，$(-1) \times a$ を $-a$ で表す。この $-$ を単項負号と呼ぶ。
すると，たとえば，
a が正の数 4 のとき，$-a = (-1) \times a = (-1) \times 4 = -4$
a が負の数 -4 のとき，$-a = (-1) \times a = (-1) \times (-4) = 4$
2 例目は，$a = -4$ のとき，$-a = -(-4) = 4$ と計算してよいことを示している。
注意　負数の累乗を書くとき，負数を括弧で括るのを忘れないこと。括弧を忘れて $(-4)^2$ を -4^2 と書くと意味が異なる。
$(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$
$-4^2 = (-1) \times 4^2 = -16$

単項負号と負の数
$(-1) \times 4 = -4$ なので，負数を表す符号の $-$ と (-1) 倍を表す単項負号を表す $-$ とを混同しても混乱は生じない。つまり，-4 を，負数の -4 と解釈しても，$(-1) \times 4$ と解釈してもどちらも同じ意味になる。

減法と単項負号
単項負号を用いると，引き算を表す数式 $a - b$ を $a + (-b)$ と書くことができる。

単項負号の優先順位
単項負号は，減算（$-$）と同じ優先順位を持つものとする。つまり，乗除が優先する。
たとえば，$-4a$ は $(-1) \times (4a)$ を意味する。ただし，$(-4) \times a$ と解釈しても同じ意味になる。

乗算（累乗を含む）のみで構成された数式を**項**という。単項負号を含む数式を数式の一部として書くとき，単項負号を含む数式を括弧で括る。たとえば，$a \times (-2a)$。これを $a \times -2a$ とは書かない約束になっている。

ただし，累乗の指数として単項負号を含む式を書くとき，括弧を省いてよい。たとえば，3^{-2a} のように。

記法上，負数を表す $-$ は単項負号として扱う。だから，負数は括弧で括って書かなければならないことが多い。

たとえば，2 と -3 の和は $2+(-3)$。$+$ と $-$ は同順位なので，$2+-3$ と書くと，$-$ が 3 に結合しない。

☆コンピュータのプログラム言語では，単項負号を乗除算より強く設定していることがある（そのほうが処理系を作るのが楽）。その場合，2*-3 とか，2+-3 などは意味を持つ式として受け入れられる。

1.5.2　文字式への代入

文字式に含まれる文字を別の数や数式（文字式を含む）で置き換えることができる（これを代入という）。

文字に負の数や数式を代入するとき，それらの前後を括弧で括らないと意味が変わってしまうことがある。

例　a^2 の a に -4 を代入するとき，$a^2 = (-4)^2$ と書かなければならない。

代入するときは，代入する値や式を括弧で括るのが原則。ただし，括弧を省いても意味が変わらないときは括弧を省いてよい。

例　$2a$ の a に $3b$ を代入すると，$2a = 2 \times (3b) = 2 \times 3 \times b = 6b$

この例のように，省略した掛算記号（$\times$）を復活させなければならないこともある。

1.6　現実事象と負の数の演算

2　関数と方程式

2.1　比例

x の値が 2 倍，3 倍，$\cdots$ と変化するときそれに連れて y の値も 2 倍，3 倍，$\cdots$ と変化するとき，x と y は比例するという。3 つ以上の変数の比例も同様に定義する。

2 つの変数 x と y が比例するとき，x の値が 1 のときの y の値を a とすると，$y = ax$ と表せる。このことから，2 つの変数 x と y が比例するとは，$\frac{y}{x}$ の値が一定の値をとることだといえる。この一定値を**比例定数**という。

☆ 3 変数以上の場合，この捉え方（$\frac{y}{x}$ の値が一定）は扱いにくい。

比例式

$x : y = a : b$ のとき，$ya = xb$（内項の積＝外項の積）

この関係は $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ から導くことができる。

比は

$x:y:z=a:b:c \Leftrightarrow \exists k[x=ak, y=bk, z=ck] \Leftrightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$
が基本。この捉え方であれば，$\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ は無名数。

2.1.1　一次関数

一次関数

関数 $y=ax+b$ を一次関数という。
$x=x_0$ のとき $y=y_0$ のとき，$y_0=ax_0$ なので
$y-y_0=a(x-x_0)$ となって，$y-y_0$ と $x-x_0$ は比例関係にある。

一次方程式の問題

一次関数のグラフを描くことによって一次方程式の問題を解く。

2.1.2　2 元一次方程式

2 元一次方程式の解直線を描く。
それを利用して 2 元連立一次方程式の解を得る。

一次不等式

一次不等式の解の領域を図示する。
さらに，連立一次不等式が表す領域を図示し，問題解決に利用する（線形計画法）。

2.1.3　いろいろな関数

ここまで加減乗除について学んでいるので，加減乗除の演算で記述可能な現象を数式で記述できる。
コンピュータを利用してグラフを描くことで
増加・減少，最大・最小
2 つの関数について一方が他方より大きい範囲
などをグラフから読み取ることが可能になる。
扱うことが可能な関数は，比例・一次関数の他，反比例，2 次関数，3 次関数，分数関数などがある。
相似図形に対し，面積が 2 乗，体積が 3 乗に比例すること，空間の 1 点から放射される光などの強度が中心からの距離の 2 乗に反比例するなど，基本的な変化の形に触れておくことも大切である。
特に，我々の空間が 3 次元空間であることを反映し，2 乗に反比例する事象が，万有引力の法則やクーロンの法則などとして現れることに注意する必要がある。
例題　1 辺の長さが 12cm の厚紙の 4 隅から同じ大きさの正方形を切り取って蓋のない箱を作るとき，容積を最大にするためには切り取る正方形の大きさをどう選べばよいか。

2.1.4　2 次関数

現実の現象には 2 乗に比例する関数ではなく，一般の 2 次関数となるものが大多数である。けれども，それら 2 次関数のグラフを描くとそれらがすべて同じ形（放物線）であることに気づく。

さらに，x^2 の項の係数によってその形（大きさ・開き具合）が決まることが分かる。その事実を式変形によって確かめる。

その考察によって，2 次関数は，2 乗に比例する関数を調べればその挙動を明らかにすることができることが分かる。

2 乗に比例する関数 $y = ax^2$ について深く考察するのはその考察の後である。

展開公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

関数 $y = x^2$

平方根　$x^2 = a$ となる x を a の平方根（または 2 乗根）という。

$a > 0$ のとき，a の平方根は正負，各 1 個ずつある。

a の正の平方根を $\sqrt{a}$ で表す。また，$\sqrt{0} = 0$ とする。

負の数の平方根はない。

$a \geqq 0$ のとき，方程式 $x^2 = a$ の解は $x = \pm\sqrt{a}$。

平方根を含む式の計算

正の数 a, b に対し $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

☆分母の有理化などの計算技能は必要であるが，それをいつ教えるのが適切かは要検討。たとえば，辺の長さの比が $1{:}\sqrt{2}$ の長方形を考えるとき，$1{:}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}{:}1$ であるが，そこで $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であることが重要な意味を持つ。具体事例に即して計算指導できるような指導体系を作ることが課題。

関数 $y = ax^2$

$y = ax^2$ のとき，$y = a(x - x_0)^2 + 2ax_0(x - x_0) + a{x_0}^2$

なぜなら，$X = x - x_0$ とおくと，$x = X + x_0$。

$ax^2 = a(X + x_0)^2 = a(X^2 + 2x_0X + {x_0}^2) = a(x - x_0)^2 + 2ax_0(x - x_0) + a{x_0}^2$

$x = x_0$ の近くで関数 $y = ax^2$ は一次関数 $y = 2ax_0(x - x_0) + a{x_0}^2$ で近似できる。

☆　放物線と呼ばれる理由，また，パラボラアンテナの原理なども探求させたいが中学生には難しいかも。

関数 $y = f(x-p) + q$ のグラフ

関数 $y = f(x-p) + q$ のグラフを関数 $y = f(x)$ のグラフを土台にして描く。

その活動を通して，関数 $y = f(x-p) + q$ のグラフと関数 $y = f(x)$ のグラフの位置関係についての法則を知る。

平方完成

$y = ax^2 + bx + c$ を $y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形する方法を工夫する。
技能として 2 次式の平方完成ができるようにする。
平方完成の技能を利用して 2 次方程式の解を求める。

関数 $y = (x-\alpha)(x-\beta)$

$(x-\alpha)(x-\beta)$ の展開の仕方を考える。
グラフの特徴を考察する。

2.2　2 次関数

2.2.1　2 次関数　$y = ax^2 + bx + c$

a, b, c の値を変えて $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを描いてみる。どれも同じような形になることを確認する。

$y = a(x-p)^2$ のグラフ

$y = ax^2$ のグラフと $y = a(x-p)^2$ のグラフを描いて対比する。そして，そうなる理由を考える。

例　$y = x^2$ の表を利用して $y = (x-2)^2$ の値を求める。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$(x-2)^2$										9

たとえば，$x = 5$ のとき，$x - 2 = 3$ なので，$x = 3$ に対応する x^2 の値が $(x-2)^2$ である。

☆ $y = f(x-p)$ を，2 つの関数 $y = x - p$ と $y = f(x)$ の合成として捉えることが本質。
$x \mapsto x - p$ と $x \mapsto f(x)$ の合成と書いたほうがわかりやすい。
中学生にどう指導すればよいかを考えたい。

$y = a(x-p)^2$ のグラフと $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフを描いて対比する。そして，そうなる理由を考える。

$y = ax^2 + bx + c$ の形の式を $y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形する方法を工夫し，また，その変形に習熟する（平方完成）。

一般の関数について $y = f(x-a) + b$ を $y = f(x)$ を土台に考える端緒。

$y = ax^2 + bx + c$ の形の式を $y = a(x-x_0)^2 + r(x-x_0) + y_0$ の形に変形する方法を工夫し，また，その意味を考える（接線）。（$X = x - x_0$ とおき $x = X + x_0$ を代入すればよい）（$x \fallingdotseq x_0$ のとき $y \fallingdotseq r(x-x_0) + y_0$）

例題 1　区間における最大・最小

2.2.2　2 次方程式・2 次不等式

平方完成によって 2 次方程式，2 次不等式を解く。解がない場合も扱う。
解の公式，因数分解による解法は扱わない。

2 次方程式

平方完成を利用して 2 次方程式を解く。
例題　1 次関数と 2 次関数，2 次関数と 2 次関数で値が等しくなるときの x の値を求める。

2 次不等式

$a > 0$ のとき，$x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$,　$x^2 > a \Leftrightarrow x > -\sqrt{a}$ または $\sqrt{a} < x$
$a < 0$ のとき，$x^2 < a$ の解は存在しない，　$x^2 > a$ の解はすべての数。
例題　不等式 $x^2 - 4x + 1 < 0$
$(x-2)^2 < 3$ より，$-\sqrt{3} < x - 2 < \sqrt{3}$
不等式の解は，$2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$
例題　不等式 $x^2 - 4x + 1 > 0$
$(x-2)^2 > 3$ より，$x - 2 < -\sqrt{3}$ または $< \sqrt{3} < x - 2$
不等式の解は，$x < 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3} < x$
Note.　不等式の解を表示するとき，不等式が成立する範囲をコンマで区切って列挙する慣習がある。列挙された不等式すべてが成立するという意味ではない。
つまり,「不等式 $x^2 - 4x + 1 > 0$ の解は，$x < 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3} < x$」は，
$\{x | x^2 - 4x + 1 > 0\} = \{x | x < 2 - \sqrt{3}\} \cup \{x | 2 + \sqrt{3} < x\}$ を意味する。

2.2.3　3 次関数

2 次関数や 1 次関数との対比で 3 次関数について探求する。
3 次関数の増加減少には異なる型があること，
2 次関数では最大値を与える x がグラフが x 軸と交わる 2 点の中点であるのに，3 次関数ではそうではない，
2 次関数のグラフは線対称，3 次関数のグラフは点対称。
x の値が 0 に近いとき，$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ は $y = cx + d$ と近い値を取る，
などを見出すことができる。

3 乗根

$x^3 = a$ となる x を a の 3 乗根（または立方根）といい，$\sqrt[3]{a}$ で表す。
$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$
体積が $a\mathrm{cm}^3$ の立方体の 1 辺の長さは $\sqrt[3]{a}\mathrm{cm}$。

2.2.4　数列

離散的な関数である数列について考察する。

指数関数につながる等比数列が重要。

3　代数

等式の性質

$A=B$ のとき，$A+C=B+C$,

$A=B, C\neq 0$ のとき $AC=BC$

を利用して一次方程式を解く。

不等式の性質

$A>B$ のとき，$A+C>B+C$,

$A>B, C>0$ のとき $AC>BC$

を利用して一次不等式を解く。また，不等式で与えられた条件を変形する。

3.0.5　連立方程式

連立一次方程式の代数的解法には加減法が最適であるが，一次に限定しないと，代入法や等値法しか採用できないこともある。加減法に限定せず学ぶものとする。

4　データの数学

4.1　数値

$a\times 10^n$　指数を負数に拡張して，数値（正の数）を $a\times 10^n$ の形に表す。

指数法則を利用してこの形の 2 数の乗算または除算を行う。

指数の拡張

正の数を 10^x の形に表すために指数を拡張する。

$\left(10^{\frac{1}{n}}\right)^n=1$ を満たす数として $10^{\frac{1}{n}}$ を定義し，$10^{\frac{m}{n}}=\left(10^{\frac{1}{n}}\right)^m$ と定める。

拡張された指数に対しても指数法則 $10^p 10^q=10^{p+q}$ が成立する。

常用対数

10 を底とする対数を用いて数値の大きさを評価する。

正の数 M に対し，$10^x=M$ となる x を $\log_{10} M$ で表す。

$\log_{10} 10^x=x$,　$\log_{10} MN=\log_{10} M+\log_{10} N$

記法の約束　$\log_{10}$ は乗除より弱く，加減より強い。すなわち

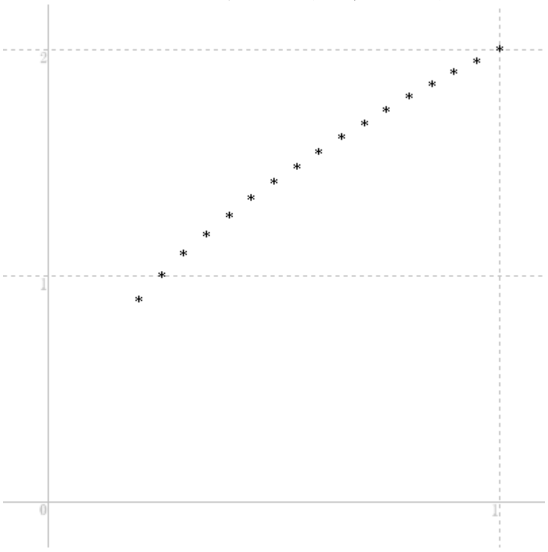
$\log_{10} MN$ は $\log_{10}(MN)$ を意味し，$\log_{10} M+\log_{10} N$ は $(\log_{10} M)+(\log_{10} N)$ を意味する。

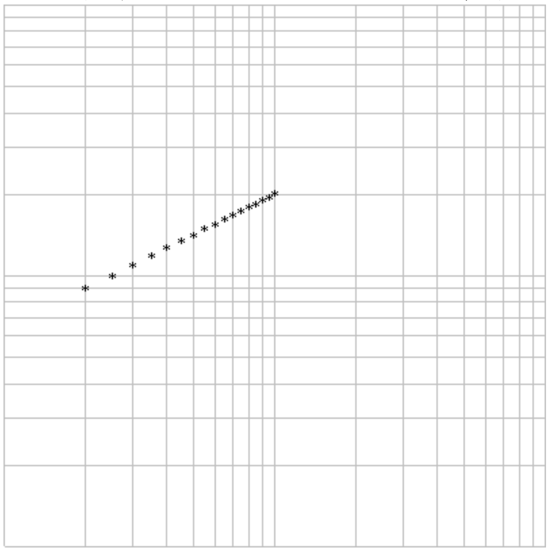
☆　計算尺を教育玩具として復活させられないか?　電卓が普及する前は，掛け算，わり算，平方根の計算に計算尺が利用されていたことを教えてもいいと思う。

対数グラフ

対数グラフが自然科学，社会科学分野で広く用いられている。対数目盛，対数尺の意味を理解し，対数グラフから法則性を読み取ることができるようにする。

例題 2 振り子の長さと周期の実験を行い，その結果を 2 通りの方法でグラフ化する。





横軸　振り子の長さ（m）　縦軸 振り子の周期 (秒)

4.1.1　データの図示

座標平面の利用

線形計画法（PBL の課題として学ぶ）

4.2　統計

☆標本調査は，比例関係の応用として小学校で扱う。

4.2.1　度数分布

度数分布　相対度数分布　ヒストグラム

累積度数分布

中央値と 4 分位数，4 分位範囲

数値を小さいほうから順に並べて最初の数（最小の数）を 0% 点，最後の数（最大の数）を 100 %点とする。

そして，たとえば，10 個の数値を順に並べるとき，25 %点は 3.25 番目の数，50 %点は 5.5 番目の数，75 %点は 7.75 番目の数である。

25 %点，50% 点，75% 点に位置する数を，それぞれ，第 1 四分位数，第 2 四分位数（または中央値），第 3 四分位数という。指定された位置に数がないとき，前後いずれかの数で代替するか，比例配分するかは任意とする。

四分位数を累積度数分布から読み取れるようにする。また，逆に，5 数要約から分布が想起できるようにする。

☆累積度数分布から四分位数を求めるのは，データの数値すべてを昇順に並べ替えるよりも容易に実行できる。ただし，累積度数分布から四分位数を求めると，分布を求めるときの階級の幅に依存する誤差を伴う。

☆現行教科書は，奇数個の数値の場合，中央値を除いたそれより小さい数の中央値（存在しなければ前後の数の平均）を第 1 四分位数と定義している。たとえば，１，２，３，４，５の 5 個の数値の 25 %点は 2 であるが，現行教科書の定義によると第 1 四分位数は１と２の平均をとって 1.5 である。つまり，第 1 四分位数 $\neq$ 25 %点。なぜ，こんな不思議な定義を採用したのだろうか。25 %点が存在するときは，それを第 1 四分位数とするべきである。

4.2.2　2 次元集計表と散布図

クロス集計表（2 次元集計表）

クロス集計表は，同時確率分布を扱う際の基礎経験として重要。

散布図

相関関係を知るために散布図を書く。

4.3　確率

「同様に確からしい」という概念を確立し，樹形図などを利用して正しく数え上げる。

検討課題　同様に確からしくない事象の確率を扱うか？

5　幾何

幾何は直角三角形をベースとする幾何に置き換える。(現行は三角形の合同条件，相似条件がベース)。

垂線を下して直角三角形を作る操作を出発点とする幾何にする。

方眼紙の幾何を出発点に置く。比例のグラフが直線になることから，原点を通る直線上の点の x 座標，y 座標は比例関係にある。このとき，原点と点 (x, y) を結ぶ線分の長さも同じ比例関係にあることを認めることから出発してみたい。

5.1　作図

用語　直線，線分，半直線，対頂角，

5.1.1　垂直 2 等分線・角の 2 等分線

対称性を利用して作図する。

5.1.2　垂線

定規とコンパスによる作図の経験から，次のことを確認する。
直線外の点から直線に垂線を引くことができる。この垂線はただ一つに定まる。
直線上の 1 点からこの直線の垂線を描くことができる。この垂線はただ一つに定まる。
☆垂線を下して直角三角形を作る操作は図形の性質を調べるのに役立つ（認知しやすい)。

5.1.3　平行線

作図を通して以下の性質を帰納的に学ぶ。
平行線上の 1 点から他方へ下した垂線の長さは同じ（小学校で学ぶ)。
直線外の任意の点を通る直線（平行線）を引くことができる。
平行線は交わることがない。
ある直線と垂直に交わる 2 直線は平行である。
三角定規のどの角を利用しても平行線がかけるから，
ある直線と同位角が等しくなるように交わる 2 直線は平行である。

5.1.4　三角形の作図

（長さの測れる）定規，分度器，コンパスで次の三角形を作図する。
（1）指定された 3 辺の長さを持つ三角形
（2）2 辺の長さと挟む角が指定された三角形
（3）1 辺の長さと両端角の大きさが指定された三角形

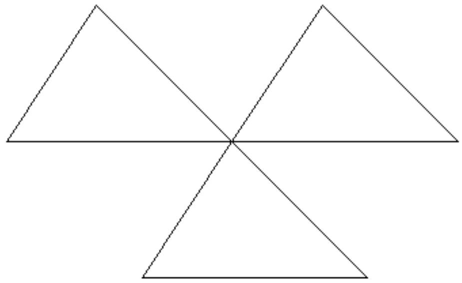
5.2　図形の移動・変換

5.2.1　平行移動

同じ向きに同じ距離だけ移動させることを平行移動という。
平行移動は，図形の形と大きさ（辺の長さや角の大きさ）を変えない。
平行移動で重なる 2 直線は平行であるという。
平行移動で対応する 2 点を結ぶ線分は平行で長さが等しい。
平行な 2 直線は，平行移動で平行な 2 直線に移る。
平行線に第 3 の直線が交わってできる同位角は等しい。
第 3 の直線が交わってできる同位角が等しいとき，2 直線は平行である。
平行四辺形の対辺の長さは等しい（平行線の間隔は斜めに測っても等しい)。

三角形の内角の和

平行線の性質を利用すると，三角形の内角の和が 180° であることが証明できる。
（対頂角が等しいことに注意すれば，平行移動の性質から直接導ける）



凸多角形の内角の和

対角線がすべて内部に含まれるような多角形を凸多角形という。
凸 n 角形の内角の和は $180^\circ \times (n-2)$ である。

5.2.2　回転移動

回転移動は，図形の形（辺の長さや角の大きさなど）を変えない。

5.2.3　対称移動

対称移動は，図形の形（辺の長さや角の大きさなど）を変えない。
対称移動で対応する 2 点を結ぶ線分は，対称軸の垂直 2 等分線である。

2 等辺三角形

2 等辺三角形の両底角は等しい。逆も成立。対称移動で重なる。

5.2.4　拡大・縮小

拡大・縮小

A を平面上の 1 点とする。平面上の点 P に対し，$\mathrm{AQ} = k\mathrm{AP}$ となる半直線 AP 上の点 Q を対応させる変換を点 A を中心とする k 倍の拡大・縮小という。（k を相似比という）
拡大・縮小で対応する 2 線分は平行で，長さの比は k である。
拡大・縮小で対応する角の大きさは変わらない。

縮図

縮図を利用して測量を行うことを通して相似図形の性質を帰納的に学ぶ。

5.2.5　円

円と直線

円の中心から直線に下した垂線の長さを l, 円の半径を r とする。

$l > r$ のとき，共有点をもたない

$l = r$ のとき，共有点は１つ（接する）

$l < r$ のとき，共有点は２個（交わる）

円と直線が接するとき，接点における半径と接線とは垂直（対称性を考える）。

円と円

２円の半径を r_1，r_2，２円の中心間の距離を l とする。

$l > r_1 + r_2$ のとき，共有点をもたない

$l = r_1 + r_2$ のとき，共有点は１つ（接する）

$l < r_1 + r_2$ のとき，共有点は２個（交わる）

5.2.6　合同

平行移動，回転移動，対称移動を組合せて重ね合わせることができる図形は合同であるという。

合同な図形は対応する辺の長さが等しく，角の大きさが等しい。

３辺合同定理

３辺の長さが相等しい２つの三角形は合同。

なぜなら，平行移動，回転，対称移動で重ね合わせることができるから。

そのとき，線分の両端から指定された距離にある点（円と円の交点）が高々2個しかないことを用いる。

平行四辺形

２組の対辺の長さが等しい四角形は平行四辺形

　　対角線を引いて３辺合同定理を適用する。

☆平行四辺形の対辺の長さが等しいことは小学校で学ぶ

　　（平行線の基本性質として仮定する）。

☆１組の対辺が平行で長さが等しい四角形は，平行移動の性質から，残り２辺は平行。

5.2.7　等積変形

平行線上の１点から他方へ下した垂線の長さは同じことを利用して，多角形を同じ面積の三角形に等積変形できる　（小学校で学ぶことにしてもよいと思う）。

5.3　相似

5.3.1　相似

一方を拡大・縮小して他方と合同になる 2 つの図形は相似であるという。
相似な図形は，対応する辺の長さの比が等しく，角の大きさが等しい。

5.3.2　平行線の性質

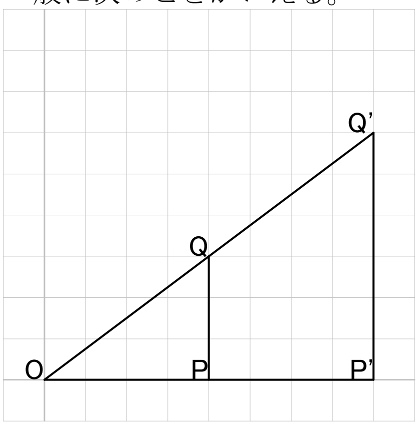
拡大・縮小の性質から中点連結定理が成立する。

定理 3　（中点連結定理）△ABC の 2 辺 AB,AC の中点をそれぞれ M,N とすると，

MN//BC，$\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$。

問 4　△ABC の辺 AB の中点を M とし，辺 BC の平行線と辺 AC の交点を N とするとき，N は AC の中点だろうか。

一般に次のことがいえる。



半直線 OP 上に点 P′ が，半直線 OQ 上に点 Q′ があって，
PQ//P′Q′ のとき，$\mathrm{OP} : \mathrm{OP}' = \mathrm{OQ} : \mathrm{OQ}'$
この性質は，拡大・縮小の性質に基づいて次のように説明できる。
OP:OP′=OQ:OQ″ となる点 Q″ を半直線 OQ 上にとると，PQ//P′Q″。
点 P′ を通る PQ の 平行線は 1 本しかない ので，直線 P′Q′ と直線 P′Q″ は一致する。
しかも，Q′,Q″ はこの直線と直線 OQ の交点。
交わる 2 直線の交点は 1 つしかない ので，P′ と P″ は一致する。
Note. 拡大・縮小の性質から $\mathrm{OP} : \mathrm{OP}' = \mathrm{OQ} : \mathrm{OQ}' = \mathrm{PQ} : \mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ もいえる。

5.3.3　相似比と面積比・体積比

高さが同じ三角形の面積は底辺に比例。

底辺が同じ三角形の面積は高さに比例。
相似な三角形の面積は相似比の 2 乗に比例。
同様に，相似な立体の体積は相似比の 3 乗に比例。
例　縮尺が 1 万分の一の地図上で 1cm^2 の土地の実際の面積は何㎡か？

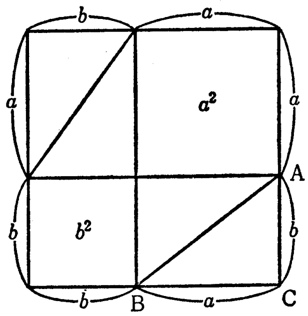
5.4　直角三角形

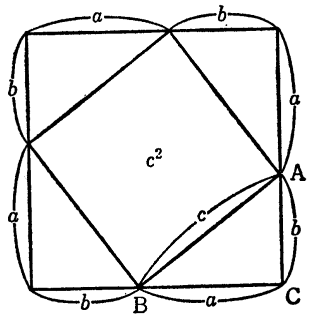
5.4.1　直角三角形の相似

以下の事実を確認する。
直角を挟む 2 辺の長さの比が等しい直角三角形は相似である。
特に，直角を挟む 2 辺の長さが等しい直角三角形は合同である。
直角ともう一つの角が等しい直角三角形は相似である。（相似比が 1 :1 であれば合同）
☆拡大・縮小の議論が成立するように（相似の位置に）2 つの直角三角形を移動して考える。一般の三角形に関する合同条件でいうと，2 辺夾角と 1 辺両端角の場合に相当する。

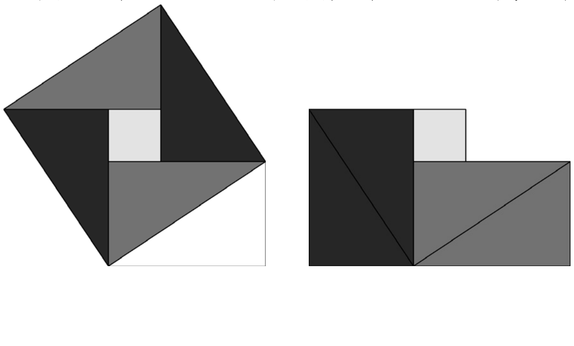
5.4.2　三平方の定理

三平方の定理は座標幾何に至る階梯の要。
現行教科書に多く採用される証明手法は $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ に依存する。この公式は左の図で説明できる。この図で ab の長方形を対角線で切って右の図のように組み替えると，$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$。
$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$ から $a^2 + b^2 = c^2$ が得られる。





参考文献　矢野健太郎著「幾何の有名な定理」　数学ワンポイント双書 36　共立出版 (1981)
☆　上述の図（$(a+b)^2$ の正方形）を発想するのは難しい。c^2 の正方形を分割して a^2 と b^2 の正方形に組み替えたい（あるいはその逆）。
　例　（バスカラの証明）（これも上掲の本にある）。



☆　直角の頂点から斜辺に垂線を下して，直角三角形を元の三角形と相似な 2 つの直角三角形に分割し，相似形の面積比の関係から $a^2+b^2=c^2$ を得ることもできる。

5.5　平面座標

5.5.1　平行移動

点 (x,y) を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ（平行）移動した点は $(x+a,y+b)$。

5.5.2　拡大・縮小

原点を中心とする r 倍の拡大で，点 (x,y) は点 (rx,ry) に移る。
例題　$y=ax^2$ と $y=bx^2$ は相似（原点を中心とする拡大で重なる。ただし，$ab\neq 0$）

5.5.3　正接

正接

座標平面上の点 $P(x,y)$ に対し，半直線 OP が x 軸の正の向きとなす角を半直線 OP の**偏角**という。角は反時計まわりを正の向きとし，時計まわりを負の向きとする。たとえば，$270°$ と $-90°$ は同じ角を表す。

偏角が θ の直線 $y=ax$（原点を通る直線）と直線 $x=1$ との交点の y 座標を $\tan\ \theta$ で表す。すなわち，$a=\tan\ \theta$ 。

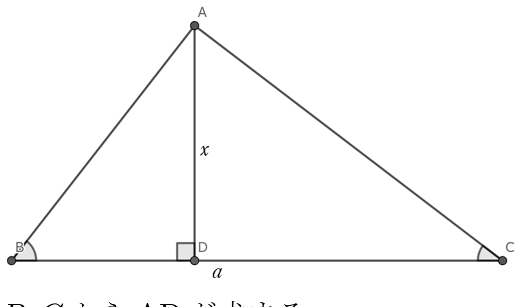
直線 $y=ax$ において，a を直線の傾きという。また，$\tan\ \theta$ を θ の正接という。
例 $\tan 45°=\tan 225°=1, \tan 270°=\tan(-90°)=-1$
記法の約束　tan は乗除より弱く，加減より強い。

逆正接

x に対し，$x=\tan\ \theta$ となる θ を $\arctan x$ で表す。ただし，θ を $-90°<\theta<90°$ の範囲で求める。

正接の図形への応用

角 C $=90°$ の直角三角形 ABC において，AC$=x$，BC$=y$ とすると，$y=x\tan A$。
例題



a,B,C から AD が求まる。
AD$=x$ とすると，BD$=\frac{x}{\tan B}$，CD$=\frac{x}{\tan C}$

a =BD + CD より，$\frac{x}{\tan B}+\frac{x}{\tan C}=a$
$\therefore x=\dfrac{a}{\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}}$
Full BASIC のプログラムで書くと，

```
10 OPTION ANGLE DEGREES
20 INPUT a,B,C
30 PRINT a/(1/TAN(B)+1/TAN(C))
40 END
```

5.5.4 極座標と正弦・余弦

原点を中心とする半径 1 の円を単位円という。偏角が θ の半直線と単位円の交点の x 座標を θ の余弦といい，cos θ で表し，y 座標を θ の正弦といい，sin θ で表す。

例　$\cos 0^\circ=1,\sin 0^\circ=0$
$\cos 90^\circ=0,\sin 90^\circ=1$
$\cos 180^\circ=-1,\sin 180^\circ=0$
$\cos 270^\circ=\cos(-90^\circ)=0,\sin 270^\circ=\sin(-90^\circ)=-1$

座標平面上の点 P(x,y) において OP= r，半直線 OP の偏角が θ であるとき，
$x=r\cos\ \theta$，$y=r\sin\ \theta$

証明に比例のグラフの性質「グラフ上で x,y が表す点が原点を通る直線上にあるとき，x と y は比例している。」を用いる。

例題　地点 A を出発して真東から北東方向 40° の方角に 2km 進み，右に 20° 向きを変えて 1 km 進んだ。現在地は地点Aからどれだけ離れ，どの向きにあるか？

☆意図は，ベクトル概念の素地。

ヒント 点 (x,y) の偏角（度）を JIS Full BASIC の ANGLE 関数で求めることができる。

```
10 OPTION ANGLE DEGREES
20 INPUT x,y
30 PRINT ANGLE(x,y)
40 END
```

☆たいていの関数電卓，プログラム言語で，tan θ =y/x となる θ を求めることができる (ただし，弧度法のみのことがある) けれども，正接の値から正弦，余弦を求めるのは少し程度が高い。ここでは，Full BASIC の ANGLE 関数のように (x,y) から偏角を求める関数を利用することを想定する。

検討課題

点 (x,y) を極座標で表したときの偏角を表す記号 (Full BASIC の ANGLE(x,y) に相当する数学の記号) をどうするか？　複素数を用いれば偏角を $\arg(x+iy)$ と書ける。しかし，この記号を用いるために複素数を導入するのはどうかと思う。

5.5.5　正弦・余弦の図形への応用

直角三角形の三角比

例題　水平面とのなす角が 6° の斜面を 100m 進むと，水平方向，鉛直方向にそれぞれ何 m 進むか。

☆三角比の相互関係は高校で学ぶものとしておく。

1 辺両端角

$\triangle$ABC において BC$=a$，$\angle$B$=B$，$\angle$C$=C$ とする。$b=$CA を求めたい。

このとき，$A=180^\circ-(B+C)$

C から辺 AB に下した垂線の足を H とする。CH$=a\sin B=b\sin A$

$\therefore b=a\times\frac{\sin B}{\sin A}$

☆　2 辺夾角と 3 辺の場合は高校で学ぶことにしておく（余弦定理）。

5.6　空間図形

5.6.1　立体図形

現行中学校数学に立体図形が現れるが，その多くは小学生でも学べるものである。展開図，見取り図，平面と直線の位置関係などは算数への移行を検討し，残された部分は必要が生じたところで（考えることの必要性が理解できる形で）扱うことにしたい。

正射影

平行光線の影

平行線は平行線に映される。

同一直線上の線分の比は保たれる。

角の大きさは保存されない。

透視投影

中心投影とも呼ばれる。一点から出た光の影。片目で見たときに見える風景。

投影面と平行な直線は平行直線に映される。

そうでないとき，平行線群は無限遠方で 1 点に交わる。

美術で学ぶ 1 点透視図法，2 点透視図法，3 点透視図法は，被写体の長方形を投影面に対しどう置くかの問題。

5.6.2　空間座標

空間内の位置を表すのに 3 次元直交座標が使えるようにする。そして，三平方の定理を利用して空間内の 2 点間の距離（直方体の対角線の長さ）を求めることができるようにする。

座標空間で 2 点間の距離を求めるときの基礎となるのが，x 軸，y 軸，z 軸が互いに直交するとき，z 軸に平行な直線が xy 平面内のどの直線とも垂直になるという事実。この事実は，現行教科書では中学 1 年の内容で証明抜きで扱われている。この事実が重要であることを意識させるのには，直方体の対角線の長さを求めることを考えさせることが有効と思われる。単に事実を述べて終わるのでは意識されずに終わるであろう。

6　検討課題

錐体の体積

錐体の体積が同じ底面を持つ柱体の体積の $\frac{1}{3}$ であるというのを，中学生にふさわしい水準で説明するのは難しい。小学生であれば，錐体，柱体それぞれの形をした容器の容積を水などを利用して比較することで納得するかもしれない。

中学生向きに説明するのであれば，立方体を 6 分割してできる錐体から始めることになるのであろう。この錐体の体積は確定する。それと同じ底面，同じ高さの斜錐体の体積が同じであることは，底面に平行な平面で細かく分割することで説明できる。では，高さが 2 倍になったら体積は 2 倍になるのだろうか？　同じ底面積，同じ高さの錐体の体積はどれも同じなのだろうか？

球の体積・表面積 (高校へ)

数学として学ぶのは中学生には難しい。数学は公式を覚える教科だと認識させる大きな要因になっている。高校の内容とすべきだろう。ただし,「 ··· であることが知られている」として，··· だとしたらどうなるか考えるための材料とすることを妨げない。覚える対象から外すことが重要。

6.0.3　三角形の合同条件 (高校へ？)

合同の定義は算数を引き継ぐ。

ずらしたり裏返したりして重なりあう図形は合同であるという。

ずらしたり，裏返したりするとき，形を変えない。

☆長さの等しい線分は重ね合わせることができる，等しい角は重ね合わせることができると考えたとき，2 辺夾角合同定理は，異なる 2 点を通る直線がひとつしかないことが根拠になる。また，一辺両端角合同定理は，重ね合わせたとき，2 直線の交点が高々一つであることが根拠になる。

☆高校では正弦定理，余弦定理を根拠に三角形の 3 辺の長さが等しいとき 3 つの角も等しいことが示せる。ユークリッドは，3 辺の長さが等しい三角形を向かい合わせに配置すると 2 等辺三角形ができることを根拠に角が等しいことを示している。

6.0.4　三角形の相似条件（高校へ？）

一方を拡大・縮小したとき，合同となる 2 つの図形は相似であるという。

次の三角形は相似

3 辺の長さの比が等しい（拡大したら 3 辺の長さが同じになるから）

2 辺の長さの比が等しく，2 辺が挟む角が等しい（拡大したら 2 辺夾角が等しいから）

2 角が等しい（拡大して 1 辺両端角を等しくできるから）

例　正 5 角形の黄金比。(ただし，2 等辺三角形の相似は頂角から垂線を下すと直角三角形の相似の問題になるので，直角三角形ベースの幾何で扱えないことはない。)

高校数学の構想 Part 1

白石和夫　　2023 年 04 月 10 日

高校普通科で共通に学ぶ内容。時間数的に 8 単位程度を想定。
文理共通のコアであると同時に STEM（特に高校物理）にも留意する。
現実世界の問題が数理的に解決できることを示す。特に，**計算の有用性**。
少なく学んで広範囲の応用が可能な知識体系を作る。
暗記不要な芋づる型の知識体系とする。
PBL による授業展開が可能なものとする。
狭い範囲でのみ有効な裏技が有用な存在とならないように学習範囲を定める。
ベクトル，Σ，平方完成（最小 2 乗法），対数の使用に習熟させる。
特に，幾何をベクトルを使う修練の場として位置付ける。

1　ベクトルと正弦・余弦

1.1　平面幾何

1.1.1　平面の直線

2 点の座標を与えて $y = ax + b$ の式に代入すると，2 点を通る直線の方程式が得られる。
ただし，2 点の x 座標が同じ場合は例外で，その方程式は $x = a$ の形になる。
それらを統合して，直線の方程式は $ax + by + c = 0$ の形に表される。
直線の方程式について学ぶことは，ある点が直線上にあるかどうかが，方程式を満たすかどうかに言い換えられることである。

1.1.2　平面上の 2 点間の距離

平面上の 2 点 A(x_1, y_1),B(x_2, y_2) に対し，AB $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$。
x 座標，y 座標，それぞれについて，どちらが大きいかで場合分けをして考える。さらに，x 座標が同じ 2 点や，y 座標が同じ 2 点にも使えることを確認する。

1.1.3　正弦と余弦

平面上の点 P に対し，半直線 OP が x 軸の正の向きに対しなす角を反時計周りに測り $\angle x\mathrm{OP}$ で表す。時計回りは負の向きとし，$\angle x\mathrm{OP}$ を負数にして表す。
原点を中心とする半径 1 の円を単位円という。角 θ に対し，単位円上に $\angle x\mathrm{OP} = \theta$ となる点 P(x, y) を取り，$x = \cos\ \theta$，$y = \sin\ \theta$ とする。
平面上の点 P(x, y) に対し，OP $= r$ とするとき，$x = r\cos\ \theta$，$y = r\sin\ \theta$。
単位円上の点 P に対し OP=1 だから，
$\cos^2\ \theta + \sin^2\ \theta = 1$。ただし，$\cos^2\ \theta$ は $(\cos\ \theta)^2$ を，$\sin^2\ \theta$ は $(\sin\ \theta)^2$ を表す。

1.1.4　正弦定理・余弦定理

△ABC に対し，辺の長さ BC，CA，AB を，それぞれ，a, b, c で表し，∠A, ∠B, ∠C の大きさをそれぞれ，A, B, C で表す。

余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

証明　3 点 A(0,0), B(c,0), C($b\cos A, b\sin A$) に対し，

$a^2 = \mathrm{BC}^2 = (b\cos A - c)^2 + (b\sin A)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

余弦定理　$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

練習 1 三角形の 3 辺の長さ a, b, c を入力すると ∠A の大きさを出力するプログラムを作れ。

解答例 （JIS Full BASIC）

```
10 OPTION ANGLE DEGREES
20 INPUT a,b,c
30 PRINT ACOS((b^2+c^2-a^2)/(2*b*c))
40 END
```

解説 cos $\theta = x$ となる θ を求めるのに組込関数 ACOS(x) を用いる。

正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

証明

△ ABC の頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を H とすると，CH=$b\sin A = a\sin B$

☆正弦定理の証明に円周角の定理は不要。

一方で，円周角の定理をここで追加することも考えられる。$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$（R は外接円の半径）なので，見通しよく定理が導ける利点がある。当然，円に関する計量にも資する。

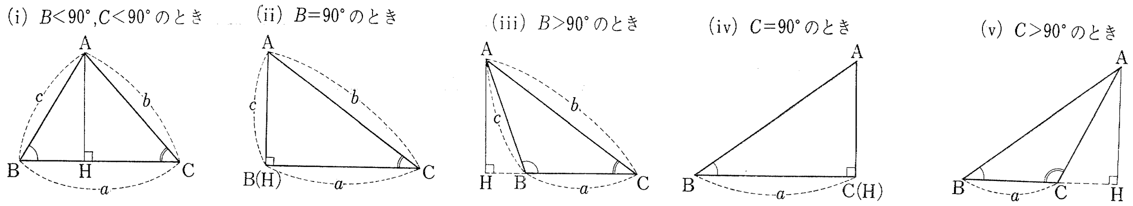
練習 2 三角形 ABC において a, B, C を入力すると b, c を出力するプログラムを作れ。

例題 3 △ ABC において，

(1)　$a = b\cos C + c\cos B$

(2)　$\sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$

証明 (1)



(2)$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = k$ とおく。

$a = k\sin A, b = k\sin B, c = k\sin C$ を $a = b\mathrm{cos}C + c\mathrm{cos}B$ に代入して
$k\sin A = k\sin B\cos C + k\sin C\cos B$
$k \neq 0$ なので，$\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$
三角形の内角の和は $180°$ なので，$\sin A = \sin\{180° - (B+C)\} = \sin(B+C)$

練習 4 $\sin 75°, \sin 15°$ を求めよ。

定理 5 2 つの三角形において，
(1) 対応する 3 辺の長さがすべて等しいとき，対応する角の大きさもすべて等しい（SSS）。
(2) 対応する 2 辺の長さが等しくその 2 辺が挟む角の大きさが等しいとき，残りの辺の長さ，角の大きさも等しい（SAS）。
(3) 対応する 1 辺の長さが等しくその両端の角の大きさが等しいとき，残りの辺の長さ，角の大きさも等しい（ASA)。

定理 6 2 つの三角形において，次の (1)〜(3) は同値
(1) 対応する 3 辺の長さの比が等しい。
(2) 対応する 2 辺の長さの比が等しくその 2 辺が挟む角の大きさが等しい。
(3) 対応する 2 つの角の大きさが等しい。

例題 7 1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さは，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。

1.1.5 三角形の面積

△ ABC の面積を S とすると，$S = \frac{1}{2}bc\sin A$
余弦定理から次の公式を導くことができる。

命題 8 $\sin A = \dfrac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2bc}$

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{(1+\cos A)(1-\sin A)}$$
$$= \sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} = \frac{\sqrt{b^2+2bc+c^2-a^2}\sqrt{a^2-(b^2-2bc+c^2)}}{2bc}$$
$$= \frac{\sqrt{(b+c)^2-a^2}\sqrt{a^2-(b-c)^2}}{2bc} = \frac{\sqrt{(b+c)^2-a^2}\sqrt{a^2-(b-c)^2}}{2bc}$$
$$= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)}\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}}{2bc}$$

ヘロンの公式
$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

練習 9 三角形の 3 辺の長さを入力するとその面積を出力するプログラムを作れ。

1.2　ベクトル

1.2.1　ベクトルの演算

ベクトルは，数値の組。座標との違いは加法や内積などの演算が定義されること。伝統的な幾何ベクトルを捨て，数値の組からなるデータを扱う基礎としてのベクトルを学ぶ。

図形から切り離して定義し，図形への応用を考えるなかで幾何の道具としての実用性とともにベクトルの幾何的な直観を養う。

加法，スカラー倍，内積，大きさの定義

$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2), \boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ に対し，

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$

$k\boldsymbol{a}=(ka_1, ka_2)$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

$\boldsymbol{0}=(0,0)$　**零ベクトル**

$-\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a}$　**逆ベクトル**

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ で表す。

$\dfrac{1}{k}\boldsymbol{a}$ を $\dfrac{\boldsymbol{a}}{k}$ で表す。

ベクトルの計算公式

加法とスカラー倍

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ をベクトルと，k, l を数とすると，

命題 10　（交換法則）　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

（結合法則）　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

（ベクトルに関する分配の法則）　$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$

（スカラーに関する分配の法則）　$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$

（スカラーに関する結合法則）　$k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$

内積の計算公式

(1)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$

(2)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(3)　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$　,

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

(4)　$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

次の公式は (1)〜(4) から導かれる。

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$$

$$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\pm 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2 \qquad \text{（複号同順）}$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$$

命題 11　（コーシー・シュワルツの不等式）　$-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \leqq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \leqq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

証明. $|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \geqq 0$ を示す。$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2), \boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ とする。
$|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\left({a_1}^2+{a_2}^2\right)\left({b_1}^2+{b_2}^2\right)-(a_1b_1+a_2b_2)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2 \geqq 0$ □

1.2.2 幾何ベクトル

点 P の座標が (a_1,a_2) であるとき，座標を成分とするベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ を点 P の座標ベクトルという。

点 P の座標ベクトルが $\boldsymbol{a}$ であることを $\mathrm{P}(\boldsymbol{a})$ で表す。

定義 12 2 点 $\mathrm{A}(\boldsymbol{a}), \mathrm{B}(\boldsymbol{b})$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

命題 13
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\boldsymbol{0}$$

☆　伝統的な幾何ベクトルの定義（有向線分の同値類）では，結合法則 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ の証明は容易ではなく，また，内積の計算公式の導出も難解。

位置ベクトル

C を定点とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ を (C に対する)P の**位置ベクトル**という。

原点 O に対する点 P の位置ベクトルは，P の座標ベクトルと一致する。

2 点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ である。

特に，2 点 A, B の位置ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ のとき，A, B は一致する。

分点の位置ベクトル

線分 AB を $m:n$ の比に分ける点を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ だから，
A, B, P の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}$ とすると，$\boldsymbol{p}=\dfrac{n}{m+n}\boldsymbol{a}+\dfrac{m}{m+n}\boldsymbol{b}$ である。
(Note) 外分点の場合は，m, n のうちの一方を負数にする。

☆ベクトルの内分・外分は，加重平均を意味する。

直線の方程式

直線 AB 上の任意の点を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 λ が存在するから，
A, B, P の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}$ とすると，$\boldsymbol{p}=(1-\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ である。

例題 14 △ABC の 3 頂点の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ として，2 頂点 A, B から対辺に引いた中線の交点の位置ベクトルを求めよ。

三角形の 3 中線は 1 点で交わる。この点を三角形の**重心**という。

平行なベクトル

定義 15 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し,$\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ となる 0 でない実数 k が存在するとき，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平行であるといい，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ で表す。

命題 16 3 点 A,B,C が同一直線上にないとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{CD}} \Leftrightarrow \mathrm{AB}/\!/\mathrm{CD}$。

例題 17 △ABC において，辺 AB,AC を $m:n$ の比に分ける点をそれぞれ P，Q とするとき，PQ//BC，$\mathrm{PQ} = \dfrac{m}{m+n}\mathrm{BC}$ であることを示せ。

例題 18 △ABC において，辺 AB を $m:n$ の比に分ける点を P とし，P を通り BC に平行な直線と辺 AC との交点を Q するとき，$\mathrm{AQ}=\dfrac{m}{m+n}\mathrm{AC}$ であることを示せ。

ベクトルのなす角

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し,$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる 2 点 A,B をとるとき∠ AOB を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角という。

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行でないとき,

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると，余弦定理より　$\cos\ \theta = \dfrac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}$

内積の計算公式から　$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ なので,

$\cos\ \theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

この結果は，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ の場合にも正しいから次の命題が成立する。

命題 19 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると，　$\cos\ \theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

命題 20 (ベクトルの垂直条件)　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ がいずれも零ベクトルでないとき

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ \text{のなす角} = 90^\circ$$

垂直なベクトル

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ のとき $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は垂直であるといい，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ で表す。零ベクトルは任意のベクトルと垂直と考える。

問題 1 4 点 O,A,B,C があって，OA⊥BC，OB⊥CA ならば OC⊥AB であることを示せ。

前問は，三角形の 3 垂線が 1 点 (垂心) で交わることの証明になっている。

問題 2 △ ABC の外心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点 H をとると，H は△ ABC の垂心であることを証明せよ。

問題 3 △ ABC の外心，垂心，重心は 1 直線上にあることを証明せよ。[ヒント] 前問の結果を利用。

頂角の 2 等分線と辺の比

定理 21 $\triangle$ABC において，D を辺 BC 上の点とする。半直線 AD が $\angle$A の 2 等分線であるとき，BD : DC = AB : AC。

証明. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{b}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{c}$, BD : DC $=m:n$ とする。

D が辺 BC を $m:n$ の比に内分することから $\overrightarrow{AD}=\dfrac{n\overrightarrow{b}+m\overrightarrow{c}}{m+n}$

$\angle BAD=\angle CAD$ より $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}}$

$\mathrm{AC}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}})=\mathrm{AB}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

$|\overrightarrow{c}|\left(\overrightarrow{b}\cdot\dfrac{n\overrightarrow{b}+m\overrightarrow{c}}{m+n}\right)=\left|\overrightarrow{b}\right|\left(\overrightarrow{c}\cdot\dfrac{n\overrightarrow{b}+m\overrightarrow{c}}{m+n}\right)$

$\left(n\left|\overrightarrow{b}\right|-m\,|\overrightarrow{c}|\right)\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}-\left|\overrightarrow{b}\right||\overrightarrow{c}|\right)=0$

$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ は平行ではないので，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}-\left|\overrightarrow{b}\right||\overrightarrow{c}|\neq 0$

$\therefore n\left|\overrightarrow{b}\right|-m\,|\overrightarrow{c}|=0$

すなわち，$m:n=\left|\overrightarrow{b}\right|:|\overrightarrow{c}|$ □

別証　B,C から AD に下した垂線の足を，それぞれ，E，F とすると，$\triangle$ABE∽$\triangle$ACF, $\triangle$BDE∽$\triangle$CDF より，AB:AC=BE:CE=BD:CD

別証 2　補助線として平行線を引いてもできる。

練習 22 $\triangle$ABC において，D を辺 BC 上の点とする。BD : DC = AB : AC のとき半直線 AD は $\angle$A の 2 等分線であることを示せ。

1.3　正弦関数，余弦関数

三角関数の諸公式を，覚えるものから公式集を見ながら使うものへと考え方の転換を進めることが必須。

1.3.1　偶関数，奇関数

$\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

1.3.2　正弦と余弦の関係

座標軸を -90° 回転させて，

$\sin\theta=\cos(\theta-90^\circ)$

Note.

直線 $y=x$ に関する対称移動で角 θ の動径は $90^\circ-\theta$ に移るから

$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$

これと $\cos(-\theta)=\cos\theta$ とから $\sin\theta=\cos(\theta-90^\circ)$ を導くこともできる。

1.3.3　正弦・余弦の加法定理

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$

証明　$\boldsymbol{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha), \boldsymbol{b} = (\cos\beta, \sin\beta)$ の内積を計算する。

補足　$\boldsymbol{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha), \boldsymbol{b} = (\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ の内積を計算すると，

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$$

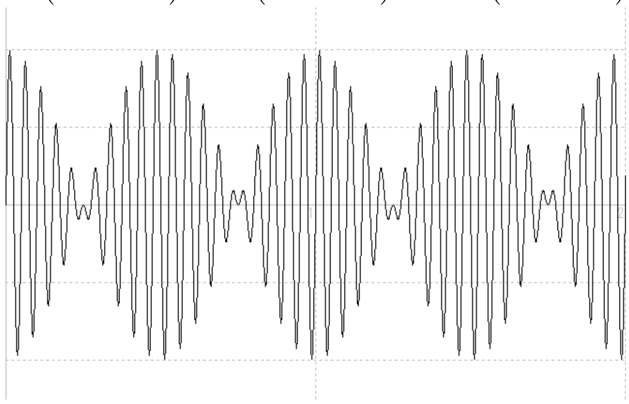
正弦の加法定理は $\sin\theta = \cos(\theta - 90^\circ)$ から導ける。

2 倍角の公式 ⋯ 正弦波交流の電力（電流∝電圧，電力＝電圧 × 電流）

半角の公式の応用 ⋯ 円周率 π の近似計算

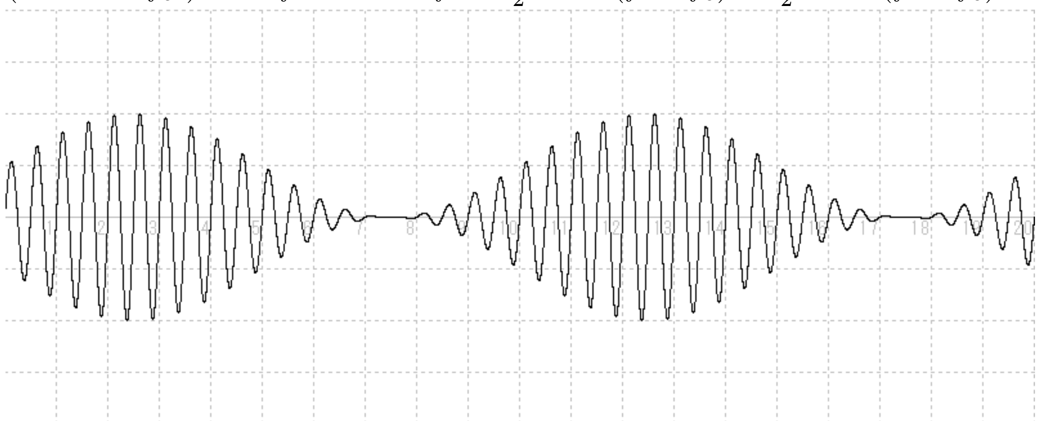
和積・積和の公式　⋯ うなり

$\sin(2\pi\times 19t) + \sin(2\pi\times 21t) = 2\sin(2\pi\times 20t)\cos(2\pi\times 1t)$



振幅変調（AM ラジオ）

$(1+\sin 2\pi f_0 t)\sin 2\pi f_c t = \sin 2\pi f_c t - \frac{1}{2}\cos 2\pi(f_c+f_0)t - \frac{1}{2}\cos 2\pi(f_c-f_0)t$



☆弧度法を用いない選択も可。

1.3.4　2 倍角の公式，半角の公式

例 23　（斜めに投げ上げた物体の到達距離）

初速度 v_0 で水平面に対し θ の角度で投げ上げた物体の t 秒後の位置 x, y は

$x = v_0 t\cos\theta, y = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$

再び水平面に戻る時刻は $y = 0$ とおいて $t = \dfrac{2v_0\sin\theta}{g}$。

このとき，水平方向の移動距離を d とすると，$d = v_0 \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g} \cos\theta$
2 倍角の公式から，$d = \dfrac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}$
初速が同じとき最も遠くに届くのは，斜め $45°$ の方角に投げ上げたとき。

例 24 正弦波交流の電力
$V = V_0 \sin\omega t$ (V) の交流電圧を $R(\Omega)$ の抵抗負荷に印加したときの消費電力 P は，$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R}\sin\omega t$ より
$P = VI = \frac{{V_0}^2}{R}\sin^2\omega t = \frac{{V_0}^2}{2R}\cdot(1-\cos 2\omega t)$
この結果から，$V = V_0 \sin\omega t$ の実効電圧は $\dfrac{V_0}{\sqrt{2}}$。

1.3.5　単振動の合成

$a\cos\ \theta\ + b\sin\ \theta\ = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\ \theta\ -\ \alpha\ )$，ただし，$\alpha$ は (a,b) の偏角
なぜなら，$a\cos\ \theta\ + b\sin\ \theta\ = (a,b)\cdot(\cos\theta, \sin\theta)$
$|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}, |(\cos\theta,\sin\theta)| = 1, (a,b)$ と $(\cos\theta, \sin\theta)$ のなす角は $|\ \theta\ -\ \alpha\ |$。

2　数列

2.1　数列と項

数を 1 列に並べたものを**数列**といい，数列のそれぞれの数を**項**という。
数列の第 n 番目の数を　第 n 項という。第 1 項は初項ともいう。
数列を一般的に表すとき，項の番号を右下に小さく書いて
$a_1, a_2, a_3, \cdots$
のように書く。この数列をまとめて，$\{a_n\}$ とも書く。
注意　数列を $\{a_n\}$ の形に書くのが慣習であるが，数列 $\{a_n\}$ と集合 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ は異なる。
$a_n = (-1)^2$ （$n = 1, 2, 3, \cdots$） のとき
数列 $\{a_n\}$ は
$1, -1, 1, -1, 1, \cdots$
であり，集合 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\} = \{1, -1\}$ である。

2.2　数列の和

数列 $\{a_n\}$ に対し，$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ を $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ で表す。

2.2.1 Σの性質

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=cn$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+a_n$

2.2.2 数列の和

数列の和 $\Sigma\ k$

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

数列の和 $\Sigma\ k^2$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

証明

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ は n の 3 次式になると予想を立て，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=n^3$ となるときの a_n を求めてみる。

$n\geqq 2$ のとき，$\displaystyle a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$

$n=1$ のときも含め $a_n=3n^2-3n+1$ とおくと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=n^3$

すなわち，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2-3k+1\right)=n^3$

$\displaystyle 3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=n^3$

$\displaystyle 3\sum_{k=1}^{n}k^2=n^3+3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=n^3+\frac{3}{2}n(n+1)-n=n\left(n^2+\tfrac{3}{2}n+\tfrac{1}{2}\right)$

$\displaystyle\therefore\sum_{k=1}^{n}k^2=\tfrac{1}{3}n(n+\tfrac{1}{2})(n+1)$

☆ $\Sigma\ k^2$ の公式を導く手法は他にもある。上の手順に限定しない。

2.3 階差数列

階差数列

数列 $\{a_n\}$ に対し，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{n+1} - a_n)\ (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

が成立する。

数列 $\{a_n\}$ に対し，$b_n = a_{n+1} - a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の階差数列という。

数列の和の階差

数列 $\{a_n\}$ に対し，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$a_1 = S_1$，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$。

例題 25 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = n^4$ となるような数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

解. $a_1 = 1^4 = 1$
$a_{n+1} = (n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$
$\therefore n \geqq 2$ のとき，$a_n = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$
$n = 1$ のときの結果と，$n \geqq 2$ のときの結果をまとめて
答　$a_n = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ □

練習 26 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ を n の式で表せ。

2.4 漸化式

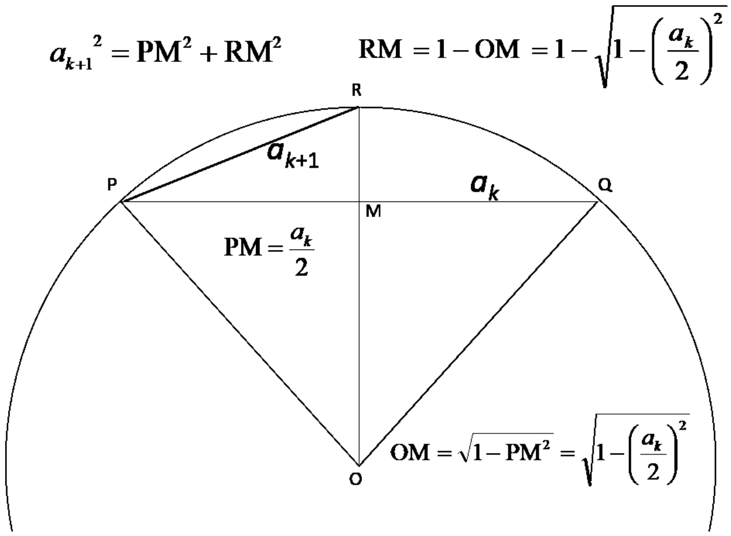
漸化式で表すと計算可能になることを学ばせる。
一般項を求めることを目的としない。
再帰的な問題解決手法の有用性を知ることが目的。

例題 27 平面上に，どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も一点で交わることのない n 本の直線によって平面はいくつの部分に分けられるか。

解. n 本の直線によって分けられる部分の数を a_n とすると，$a_1 = 2$，$a_{n+1} = a_n + (n-1)$。
$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n = n - 1$。
$n \geqq 2$ のとき，$a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$。
$a_1 = 2$ だから，$a_n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ は $n = 1$ のときも成り立つ。 □

例 28 円周率 π の近似

半径 1 の円に内接する正 2^k 角形の 1 辺の長さを a_k として，a_{k+1} を a_k で表す。



$a_2 = \sqrt{2}, \quad a_{k+1}{}^2 = \left(\dfrac{a_k}{2}\right)^2 + \left\{1 - \sqrt{1-\left(\dfrac{a_k}{2}\right)^2}\right\}^2$

半径 1 の円に内接する正 2^k 角形の辺の長さの和の半分を l_k とすると $l_k = 2^{k-1}a_k$。

$s_k = a_k{}^2$ とおくと，

$s_2 = 2, \quad s_{k+1} = \dfrac{s_k}{4} + \left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{s_k}{4}}\right)^2$

$l_k = 2^{k-1}\sqrt{s_k}$

次のプログラムは l_3〜l_{30} を計算する。

```
10 LET s=2
20 FOR k=3 TO 30
30    LET s=s/4+(1-SQR(1-s/4))^2
40    let l=2^(k-1)*SQR(s)
50    PRINT k,l
60 NEXT k
70 END
```

l_{25} の計算結果は 3.14159265358979

練習 29 $p_n = 2^n \sin\dfrac{\pi}{2^n}$，$q_n = 2^n \tan\dfrac{\pi}{2^n}$ とするとき，
$p_2 = 2\sqrt{2}, q_2 = 4$，$q_{n+1} = \dfrac{2p_nq_n}{p_n+q_n}$，$p_{n+1} = \sqrt{p_nq_{n+1}}$ であることを示せ。（円周率 π の値を近似計算するのに有用な漸化式である）

2.5　区分求積

区分求積の考え方とその有用性を学ぶ。

和の公式を使うのは，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ の程度に留め，一般に数値計算で求積が可能となることを示す。

例題 30 曲線 $y=x^2$，x 軸，2 直線 $x=a, x=b$ で囲まれる部分の面積

例題 31 曲線 $y=\frac{1}{x}$ と x 軸，直線 $x=1, x=2$ で囲まれる領域の面積

```
100 DEF f(x)=1/x
110 LET a=1
120 LET b=2
130 LET n=100000
140 LET S=0
150 LET x=a
160 LET dx=(b-a)/n
170 FOR k=0 TO n-1
180 LET S=S+f(x)*dx
190 LET x=x+dx
200 NEXT k
210 PRINT S
220 END
```

2.5.1 錐体の体積，球の体積

例題 32 単位球の体積
単位球 $x^2+y^2+z^2=1$ を x 軸に垂直な平面で分割し，円柱で近似する。
半球（$x \geqq 0$）の体積を計算し，最後に 2 倍する。
$x_k=\frac{k}{n}$ とする。$x=x_k$ における球の切り口は半径 $\sqrt{1-x^2}$ の円。
内側の円柱の体積の和は

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi\left(1-x_k^2\right)}{n}=\frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1}\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=\pi\left(1-\frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2\right)=\pi\left\{1-\frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{3} n(n-\frac{1}{2})(n-1)\right\}$$

外側の円柱の体積の和は

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi\left(1-x_k^2\right)}{n}=\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n}\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=\pi\left(1-\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2\right)=\pi\left\{1-\frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{3} n(n+\frac{1}{2})(n+1)\right\}$$

$n \to \infty$ の極限を考えて半球の体積は $\dfrac{2}{3}\pi$

定理 33 半径 r の球の体積は $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

3　関数

3.1　関数

集合 S の各要素に対しちょうど 1 つの実数を対応させる規則があるとき，この規則を S を定義域とする**関数**，あるいは，S 上で定義された関数という。

関数 f が S を定義域とする関数であるとき，S の要素 x に対し定まる実数を $f(x)$ で表す。

関数の表し方

集合 S の要素を x で表し，x に対し定まる実数を y で表して，y を x の式で書いて関数を表すことが多い。

たとえば,「関数 $y = x^2 + 3x + 1$」は，x に対し $x^2 + 3x + 1$ を対応させる関数を表す。

また，この関数を f で表すとき,$f(x) = x^2 + 3x + 1$ である。関数

関数記号 $f(x)$

3.1.1　2 次関数・2 次方程式

未定定数を含む問題

例題 34 関数 $y = 2x^2 + 4x + k$ の最大値が 2 であるときの定数 k の値を求めよ。

例題 35 $x = 0$ のとき $y = 1$，$x = 2$ のとき $y = 1$，$x = 3$ のとき，$y = 7$ であるような 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ を求めよ。

例題 36 2 次関数 $y = 2x^2 + x + k$ のグラフが x 軸と 2 点で交わるときの k の値の範囲を求めよ。

必要条件・十分条件

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$

$D > 0 \Leftrightarrow$ 解 2 個

$D = 0 \Leftrightarrow$ 解 1 個

$D < 0 \Leftrightarrow$ 解なし

2 次関数

2 次関数 $f(x) = ax^2+bx+c$ を $f(x) = a(x-x_0)^2+q(x-x_0)+r$ の形に書くと $s = f(x_0)$ であって，$x \fallingdotseq x_0$ のとき $f(x) \fallingdotseq r(x - x_0) + f(x_0)$。

3.1.2　3 次関数

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を $f(x) = a(x - x_0)^3 + q(x - x_0)^2 + r(x - x_0) + s$ の形に書くと $s = f(x_0)$ であって，$x \fallingdotseq x_0$ のとき $f(x) \fallingdotseq r(x - x_0) + f(x_0)$。

3.1.3　極限

x を x_0 に限りなく近づけたとき $f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくとき，α を x が x_0 に近づくときの $f(x)$ の極限といい，

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

で表す。

3.1.4　微分係数

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能であるという。そして，その値を $f(x)$ の $x = x_0$ における微分係数といい，$f'(x_0)$ で表す。

3 次関数 $f(x) = a(x - x_0)^3 + q(x - x_0)^2 + r(x - x_0) + s$ の $x = x_0$ における微分係数は $f'(x_0) = r$ である。

$f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能であれば，$x \fallingdotseq x_0$ のとき $f(x) \fallingdotseq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$。

3.1.5　導関数

x に $f'(x)$ を対応させる関数を $f(x)$ の導関数という。

$x - x_0$ を $\Delta\ x$ で，$f(x) - f(x_0)$ を $\Delta\ y$ で表すと，

$$f'(x) = \lim_{\Delta\ x \to 0} \frac{\Delta\ y}{\Delta\ x} = \lim_{\Delta\ x \to 0} \frac{f(x + \Delta\ x) - f(x)}{\Delta\ x}$$

$y = f(x)$ のとき，導関数を y'，$f'(x)$，$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d}{dx}f(x)$ などの記号で表す。

導関数の公式

(1) $f(x) = c$（c は定数）のとき，$f'(x) = 0$

(2) $f(x) = x$ のとき，$f'(x) = 1$

　　$f(x) = x^2$ のとき，$f'(x) = 2x$

　　$f(x) = x^3$ のとき，$f'(x) = 3x^2$

(3) $y = f(x) + g(x)$ のとき，$y' = f'(x) + g'(x)$

(4) $y = kf(x)$（k は定数）のとき，$y' = kf'(x)$

(5) $y = f(ax + b)$ のとき，$y = af'(ax + b)$

3.1.6　関数値の増加・減少

増加，減少，極大，極小（おおむね 3 次関数までの範囲で考える）

増減表

☆検討課題　因数分解の技能をどこまで求めるか？

3.1.7　原始関数

次の定理を（証明抜きで）仮定する。
定理　（実数の）ある区間で $f'(x)=0$ であれば，その区間で $f(x)$ は定数である。
☆　平均値の定理から導けるが，証明は後回し。
この定理から次のことが分かる。
$F'(x)=f(x)$ となる $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。
$F(x)$ と $G(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，ある定数 C が存在して $F(x)=G(x)+C$。
また，次のことも成り立つ。
$F'(x)=f(x), G'(x)=g(x)$ であれば，$F(x)+G(x)$ は $f(x)+g(x)$ の原始関数。
k を定数とするとき，$F'(x)=f(x)$ であれば，$kF(x)$ は $kf(x)$ の原始関数。

例 37 $F(x)=x^2$ のとき $F'(x)=2x$ なので関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ は関数 $y=x$ の原始関数。

例 38 $f'(x)=ax+b$ のとき，ある定数 C が存在して $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx+C$

3.1.8　速度，加速度

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標を x とするとき，$\frac{dx}{dt}$ を動点 P の速度という。
$v=\frac{dx}{dt}$ とおくとき，$\frac{dv}{dt}$ を $\frac{d^2x}{dt^2}$ で表し，動点 P の加速度という。

例 39 （等加速度運動）
数直線上を定加速度 a で移動する物体の時刻 $t=0$ における速さを $v=0,$ 位置を $x=0$ とする。
$\frac{dx}{dt}=v=at$ より $x=\frac{1}{2}at^2$。
$2ax=a^2t^2=(at)^2=v^2$
初速 0 で定速度 a で移動する物体の t 秒間の移動距離を s，t 秒後の速度を v とすると，$2as=v^2$。

3.1.9　球の表面積

半径 r の球の表面積を $S(r)$, 体積を $V(r)$ とすると，
$\Delta r>0$ のとき，$S(r)\leqq \dfrac{V\ (r+\Delta r)}{\Delta r}\leqq S(r+\Delta r)$
$\therefore V'(r)=S(r)$
$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ より $S(r)=4\pi r^2$

4　指数・対数

☆底が 10 の場合の指数の拡張，常用対数，対数グラフは中学校で学ぶことを想定。

4.1　指数

4.1.1　累乗根

$a \geqq 0$ とする。自然数 n に対し，$x^n = a$ となる x がただ一つ定まる。その x を $\sqrt[n]{a}$ で表す。

累乗根の性質　$a > 0$ とする。m, n, k は自然数。

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(2) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

(4) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$

(4) の証明　$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[k]{a^m}\right)^k} = \sqrt[n]{a^m}$

4.1.2　指数の拡張

$a > 0$ とする。自然数 n に対し，

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

と定め，m, n が互いに素（$\frac{m}{n}$ が既約分数）であるとき，

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

と定める。上の (4) より，$\frac{m}{n}$ が既約分数でないときにもこの等式が成立する。

さらに，正の有理数 q に対し，

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q}$$

と定める。

指数法則

a, b を正の数，p, q を有理数とする。

$a^p a^q = a^{p+q}$，$(a^p)^q = a^{pq}$

$(ab)^p = a^p b^p$

指数関数 a^x

☆ 証明は難しい。伝統的に直観的に正しいと認めて議論を進めている。

$a > 0$ とする。実数 x に対し，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となる有理数列 $\{x_n\}$ をとり，$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$ とする。

$\{x_n\}$ として x を表す無限小数を選んで定義とする。

指数法則

a, b を正の数とする。

$a^x a^y = a^{x+y}$，$(a^x)^y = a^{xy}$

$(ab)^x = a^x b^x$

大小関係

$a > 1$ のとき $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$

$0 < a < 1$ のとき $x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$
(大小関係は $(a^x)' = a^x \log_e a$ から導ける。)

4.1.3　対数

$a > 0, a \neq 1$ とする。
正の数 M に対し，$a^x = M$ となる x を $\log_a M$ で表す。

対数法則
a, b, M, N を正の数とする。ただし，$a \neq 1, b \neq 1$ とする。
(1) $\log_a 1 = 0$
(2) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
(3) $\log_a M^x = x \log_a M$
(4) $a^{\log_a M} = M$
(5) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$, 特に，$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

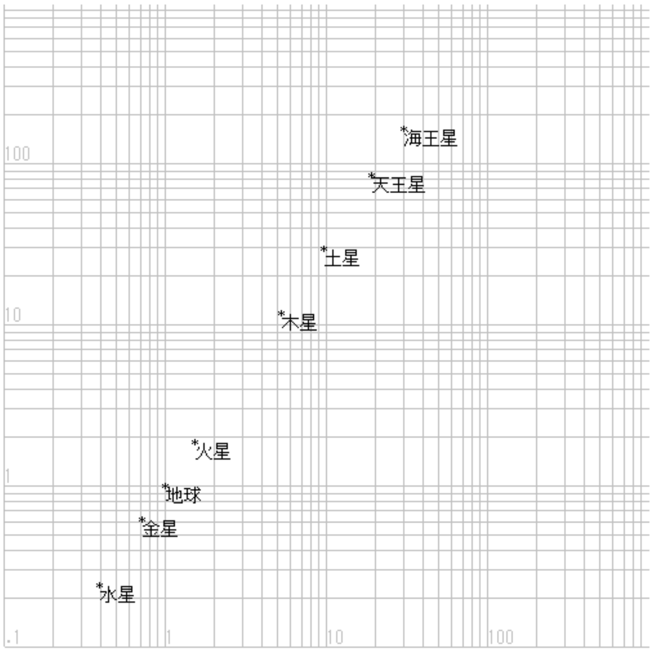
4.1.4　対数グラフ

片対数グラフ　縦軸のみ対数
指数関数 $y = a^x$ のグラフは原点を通る直線

例 40 新型コロナ感染者数を横軸に週，縦軸に週間の感染者数。

両対数グラフ　縦軸，横軸ともに対数。
$y = x^a$ のグラフは原点を通る傾き a の直線。

例 41 惑星の軌道半径（横軸）と公転周期（縦軸）（地球を 1 とする）



公転周期 $\propto$ 軌道半径 $^{\frac{3}{2}}$

4.1.5　科学・技術・文化と対数

水素イオン指数 pH

水溶液 1L 中の水素イオンの個数を水素イオン濃度といい，$[H^+]$ で表す。同様に，水溶液 1L 中の水酸化物イオンの個数を水酸化物イオン濃度といい，$[OH^-]$ で表す。通常，どちらも個数はモルを単位として測り，mol/L を単位とする。

水温が 25°C のとき，$[H^+]\times[OH^-]=1.0\times10^{-14}$ $(\mathrm{mol/L})^2$ であることが知られている。

$-\log_{10}[H^+]$ を水素イオン指数といい，pH で表す。すなわち，pH$=-\log_{10}[H^+]$。

同様に，$-\log_{10}[OH^-]$ を pOH で表す。

練習 42 水温が 25°C のとき，pH=pOH であると，pH=7 であることを示せ。

練習 43 pH=6 である溶液の水素イオン濃度を求めよ。

練習 44 水素イオン濃度が 0.001 mol/L の塩酸水溶液のｐＨを求めよ。

星の明るさ（等級）

練習 45 1 等星は 6 等星の 100 倍明るい。星の明るさの等級は同じ比率となるように定められている。明るさの等級が 1 つ違うとき，明るさは何倍であるか。

平均律音階

練習 46 平均律音階は，ド，ド＃，レ，レ＃，ミ，ファ，ファ＃、ソ，ソ＃，ラ，ラ＃，シの 12 音の周波数が等比数列となるように定めたものである。シの次のド（上のド）は，（下の）ドの 2 倍の周波数を持つ。ソは，ドの何倍の周波数を持つか。

5　代数（集合と論理，数と式，関数，方程式，不等式）

5.1　数

5.1.1　実数

整数 m, n を用いて $\dfrac{m}{n}$ の形に表される数を有理数という。ただし，$n \neq 0$ とする。
有理数が無限小数となるとき，循環小数となる。
循環しない無限小数が表す数を無理数という。
有理数と無理数を合わせて実数という。
実数には次の性質がある。
実数 a に対し，$a + 0 = a, a \times 1 = a$。
実数 a, b に対し，$a + b, a - b, a \times b$ は実数である。
$b \neq 0$ のとき，$\dfrac{a}{b}$ は実数である。ただし，$\dfrac{a}{b}$ は $a = bx$ となる x を表す。
$a + (b + c) = (a + b) + c$ (結合法則)
$ab = ba$ (交換法則)
$a(b + c) = ab + bc$ (分配法則)
☆無限小数を含めて小数で表される数が実数であるが，ここに「数」の定義はない。長さなどの量を測るための手段として拡張されたきた先験的な「数」が念頭にある。無限小数を実数と呼ぶ立場だと，無限小の存在を否定して，差が限りなく小さい 2 小数を同一視したものが実数。どちらにしても，実数に加減乗除を定義して上記諸法則の成立を証明するのは簡単ではない。

5.1.2　絶対値

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{のとき}) \end{cases}$$

$|a|$ は，実数 a を数直線上に図示したとき，a が表す点と原点の距離である。
$|a| \geqq 0$，$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$，$|-a| = |a|, \sqrt{a^2} = |a|$
☆ $|a| = \sqrt{a^2}$ を絶対値の定義とすべきかもしれない。
☆中学校では，絶対値は負数から符号を除去したもの，すなわち，数の表現に対する操作。高校での絶対値は，数に対する演算（数の表現に立ち入らないで定義される)。

5.1.3　平方根

平方根
$x^2 = a$ となる x を a の平方根という。
$a > 0$ のとき a の平方根は正負ひとつずつあり，a の正の平方根を $\sqrt{a}$ で表す。
また，0 の平方根は 0 であり，$\sqrt{0} = 0$ とする。

根号の計算　a, b を正の数とするとき $\sqrt{a^2} = a$,　　$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
平方数を括り出す　　$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$
例　$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

分母の有理化

分母に根号のある分数は，分母，分子に同じ数を掛けて分母に根号のない形にしておくと都合のよいことがある。

例　$\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

☆ $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ の分母の有理化や，2 重根号の除去などは，必要になってから学ぶことにする。

5.2　連立一次方程式

2 元連立一次方程式は次のいずれかの方法によって代数的に解ける。ただし，未知数を x,y とする。

① 2 つの方程式を $y=ax+b$,$y=cx+d$ の形に変形し，$ax+b=cx+d$ に帰着させる。この考え方は，2 つの方程式を一次関数とみなして，関数値が一致するときの x を求める考え方。

② 1 つ目の方程式を $y=ax+b$ の形に変形し，2 つ目の方程式に代入して x のみの方程式を作る。

③ 加減法

3 元連立方程式は座標平面上に図示することができないけれども，上の①〜③のいずれかの方法によって 2 元連立一次方程式の問題に帰着させることができる。

観察 47 異なる 2 個の x の値に対する y の値が定まると 1 次関数 $y=ax+b$ が定まる。同様に，相異なる 3 個の x の値に対する y の値が定まると 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ が定まる。（正確には，それぞれ，1 次以下，2 次以下）

5.3　集合と論理

5.3.1　条件命題

方程式や不等式のように変数を含む数学文を条件命題（あるいは，単に，条件）という。

変数 x を含む条件命題を $P(x),Q(x)$ などと表す。

5.3.2　集合

集合の内包的定義　$P(x)$ を満たす x 全体の集合を $\{x|P(x)\}$ で表す。

集合の外延的定義　要素を書き並べ { } で括って集合を表す。　例　方程式 $x^2-3x+2=0$ を満たす x 全体の集合の内包的定義は $\{x|x^2-3x+2=0\}$, 外延的定義は $\{1,2\}$

x が集合 A の要素であることを $x\in A$ で表し，x は A に属するという。

例　$2\in\{x|x^2-3x+2=0\}$

一般に，x に関する条件命題 $P(x)$ に対し，$A=\{x|P(x)\}$ のとき，$a\in A$ であれば $P(a)$ が成立し，逆に，$P(a)$ が成立すれば，$a\in A$ である。

5.3.3　集合の包含関係

集合 A の要素がすべて集合 B の要素であることを $A\subset B$ で表す。
$A\subset B$ を $B\supset A$ と書くこともある。
$A\subset B$ であるとき，A は B の部分集合であるという。

集合の相等

$A\subset B$ かつ $A\supset B$ のとき，$A=B$ である。
つまり，2 つの集合 A,B について，$A=B$ は $A\subset B$ かつ $A\supset B$ を意味する。

5.3.4　論理

$P(x),Q(x)$ を変数 x に関する条件命題とする。
$P(x)$ を満たすすべての x に対し $Q(x)$ が満たされることを，$P(x)\Rightarrow Q(x)$ と書く。
$P(x)\Rightarrow Q(x)$ は，$\{x|P(x)\}\subset\{x|Q(x)\}$ を意味する。
集合 A,B に対し，$A\subset B$ は $x\in A\Rightarrow x\in B$ を意味する。
$P(x)\Rightarrow Q(x)$ を $Q(x)\Leftarrow P(x)$ とも書く。
$P(x)\Rightarrow Q(x)$ と $P(x)\Leftarrow Q(x)$ の双方が成立することを，$P(x)\Leftrightarrow Q(x)$ で表す。
$A=\{x|P(x)\}$ のとき，$x\in A\Leftrightarrow P(x)$

5.3.5　$\cap$ と $\cup$

集合 A と集合 B のいずれの要素でもあるもの集合を $A\cap B$ で表し，A と B の共通部分という。
集合 A と集合 B の少なくとも一方の要素であるものの集合を $A\cup B$ で表し，A と B の合併集合という。
$A\cap B=\{x|x\in A$ かつ $x\in B\}$
$A\cup B=\{x|x\in A$ または $x\in B\}$

5.3.6　空集合

２つの集合 $A\,B$ に共通の要素がないときでも $A\cap B$ が意味をもつように要素を一つももたない集合「空集合」を導入する。
空集合を $\varnothing$ で表す。すなわち，$\varnothing=\{\ \}$。
例 $\{1,2\}\cap\{3,4,5\}=\varnothing$
任意の集合 A に対して，$\varnothing\subset A$

5.3.7 補集合

全体集合

ある集合 U の部分集合のみを考えるとき，U を全体集合という。

補集合

全体集合 U の部分集合 A に対し，U の要素で A の要素でないものの全体を A の補集合といい，$\overline{A}$ で表す。

すなわち，$\overline{A} = \{x | x \in U$ かつ $x \notin A\}$。ただし，$x \notin A$ は $x \in A$ でないことを表す。

補集合の性質

$A \cup \overline{A} = U$，$A \cap \overline{A} = \varnothing$，$\overline{\overline{A}} = A$

$\overline{\varnothing} = U, \overline{U} = \varnothing$

ド・モルガンの法則

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

☆全体集合が有限集合のとき上記諸性質が成立するのは明らかであるが，全体集合が無限集合の場合には，論理に関する法則として 2 重否定の法則や排中律が必要。高校数学では，有限世界で成立する上記諸法則が無限の世界でも成り立つものとして考える。

5.3.8 集合の要素の個数

集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す。

$A \cap B = \emptyset$ のとき $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$。

一般に，$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$。

全体集合を U とするとき，$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$。

5.4 順列・組合せ，場合の数

$$n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)\cdots\{n-(r-1)\} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

組合せの数の漸化式　組合せの意味を考えて，

${}_n\mathrm{C}_0 = 1$，${}_n\mathrm{C}_n = 1$，${}_n\mathrm{C}_r =_{n-1} \mathrm{C}_{r-1} +_{n-1} \mathrm{C}_r \ (0 < r < n)$

5.4.1 二項定理

2 項式の展開

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-k}b^k$ の係数を $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ で表し，2 項係数という。

$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$,

$0 < k < n$ のとき $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}$ （パスカルの三角形）

これは，組合せの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ と同一の漸化式。だから，$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} ={}_n \mathrm{C}_r$。

$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots +{}_n \mathrm{C}_k a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-k}b^k$$

例題 48 $f(x) = x^n$ （$n = 1, 2, 3, \cdots$） のとき，$f'(x) = nx^{n-1}$

6　統計

☆ベクトル，Σ，平方完成など既習事項を駆使して学ぶ。

6.1　期待値・分散

6.1.1　代表値

N 個の数値 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ に対し，
相加平均 $\overline{x} = \dfrac{1}{N}(x_1 + x_2 + \cdots + x_N)$,
相乗平均 $\sqrt[N]{x_1 x_2 \cdots x_N}$,
調和平均 $\dfrac{1}{\frac{1}{N}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_N}\right)}$,
2 乗平均平方根値 $\sqrt{\dfrac{1}{N}\left({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + x_N^2\right)}$
対象を正の数とするとき，
　2 乗平均平方根値 ≧ 相加平均 ≧ 相乗平均 ≧ 調和平均
の関係がある。
たとえば，正の 2 数 a, b に対して
$\dfrac{1}{2}(a^2 + b^2) - \left\{\dfrac{1}{2}(a+b)\right\}^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - 2ab}{4} = \frac{1}{4}(a-b)^2 \geqq 0$ なので，
$\sqrt{\dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)} \geqq \dfrac{1}{2}(a+b)$

6.1.2　散布度

標準偏差

N 個の数値 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ に対し，

$s_x = \sqrt{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2}$ を標準偏差という。
標準偏差は，偏差 $x_k - \overline{x}$ の 2 乗平均平方根値。
${s_x}^2 = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2$ を分散という。
$\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2 = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\left({x_k}^2 - 2\overline{x}x_k + \overline{x}^2\right) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}{x_k}^2 - \overline{x}^2$
すなわち，分散$=x^2$ の平均 $-($ 平均 $)^2$
${s_x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$

6.1.3　データの標準化

$z = \dfrac{x - \overline{x}}{s_x}$ の式を用いて変換すると，$\overline{z} = 1$，$s_z = 1$。

6.2　2 変量の統計

2 次元集計表や散布図は中学校で学ぶことを想定。

6.2.1　2 次元度数分布

$x_0 < x_1 < \cdots < x_m$，$y_0 < y_1 < \cdots < y_n$ とする。区間 $[x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$ にある点 (x, y) の個数を a_{ij} で表すとき，
区間 $[x_i, x_{i+1})$ にある点の個数は $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}$，区間 $[y_{j-1}, y_j)$ にある点の個数は $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$

6.2.2　相関係数

ある集団に属する 2 つの変量 x, y について，その値の組を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ $, \dots, (x_N, y_N)$ とする。
$r = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{(x_k - \overline{x})}{s_x}\dfrac{(y_k - \overline{y})}{s_y}$ を x と y の相関係数という。
$s_{xy} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})$ とおくと，$r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$
s_{xy} を x, y の共分散という。

命題 49 $-1 \leqq r \leqq 1$

証明. $-1 \leqq r \leqq 1$ を示すために，$-s_x s_y \leqq s_{xy} \leqq s_x s_y$ を示す。
$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ に対し，
$|\boldsymbol{a}|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，$|\boldsymbol{b}|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$
と定めるとき，コーシー・シュワルツの不等式　$-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \leqq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \leqq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$　が成立することを利用する。

$|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \geqq 0$ を示せばよい。

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2=x^2\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2x\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2 \geqq 0$ だから，x に関する 2 次方程式 $\displaystyle x^2\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2x\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2=0$ の解は高々 1 つなので，判別式を D として

$$\frac{D}{4}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\right)\leqq 0$$

$$\therefore \left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\right)$$

この不等式において，$a_k=x_k-\overline{x}$，$b_k=y_k-\overline{y}$ とおいて N^2 で割ると，

$$\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})\right\}^2 \leqq \left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2\right\}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k-\overline{y})^2\right\}$$

$\therefore {s_{xy}}^2 \leqq {s_x}^2{s_y}^2$

$\therefore -s_xs_y \leqq s_{xy} \leqq s_xs_y$ □

6.2.3 回帰直線

最小 2 乗法

ある集団に属する 2 つの変量 x, y について，その値の組を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_N, y_N)$ とする。

一次関数 $y=ax+b$ で変量 x の値から y の値を推定したい。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\{y_k-(ax_k+b)\}^2$ が最小となるように a, b を定める。

$\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}{x_k}^2={s_x}^2+\overline{x}^2$，$\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}{y_k}^2={s_y}^2+\overline{y}^2$，$\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_ky_k=s_{xy}+\overline{xy}=rs_xs_y+\overline{xy}$ に注意すると，

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\{y_k-(ax_k+b)\}^2=\{b-(\overline{y}-a\overline{x})\}^2+{s_x}^2\left(a-r\frac{s_y}{s_x}\right)+{s_y}^2(1-r^2)$$

と変形できるので，

$\displaystyle a=r\frac{s_y}{s_x}$，$b=\overline{y}-a\overline{x}$ と定めると $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\{y_k-(ax_k+b)\}^2$ が最小になる。

y の x への回帰直線

直線 $\displaystyle y=r\frac{s_y}{s_x}(x-\overline{x})+\overline{y}$ を y の x への回帰直線という。

7 確率・確率分布

条件付き確率，独立反復試行の確率（2 項分布），期待値，分散。

☆連続分布を扱わない。

☆事象の独立を扱わない（試行の独立の直観的定義と確率変数の独立にとどめる）。

7.1 事象と確率

7.1.1 事象

試行	同じ条件のもとで何回でも繰り返すことが可能な実験・観察。
全事象	試行の結果として起こり得る結果の全体。(「事象の全て」ではない)
事象	試行の結果起こること。全事象の部分集合として表す。
根元事象	1 個の要素だけからなる事象。

例 1　1 個のさいころを振って出る目の数を調べるとき，全事象は {1,2,3,4,5,6} 。
偶数の目が出る事象は，その部分集合 {2.4.6} 。
根元事象は，{1},{2},{3},{4},{5},{6} の 6 個。

排反事象　事象 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ が排反であるとは，$i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \emptyset$

7.1.2 確率

確率は，指定された事象の起こりやすさを全体を 1 とする割合で表す数値である。
ある試行において事象 A の起こる確率を $P(A)$ で表す。

同程度に確からしいとき

全事象 U に属する根元事象のいずれもが同程度に確からしいとき，

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

同程度に確からしいとは限らないとき（統計的確率）

全事象 U の根元事象を $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ とする。すなわち，$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ は排反で，$U = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$，$n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = \cdots = n(A_n) = 1$ とする。

各根元事象の確率 $P(A_k) \quad (k = 1, 2, 3, \cdots, n)$ が定まり，各 $P(A_k)$ は，

$$P(A_k) \geqq 0 \quad (k = 1, 2, 3, \cdots, n), \qquad \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$$

を満たすものとする。

このとき，事象 A の確率 $P(A)$ を

$$P(A) = \sum_{x \in A} P(\{x\})$$

で定める。ただし，$\displaystyle\sum_{x \in A} P(\{x\})$ は，A のすべての要素 x に対し $P(\{x\})$ を加えたものを表す。

Note1. 根元事象の確率は，比 $P(A_1) : P(A_2) : \cdots : P(A_n)$ が指定されていればよい。$P(A_1) : P(A_2) : \cdots : P(A_n) = p_1 : p_2 : \cdots : p_n$ と指定されたとき，$P(A_k) = \dfrac{p_k}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j}$ である。

例　実験・観察によって観測された回数の相対度数を，起こりやすさと考えて，各根元事象の確率と呼ぶ。

Note2. 同程度に確からしい場合の確率の定義は，$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n)$ と定めた特別な場合である。

確率の基本性質

U を全事象とする。

$p(U) = 1, P(\emptyset) = 0$

$A \subset U$ に対し，$0 \leqq P(A) \leqq 1$

$A \cap B = \emptyset$ のとき $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

余事象の確率

$A \subset U$ に対し，$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

7.1.3　条件付き確率

$B \subset U$ とする。B を全事象とするときの事象 $A \cap B$ の確率を $P_B(A)$ で表し，事象 B が起きたときの事象 A の条件付き確率という。

確率の定義から次の等式が導かれる。

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

例　ジョーカー 1 枚を含む 53 枚のトランプのカードから 1 枚のカードを取り出す試行を考え，絵札を取り出す事象を A，スペードのカードを取り出す事象を B とする。このとき，$P(B) = \frac{13}{53}, P(A \cap B) = \frac{3}{53}, P_B(A) = \frac{3}{13}$ なので，上の等式が成立している。

乗法定理　$P_B(A)$ と $P(B)$ が分かっているとき $P(A \cap B)$ を求めることができる。

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

例題 50 ある感染症は，感染率は 4 %であるという。検査で非感染者を陰性と正しく判定する確率が 98 %，感染者を正しく陽性と判定する確率が 99 %である。検査で陽性であったとき，感染者である確率を求めよ。

一人の人を選んだとき，感染者である事象を A，検査で陽性と判定される事象を B とする。

題意より，

$P(A) = 0.04$，$P(\overline{A}) = 1 - 0.04 = 0.96$，$P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0.98 = 0.02$，$P_A(B) = 0.99$。

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0.96 \times 0.02 = 0.0192$

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0.04 \times 0.99 = 0.0396$

$\therefore P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0.0588$

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.0396}{0.0588} \fallingdotseq 0.67$　答 約 67 %

7.1.4　独立試行

２つの試行 T_1，T_2 は，どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき，独立であるという。

試行 T_1 の全事象を U_1，試行 T_2 の全事象を U_2 とするとき，試行 T_1，T_2 が独立であるとき，試行 T_1 で事象 A，試行 T_2 で事象 B が起こる確率は，$P_{U_1}(A)\times P_{U_2}(B)$ である。

☆丁寧に説明すると，$U_1=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},U_2=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ とするとき，直積 $U_1\times U_2$ の各根元事象 $\{(x_i,y_j)\}$ の確率が,

$j=1,2,\cdots,n$ に対し

$P\{(x_1,y_j)\}:P\{(x_2,y_j)\}:\cdots:P\{(x_m,y_j)\}=P_{U_1}(\{x_1\}):P_{U_1}(\{x_2\}):\cdots:P_{U_1}(\{x_n\})$,

$i=1,2,\cdots,m$ に対し

$P\{(x_i,y_1)\}:P\{(x_i,y_2)\}:\cdots:P\{(x_i,y_n)\}=P_{U_2}(\{y_1\}):P_{U_2}(\{y_2\}):\cdots:P_{U_2}(\{y_n\})$

となることから，$P\{(x_i,y_j)\}=P_{U_1}(\{x_i\})\times P_{U_2}(\{y_j\})$ が導かれる。

7.1.5　独立反復試行の確率

成功確率 p の独立試行を n 回行うとき、ちょうど k 回成功する確率は ${}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}$

7.2　確率変数と確率分布

☆　連続分布を扱わない。つまり，値域が有限集合であるような確率変数を考察の対象とする。

7.2.1　確率変数と確率分布

全事象を U とする。

U の各要素に実数を対応させる関数を確率変数という。

確率変数 X の取り得る値 x に $P(\{u|X(u)=x\})$ を対応させる関数を X の確率分布という。

事象 $\{u|X(u)=x\}$ を $X=x$ で表し，$P(\{u|X(u)=x\})$ を $P(X=x)$ と略記する。

例　成功確率 p の独立試行を n 回行うとき，成功回数を X とすると，
$P(X=k)={}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}$

7.2.2　検定

検定論の本質は，ある分布に従う確率変数 X に対し，$P(a\leqq X\leqq b)=1-\alpha$ となる 2 数 a,b を定めることである。（確率変数 X が主語のように見えるが，本当の主語は確率分布）

2 項分布などでは，コンピュータによる計算で，そのような 2 数が容易に求まる。

例題　$n=180,p=\frac{1}{6}$ のとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{x} {}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^k<0.025$ となる最大の自然数 x を求めよ。

7.2.3　確率変数の期待値，分散

期待値，分散の定義

確率変数 X のとりうる値を $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$,
X の確率分布を $P(X=xi)=p_i(i=1,2,3,\ldots,n)$　とする。
$m=E(X)$ とするとき,
X の期待値 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$
X の分散 $V(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i$

期待値・分散の性質

X を確率変数とするとき，定数 a, b を用いて $aX+b$ で定義される確率変数について
$E(aX+b)=aE(X)+b$,
$V(aX+b)=a^2V(X)$
$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

7.2.4　確率変数の和と積

確率変数の和の期待値

確率変数 X, Y について，　$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

なぜなら，X が取り得る値を $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$，$Y$ が取り得る値を $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ とし，$P(X=x_i, Y=y_j)$ を p_{ij} $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n)$ と書くことにすると,

$P(X=x_i)=\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}$, $P(Y=y_j)=\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}$ だから,

$E(X)=\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}$, $E(Y)=\sum\limits_{j=1}^{n} y_i \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}$

$E(X+Y)=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_i+y_j)p_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i p_{ij}+\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} y_j p_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}+\sum\limits_{j=1}^{n} y_j \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}$
$=E(X)+E(Y)$

確率変数の積の期待値

確率変数 X, Y について，X が取り得る値を $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$，$Y$ が取り得る値を y_1, $y_2, y_3, \ldots, y_n$ とする。

すべての i, j $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n)$ に対し $P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$ が成立するとき，X と Y は**独立**であるという。

X と Y が独立であるとき，$E(XY)=E(X)E(Y)$

なぜなら,

$E(XY)=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j)=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j P(X=x_i)P(Y=y_j)$
$=\sum\limits_{i=1}^{m} x_i P(X=x_i)\sum\limits_{j=1}^{n} y_j P(Y=y_j)=\sum\limits_{i=1}^{m} x_i P(X=x_i)E(Y)=E(Y)\sum\limits_{i=1}^{m} x_i P(X=x_i)$
$=E(X)E(Y)$

確率変数の和の分散

X と Y が独立であるとき，$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

なぜなら，$V(X+Y)=E((X+Y)^2)-(E(X+Y))^2$

$=E(X^2+2XY+Y^2)-(E(X)+E(Y))^2$

$=E(X^2)-(E(X))^2+E(Y^2)-(E(Y))^2+2(E(XY)-E(X)E(Y))=V(X)+V(Y)$

確率変数の積 (3 変数)

確率変数 X,Y,Z について，X が取り得る値を $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$，$Y$ が取り得る値を $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$，$Z$ が取り得る値を $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_o$ とする。

すべての i,j,k $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n, 1 \leqq k \leqq o)$ に対し

$P(X=x_i, Y=y_j, Z=z_k)=P(X=x_i)P(Y=y_j)P(z=z_k)$

が成立するとき，X,Y,Z は**独立**であるという。

X,Y,Z が独立であるとき，X と Y は独立で，$X+Y$ と Z は独立である。

なぜなら，

$P(X=x_i, Y=y_j)=\sum\limits_{k=1}^{o} P(X=x_i, Y=y_j, Z=z_k)$

$=\sum\limits_{k=1}^{o} P(X=x_i)P(Y=y_j)P(z=z_k)$

$=P(X=x_i)P(Y=y_j)\sum\limits_{k=1}^{o} P(z=z_k)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$

$P(X+Y=x_i+y_j, Z=z_k)=P(X=x_i, Y=y_j, Z=z_k)$

$=P(X=x_i)P(Y=y_j)P(z=z_k)=P(X=x_i, Y=y_j)P(Z=z_k)$

$=P(X+Y=x_i+y_j)P(Z=z_k)$

X,Y,Z が**独立**であるとき，$V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)$

なぜなら，$V(X+Y+Z)=V(X+Y)+V(Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)$

確率変数の和の期待値・分散

4 個以上の確率変数の独立性も同様に定義する。

n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ について，

$E(X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+\ldots+E(X_n)$

さらに，$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ が独立であれば，

$V(X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+\ldots+V(X_n)$

例題 51 成功確率 p の独立試行を n 回行うとき，成功回数を X とすると

$E(X)=np, V(X)=np(1-p)$

解答 52 k 回目に成功するとき $X_k=1$, 失敗するとき $X_k=0$ とすると，

$E(X_k)=p, V(X_k)=E({X_k}^2)-(E(X_k))^2=p-p^2=p(1-p)$

$\therefore E(X)=np, V(X)=np(1-p)$

7.3 標本平均

7.3.1 標本平均の期待値と分散

平均 μ，分散 σ^2 の母集団から大きさ n の標本を復元抽出する。
k 回目に得られる値を X_k とすると，$E(X_k)=\mu$，$V(X_k)=\sigma^2$。
毎回の抽出が他の回に影響を与えないから $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ は独立である。
$\therefore E(X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n)=n\mu, \quad V(X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n)=n\sigma^2$
$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ の平均を $\overline{X}$ で表し，標本平均という。
$\overline{X}=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n)$
$E(\overline{X})=\mu$
$V(\overline{X})=\dfrac{1}{n^2}V(X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n)=\dfrac{1}{n}\sigma^2$

標本分散の期待値

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ の分散を S^2 で表し，標本分散という。すなわち，
$S^2=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{X_k}^2-(\overline{X})^2$
$V(X_k)=E({X_k}^2)-(E(X_k))^2$ より $E({X_k}^2)=V(X_k)+(E(X_k))^2=\sigma^2+\mu^2$
$V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-(E(\overline{X}))^2$ より $E(\overline{X}^2)=V(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2=\dfrac{1}{n}\sigma^2+\mu^2$
$\therefore E(S^2)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E({X_k}^2)-E((\overline{X})^2)=\dfrac{1}{n}\times n(\sigma^2+\mu^2)-\left(\dfrac{1}{n}\sigma^2+\mu^2\right)=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$

標本不偏分散

$\sigma^2=\dfrac{n}{n-1}E(S^2)=E(\dfrac{n}{n-1}S^2)$ となるので，
$U^2=\dfrac{n}{n-1}S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$ とおくと，$E(U^2)=\sigma^2$。
U^2 を標本不偏分散という。標本不偏分散は母分散の推定値として用いられる。

8　検討課題

8.1　円周角の定理

数理科学を学ぶ上で円周角の定理が要求されるのはどんな場合か？
円周角の定理の解析幾何による証明は，複素数を用いるのが簡単であるが，三角比・三角関数を用いてもできる。

三角形の外接円

三角形 ABC の外接円の半径を R，中心を O とし，∠BOC$=\alpha$，∠COA$=\beta$，∠AOB$=\gamma$ とする。 $\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$ に注意。
三角関数の諸公式（2 倍角，和 → 積）を用いて（円周角の定理によらないで）
$a=2R\sin\dfrac{\alpha}{2},\quad b=2R\sin\dfrac{\beta}{2},\quad c=2R\sin\dfrac{\gamma}{2},$
$\sin A=\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2bc}$ から $\sin A=\dfrac{a}{2R}$ を導くことができる。

$$\begin{aligned}
a+b-c &= 2R\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\\
&= 2R\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&= 2R\left\{2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\right\}\\
&= 4R\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{4}-\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\right)\\
&= 4R\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\left(2\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{4}\right)=8R\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{4}\cos\frac{\gamma}{4}
\end{aligned}$$

同様に

$$a+b+c=8R\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\beta}{4}\cos\frac{\gamma}{4}$$
$$-a+b+c=8R\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{4}\sin\frac{\gamma}{4}$$
$$a-b+c=8R\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\beta}{4}\sin\frac{\gamma}{4}$$

$$\begin{aligned}
(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) &= 8^4R^4\sin^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\beta}{4}\cos^2\frac{\beta}{4}\sin^2\frac{\gamma}{4}\cos^2\frac{\gamma}{4}\\
&= 8^2R^4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}=8R^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{abc}{R}$$

$$\therefore \sin A=\frac{a}{2R}$$

円周角の定理

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$ は，R,a が同じなら $\sin A$ も同じであることを意味するから，円周角の定理の証明になっている（導出の過程で円周角の定理依存の公式を用いていない）。
また，$a=2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$ なので，$\sin A=\sin\dfrac{\alpha}{2}$
これは，円周角$=\frac{1}{2}\times$ 中心角　を意味する。

8.1.1　数列

現行数学 B の「数列」では，様々な計算技巧を学ぶ。
(1) 部分分数分解
(2) $1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1}$
(3) 群数列
これらの技巧はなぜ要求されるのか？

高校数学の構想 Part 2

白石和夫　　2023 年 04 月 12 日

一部またはすべてを選択して学ぶ大学進学者向きの科目。単位数的に 8 単位程度の科目であることを想定する。大学に入学する生徒の標準的な数学の知識・技能の水準を示すものと考えている。

Part1 では現実現象を数学の言葉に言い換える技能の習得を目指してきたけれども，Part2 は，数学の問題を別の数学の問題に言い換えて解決する技能の習得にも注力するものとしたい。

検討課題　PBL で学べるように体系を組み替える。すなわち，技能の集積として数学を学ぶのではなくて，具体的な問題の解決を通して数学の意味を理解させる。何を目指して数学を学ぶのか，目標を適切に設定する必要がある。

想定する内容をすべて学ばせるためには，既存の数学の大幅な整理が不可欠。それは，手計算から計算機による計算の時代への変化を反映させることでも，ある程度，実現できる。しかし，大幅な改変は，技能の習熟のために学ぶのではなく，概念理解のために学ぶという理念なしでは実現できない。特に，結論を公式として覚えるのではなく，(計算機の力を借りてもよいので）論理的な展開が出来るようにすることが目標だということが理解されるようにしなければならない。

1　代数

1.1　条件と集合

方程式や不等式のように変数を含む数学文を**条件命題**（あるいは，単に，**条件**）という。

変数 x を含む条件命題を $P(x), Q(x)$ などと表す。

集合の内包的定義　$P(x)$ を満たす x 全体の集合を $\{x|P(x)\}$ で表す。

集合の外延的定義　要素を書き並べ $\{\ \}$ で括って集合を表す。

例　方程式 $x^2-3x+2=0$ を満たす x 全体の集合の内包的定義は $\{x|x^2-3x+2=0\}$, 外延的定義は $\{1,2\}$

$P(x)$ が x についての方程式・不等式であるとき，集合 $\{x|P(x)\}$ は $P(x)$ の**解集合**と呼ばれる。

例 不等式 $(x-1)(x-2)>0$ の解集合は，$\{x|x<1$ または $2<x\}$。

慣習上，不等式 $(x-1)(x-2)>0$ の解は　$x<1, 2<x$　と書かれるが，条件命題をコンマで区切って並べるとそれらは「かつ」で結合するものとみなされる。だから，集合 $\{x|x<1, 2<x\}$ は $\emptyset$ である。

集合の相等

要素全体が一致するとき 2 つの集合は等しい。
たとえば，$\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$

集合の要素

x が集合 S の要素であることを $x \in S$ で表す。

集合の包含関係

集合の包含関係　集合 A の要素はすべて集合 B の要素であるとき，A は B に含まれる，B は A を含むといい，$A \subset B$ で表す。

$P(x), Q(x)$ を条件命題とするとき，$P(x)$ を満たす x はすべて $Q(x)$ を満たすとき，$P(x)$ は $Q(x)$ であるための十分条件である，$Q(x)$ は $P(x)$ であるための必要条件であるといい，$P(x) \Longrightarrow Q(x)$ で表す。

すなわち，$P(x) \Longrightarrow Q(x)$ は $\{x|P(x)\} \subset \{x|Q(x)\}$ を意味する。

$P(x) \Longrightarrow Q(x)$ と $Q(x) \Longrightarrow P(x)$ のいずれもが成立するとき，$P(x)$ は $Q(x)$ であるための必要十分条件である，$P(x)$ と $Q(x)$ は同値であるといい，$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ で表す。

1.2　代数方程式

1.2.1　2 次方程式・不等式

2 次式の因数分解

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

例

$x^2 + 4x - 21 = (x+2)^2 - 5^2 = \{(x+2)+5\}\{(x+2)-5\} = (x+7)(x-3)$

$x^2+4x-8 = (x+2)^2-12 = \{(x+2)+\sqrt{12}\}\{(x+2)-\sqrt{12}\} = (x+2+2\sqrt{3})(x+2-2\sqrt{3})$

因数分解できない 2 次式

$b^2 - 4ac < 0$ のとき，2 次式 $ax^2 + bx + c$ を一次式の積で表すことはできない。

なぜなら，$ax^2 + bx + c = (px+q)(rx+sx)$ と変形できるとすると，
2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が解をもつことになり，矛盾。

正負の数の積と 2 次不等式

$\alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha$，$\beta$ は同符号

$\alpha\beta < 0 \Leftrightarrow \alpha$，$\beta$ は異符号

$\alpha < \beta$ のとき，

2 次不等式 $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$ の解は，$\alpha < x < \beta$，すなわち，
$(x-\alpha)(x-\beta) < 0 \Leftrightarrow \alpha < x$ かつ $x < \beta$

2 次不等式 $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$ の解は，$x < \alpha$, $\beta < x$，すなわち，
$(x-\alpha)(x-\beta) > 0 \Leftrightarrow x < \alpha$ または $\beta < x$

例　$x^2 + 4x - 8 = \{(x-(-2-2\sqrt{3})\}\{(x-(-2+2\sqrt{3})\}$ なので，

2 次不等式 $x^2 + 4x - 8 < 0$ の解は，$-2-2\sqrt{3} < x < -2+2\sqrt{3}$。

☆因数分解を利用すると，グラフに依らず論理だけで不等式の解が求まる。同様の原理に基づいて 3 次不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) < 0, (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) > 0$ の解が求まる。より高次の不等式についても同様。

2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が 2 つの解 α, β を持つとき，$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$。

$D=b^2-4ac$ とする。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる 2 つの正の解を持つための必要十分条件は，$D>0$ かつ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$。

平方に関する同値変形

$a \geqq 0, b \geqq 0$ のとき，$a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$

$a \geqq 0, b \geqq 0$ のとき，$a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$

根号を含む方程式・不等式

$\sqrt{A}=B \Leftrightarrow A=B^2$ かつ $B \geqq 0$

$\sqrt{A}<B \Leftrightarrow A<B^2$ かつ $A \geqq 0$ かつ $B>0$

$\sqrt{A}>B \Leftrightarrow [A \geqq 0$ かつ $B \leqq 0]$ または $[A>B^2$ かつ $B>0]$

… B が正の場合と負の場合とに分けて考える。

練習 1 次の不等式を解け。

(1) $\sqrt{15-2x}<2x-3$

(2) $\sqrt{x+3}>x+2$

練習 2 次の不等式を解け。

(1) $3|x-1|<x+1$

(2) $|x-1|<2-x$

ヒント $x \geqq 1$ のときと，$x<1$ のときに分ける。

1.2.2 連立方程式

… 同値変形（解集合が変化しない式変形を考える）

２元連立方程式は座標平面上に図示できるが，３元以上の連立方程式にその手法は通用しない。

図に頼らず論理の力のみで連立方程式が解けるようにする。

連立 1 次方程式

連立方程式の基本変形

次の (1)〜(3) の操作で連立方程式の同値性は保たれる。

(1) ある方程式の両辺に 0 でない定数を掛ける。

$m \neq 0$ のとき $\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mA=mB \\ C=D \end{cases}$

(2) ある方程式の定数倍を他の方程式に加える。

$$\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=B \\ mA+C=mB+D \end{cases}$$

(3) 方程式の順序を入れ替える。

$$\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = D \\ A = B \end{cases}$$

これらの操作を繰り返すことで連立一次方程式を解くことができる。

例 3 $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 4x - 2y + z = -9 \\ 16x + 4y + z = 3 \end{cases}$

方針　まず，第 2 式と第 3 式から x を消去し，さらに第 3 式から y を消去して，

$$\begin{cases} \square x + \square y + \square z = \square \\ \qquad \square y + \square z = \square \\ \qquad\qquad \square z = \square \end{cases}$$

の形に変形する。

解. 第 2 式から第 1 式の 4 倍を引き，第 3 式から第 1 式の 16 倍を引く ⋯ 第 2 式と第 3 式の x を消去

$$\begin{cases} x + \quad y + \quad z = \quad 6 \\ \quad -6y \quad - 3z = -33 \\ \quad -12y - 15z = -93 \end{cases}$$

第 3 式から第 2 式の 2 倍を引く ⋯ 第 3 式の y を消去

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -6y - 3z = -33 \\ \qquad -9z = -27 \end{cases}$$

第 3 式の両辺を -9 で割る ⋯ z の係数を 1 にする

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -6y - 3z = -33 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$$

第 2 式に第 3 式の 3 倍を加え，第 1 式から第 3 式を引く ⋯ 第 1 式と第 2 式の z を消去

$$\begin{cases} x + y \qquad = 3 \\ -6y \qquad = -24 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$$

第 2 式の両辺を -6 で割る。⋯ y の係数を 1 にする

$$\begin{cases} x + y \qquad = 3 \\ \quad y \qquad = 4 \\ \qquad z = 3 \end{cases}$$

第 1 式から第 2 式を引く ⋯ 第 1 式の y を消去

$$\begin{cases} x \qquad\quad = -1 \\ \quad y \qquad = 4 \\ \qquad z = 3 \end{cases}$$

第 1 式の両辺を 1 で割る ⋯ x の係数を 1 にする

$$\begin{cases} x \qquad\quad = -1 \\ \quad y \qquad = 4 \\ \qquad z = 3 \end{cases} \qquad \square$$

練習 4 連立方程式 $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+2y-z=-21 \\ 16x+4y+z=3 \end{cases}$ を $\begin{cases} \square x+\square y+\square z=\square \\ \qquad \square y+\square z=\square \\ \qquad\qquad \square z=\square \end{cases}$ の形に書き換えて解け。

行列

数を 1 列に並べたものを数列と呼んだ。数を縦横に並べたものを行列という。

行列は全体を（ ）で括って書く。

行列において，横方向への並びを**行**，縦方向の並びを**列**という。

行は上から順に，第 1 行，第 2 行，$\cdots$ のように番号を付ける。

列は左から順に，第 1 列，第 2 列，$\cdots$ のように番号を付ける。

行列を構成する数を，その行列の要素という。i 行 j 列の成分を (i,j) 成分という。

行列の (i,j) 成分を a_{ij} のように書き，(i,j) 成分が a_{ij} である行列を (a_{ij}) で表す。

3 元連立一次方程式

連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=a_{14} \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=a_{24} \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=a_{34} \end{cases}$$

の解を求める。

$$\begin{cases} \square x+\square y+\square z=\square \\ \qquad \square y+\square z=\square \\ \qquad\qquad \square z=\square \end{cases}$$

の形を作りたい。

第 2 式，第 3 式から x を消去するためには第 2 式，第 3 式から第 1 式の $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ 倍，$\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ 倍を引けばよいのだけれども，$a_{11}=0$ のときそれはできない。

x の係数 a_{11},a_{21},a_{31} がすべて 0 のときこの方程式は解がひとつに決まらないか，解を持たない。そうでないとき，x の係数が 0 でない方程式を 1 行目に持ってくる（交換する)。その係数行列を改めて (a_{ij}) とする。そして，第 2 式，第 3 式から第 2 式，第 3 式から第 1 式の $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ 倍，$\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ 倍を引き，その係数行列を再度 (a_{ij}) として

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=a_{14} \\ \qquad a_{22}y+a_{23}z=a_{24} \\ \qquad a_{32}y+a_{33}z=a_{34} \end{cases}$$

の形に変形する。次に，第 2 式と第 3 式の y,z についての連立方程式

$$\begin{cases} a_{22}y+a_{23}z=a_{24} \\ a_{32}y+a_{33}z=a_{34} \end{cases}$$

に注目し，この部分を

$$\begin{cases} \square y+\square z=\square \\ \qquad \square z=\square \end{cases}$$

の形に変形することを考える。

y の係数 a_{22},a_{32} がともに 0 であるとき，この連立方程式は解がひとつに決まらないか，解を持たない。そうでないとき，必要であれば 2 行目と 3 行目の方程式を入れ替えて 2 行

目の y の係数が 0 でないようにし，係数行列を改めて (a_{ij}) とする。第 3 式から第 2 式の $\dfrac{a_{32}}{a_{22}}$ 倍を引き，その係数行列を再度 (a_{ij}) として

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = a_{14} \\ \qquad\quad a_{22}y + a_{23}z = a_{24} \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}z = a_{34} \end{cases}$$

とする。

第 3 列の両辺を a_{33} で割って

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = a_{14} \\ \qquad\quad a_{22}y + a_{23}z = a_{24} \\ \qquad\qquad\qquad\quad z = a_{34} \end{cases}$$

の形に変形する。

第 2 列から第 3 列の a_{23} 倍を引いて

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = a_{14} \\ \qquad\quad a_{22}y \qquad\quad = a_{24} \\ \qquad\qquad\qquad\quad z = a_{34} \end{cases}$$

の形に変形し，第 2 列の両辺を a_{22} で割って，

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = a_{14} \\ \qquad\qquad y \qquad\quad = a_{24} \\ \qquad\qquad\qquad\quad z = a_{34} \end{cases}$$

の形に変形する。

第 1 列から第 2 列の a_{12} 倍と第 3 列の a_{13} 倍を引き，

$$\begin{cases} a_{11}x \qquad\qquad\qquad = a_{14} \\ \qquad\qquad y \qquad\quad = a_{24} \\ \qquad\qquad\qquad\quad z = a_{34} \end{cases}$$

の形に変形する。

最後に第 1 列を a_{11} で割って

$$\begin{cases} \quad x \qquad\qquad\qquad = a_{14} \\ \qquad\qquad y \qquad\quad = a_{24} \\ \qquad\qquad\qquad\quad z = a_{34} \end{cases}$$

の形を作る。

練習 5 プログラム言語の 2 次元配列 A(,) に係数行列 (a_{ij}) を対応させ，係数を具体的な数値で与えると連立方程式 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = a_{14} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = a_{24} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = a_{34} \end{cases}$ の解を出力するプログラムを作れ。

参考　Full BASIC の場合，

連立方程式 $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y - z = -21 \\ 16x + 4y + z = 3 \end{cases}$ の係数行列を (a_{ij}) とするとき，

```
110 DIM A(3,4)
120 DATA  1,  1,  1,  6
130 DATA  2,  2, -1,-21
```

```
140 DATA 16,  4,  1,  3
150 MAT READ A
```

とすれば，A(i, j)=a_{ij} となる。

Full BASIC の添字付き変数 A(i, j) は変数なので，値を書き換えて利用することができる。

第 i 行と第 j 行の入れ換えは，作業用に変数 t を用意して，

```
FOR k=1 TO 4
   LET t=A(i,k)
   LET A(i,k)=A(j,k)
   LET A(j,k)=t
NEXT k
```

とすればできる。

参考　MAT は matrix(行列) を意味する。

☆ 数学教育現代化運動の旗手として知られる J.G. ケメニーは，線形代数の重要性を主張し，行列演算を自ら開発した BASIC 言語の主要な構成要素とした。BASIC では，行列の加減算や逆行列の計算が単一命令で実行できる。それは，また，ケメニーが行列計算を利用することを重視していたことの証でもある。

1.2.3　高次多項式

多項式 $P(x)$ の x に a を代数して得られる数を $P(a)$ で表す。

次の命題を具体例を通して（帰納的に）理解させる。

多項式 $P(x)$ において，$P(a)=0$ であるとき，$P(x)=(x-a)Q(x)$ と表せる。ただし，$Q(x)$ は多項式。

例 6 $P(x)=x^3+3x^2+3x+2$ において，$P(-2)=0$ であることを用いると，
$X=x+2$ とおくとき，$x=X-2$

$$P(x)=(X-2)^3+3\ (X-2)^2+3\ (X-2)+2=X^3-3X^2+3X=X(X^2-3X+3)$$
$$=(x+2)\left\{(x+2)^2-3(x+2)+3\right\}=(x+2)(x^2+x+1)$$

☆ 多項式の展開はコンピュータの数式処理の利用を想定している。

☆ 一般的な証明は，概略を示すと，

$P(x)$ の x に $X+a$ を代入して $P(x)=XQ(X)+\ \alpha$ となるとき，

$P(x)=(x-a)Q(x-a)+\ \alpha$ 。$P(a)=0$ だから $\alpha\ =0$。

$\therefore P(x)=(x-a)Q(x-a)$

☆ 上述を定理として認めると，n 次方程式の解が n 個以下であることが理解できる。

高次方程式

因数分解すると，$ab=0 \Leftrightarrow a=0$ または $b=0$ を用いて高次方程式が解ける。

☆解の範囲は実数とする（虚根を扱わない）

高次不等式

同符号の 2 数の積が正で，異符号の 2 数の積が負であることを用いると，高次不等式が解ける。

例 7 $x^3+3x^2+3x+2>0$ の解は，$(x+2)\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}>0$ より $x>-2$

例 8 不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)>0$ の解集合は $\{x|1<x<2$ または $3<x\}$ であるが，慣習では，この解を，$1<x<2, 3<x$ と書く。

2 離散数学

2.1 数列と数列の和

2.1.1 等比数列

等比数列の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$

$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}=\frac{1}{1-r}$

2.2 漸化式

例 9 フィボナッチ数列

$F_1=1, F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$。

```
10 DIM f(50)
20 LET f(1)=1
30 LET f(1)=1
40 FOR n=1 TO 48
50      LET f(n+2)=f(n+1)+f(n)
60      PRINT n+2, f(n+2)
70 NEXT n
80 END
```

練習 10 50 円硬貨と 100 円硬貨を用いて $50n$ 円を自動販売機に投入する方法の数を求めよ。

練習 11 10 円硬貨と 50 円硬貨を用いて $10n$ 円を自動販売機に投入する方法の数を求めよ。

例 12 （重複組合せの数）

n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ の非負整数解の個数を ${}_n\mathrm{H}_r$ で表す。ただし，r は非負整数。

例　桃，りんご，梨の 3 種類の果物から 0 個以上を選んで 10 個の詰め合わせを作る方法の数は ${}_3\mathrm{H}_{10}$ 通りある。

$_n\mathrm{H}_r = 1$, $_n\mathrm{H}_0 = 1$, は明らか。
$n \geqq 2, r \geqq 1$ の場合を考える。
$x_n = 0$ となる解の個数は $_{n-1}\mathrm{H}_r$ 個あり，$x_n \neq 0$ となる解の個数は $_n\mathrm{H}_{r-1}$ 個あるから，
$_n\mathrm{H}_r = {}_{n-1}\mathrm{H}_r + {}_n\mathrm{H}_{r-1}$ $(n \geqq 2, r \geqq 1)$

例題 13　プレゼント交換

n 人がプレゼント交換するとき，自分が持ってきたプレゼントをもらうことになる人がいる確率を知りたい。

そこで，誰も自分のプレゼントをもらわない確率を求める。

1 から n までの整数を並び替えてできる順列のうち，すべての i について「i 番目が i でない」ものを全換順列と呼び，全換順列の個数を a_n とする。

$a_1 = 0$,　$a_2 = 1$ は明らか。
$n \geqq 3$ のとき。
1 番目の数は，2 から n までの $n-1$ 通りある。
まず，1 番目の数が 2 のときを考える。
2 番目の数が 1 である場合は，3 番目から n 番目までの順列は 3 から n までの $n-2$ 個の数の全換順列なので，a_{n-2} 通りある。
2 番目の数が 1 でない場合は，2 番目から n 番目までの順列中の 1 を 2 に置き換えたものは 2 から n までの全換順列であるので，a_{n-1} 通りある。
だから，1 番目の数が 2 の場合は，$a_{n-1} + a_{n-2}$ 通りある。
1 番目の数は 2 から n までの $n-1$ 通りあり，そのどの場合も $a_{n-1} + a_{n-2}$ 通りずつあるので，

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad (n \geqq 3)$$

誰も自分のプレゼントをもらわない確率を p_n とおくと，
$p_1 = 0$,　$p_2 = \frac{1}{2}$,　$p_n = \dfrac{a_n}{n!}$
$a_{n-1} = (n-1)!\, p_{n-1}$,　$a_{n-2} = (n-2)!\, p_{n-2}$ を代入して
$p_n = \dfrac{a_n}{n!} = \dfrac{(n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})}{n!} = \dfrac{(n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}}{n!}$
$= \dfrac{(n-1)(n-1)!\, p_{n-1} + (n-1)(n-2)!\, p_{n-2}}{n!} = \dfrac{(n-1)(n-1)!\, p_{n-1} + (n-1)!\, p_{n-2}}{n!}$
$= \dfrac{(n-1)!}{n!}\{(n-1)p_{n-1} + p_{n-2}\} = \dfrac{1}{n}\{(n-1)p_{n-1} + p_{n-2}\}$
次のプログラムで計算できる。

```
10 DIM p(20)
20 LET p(1)=0
30 LET p(2)=1/2
40 FOR n=3 TO 20
50    LET p(n)=((n-1)*p(n-1)+P(n-2))/n
60    PRINT n,p(n)
70 NEXT n
80 END
```

17 項以降の計算結果は 0.367879441171444 となる。

（参考）1/p(n) を計算すると，第 17 項以降は 2.71828182845903。この問題はモンモールの問題として知られる。

数列の一般項を求める

例題 14 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるとき，一般項を求めよ。

例題 15 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1 = 3, a_2 = 3, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるとき，一般項を求めよ。

2.3 数学的帰納法

$P(n)$ を自然数 n に関する条件命題とする。

次の（I）,（II）が成立するとき，$\forall n P(n)$ が成立する。

（I）$P(1)$

（II）$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

（注意）（II）を「任意の k について $P(k)$ ならば $P(k+1)$」と書くと,「$\forall k P(k)$ ならば $P(k+1)$」と誤解される。

例題 16 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1 = 1, a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるとき，一般項を求めよ。

練習 17 組合せの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ に関する漸化式

${}_n\mathrm{C}_0 = 1,\ {}_n\mathrm{C}_n = 1,\ {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ $(0 < r < n)$

を用いて，${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ であることを証明せよ。

ヒント　$n + r$ について数学的帰納法を適用する。

練習 18 $n = 2^k (k = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき，正の数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対し,

不等式 $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ が成立することを証明せよ。

練習 19 $\cos n\theta$ は $\cos\theta$ の n 次の整式で表せることを証明せよ。

2.4 整数

☆学ぶのは難しくないが，整数論を必要とする領域は限定的（情報通信系のみ)。しかし，数学的帰納法など，論理を鍛えるための土俵としての存在意義がある。また，コンピュータによる計算で実験しながら学べる単元でもある。その一方で，経験的には明らかに見える命題（素因数分解の一意性など）の扱いに苦慮する単元でもある。

2.4.1　素数

1 より大きい整数で，正の約数が 1 とその数自身のみであるものを素数という。

例　エラトステネスの篩

問題　$n^2 - n + p$ $(n = 1, 2, 3, \cdots, p)$ がすべて素数となるような素数 p を，エラトステネスの篩で求めた素数の範囲ですべて求めよ。（解　$p = 2, 3, 5, 11, 17, 41$。41 より大きい解が存在しないことが知られているが証明は難しい。）

2.4.2　有理数

定理　有理数は既約分数（分母・分子が互いに素な分数）で表される。

この定理を根拠として，$\sqrt{2}$ は有理数でないことが証明できる。

例題 20 $\sqrt{2}$ は有理数でない。

なぜなら，整数 m, n を用いて $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ と表されるとすると，m, n はともに偶数だから。

問 21 どんな有理数も必ず既約分数で表されるのだろうか？

どうやって証明するのか？　（最大公約数で割ればいい）

最大公約数は必ず求まるのか？

☆素因数分解して最大公約数を求める場合，素因数分解が可能なことと，その一意性が根拠になる。素因数分解が可能なことは数学的帰納法で容易に証明できるが，素因数分解の一意性の証明はやさしくない。

2.4.3　最大公約数とユークリッド互除法

整除の定義

$b > 0$ とする。

$a = bq + r, q$ は整数で $0 \leqq r < b$ であるとき，q を a を b で割った商，r を a を b で割った余りという。

a を b で割った余りが 0 であるとき，a は b で割り切れる，a は b の倍数である，b は a の約数であるという。

最大公約数

a, b に共通の正の約数のうち最大のものを a, b の最大公約数といい，$\mathrm{GCD}(a, b)$ で表す。

非負整数 a と正の整数 b に対し，a を b で割った商を q，余りを r とすると，
$\mathrm{GCD}(a, b) = \mathrm{GCD}(b, r)$。

注意　a, b のうち一方が 0 である場合にも $\mathrm{GCD}(a, b)$ の定義を拡張してある。

証明　a, b の公約数全体の集合と，b, r の公約数全体の集合が一致する。

$a > 0$ のとき $\mathrm{GCD}(a, 0) = a$ であることを利用すると，次のプログラムで正の整数の最大公約数を求めることができる。

```
110 INPUT a,b
120 DO UNTIL b=0
130    LET r=MOD(a,b)
140    LET a=b
150    LET b=r
160 LOOP
170 PRINT a
180 END
```

130〜150 行で $(a, b) \leftarrow (b, a \bmod b)$ の入れ替えを行っている。

再帰処理が可能なプログラム言語であれば，次のようにプログラムを書くこともできる。

```
100 FUNCTION GCD(a,b)
110    IF b=0 THEN
120       LET GCD=a
130    ELSE
140       LET GCD=GCD(b,MOD(a,b))
150    END IF
160 END FUNCTION
170 INPUT a,b
180 PRINT GCD(a,b)
190 END
```

一次不定方程式　$ax + by = c$

ユークリッド互除法を適用して，解（の一つ）を求める。

$b = 0$ のとき，a が c の約数であれば，$x = c/a$，$y = 0$ は解，そうでないとき，解なし。

$b > 0$ のとき，a を b で割った商を q，余りを r とすると，

$(bq + r)x + by = c$，すなわち，$b(qx + y) + rx = c$。

$u = qx + y$，$v = x$ とおくと，$bu + rv = c$。

$bu + rv = c$ となる u, v が求まるとき，$x = v$，$y = u - qx$ は解。

再帰処理を許すプログラム言語を用いれば，次のプログラムで一次不定方程式 $ax+by = c$ の解（の一つ）を求めることができる。

```
100 INPUT a,b,c
110 CALL solve(a,x,b,y,c)
120 PRINT x,y
130 END
1000 EXTERNAL SUB solve(a,x,b,y,c)
1010 IF b>0 THEN
1020    LET q=INT(a/b)
1030    LET r=MOD(a,b)
1040    CALL solve(b,u,r,v,c)
```

```
1050    LET x=v
1060    LET y=u-q*x
1070 ELSE
1080    IF MOD(c,a)=0 THEN
1090       LET x=c/a
1100       LET y=0
1110    ELSE
1120       PRINT "解なし"
1130       STOP
1140    END IF
1150 END IF
1160 END SUB
```

Note. Full BASIC では，副プログラム呼び出しに変数として書かれた引数は参照渡し（値ではなく，アドレスを渡す）。副プログラム実行中に変数の値を変えると引数として書かれた変数が書き換わる。他のプログラム言語で書くときは，x,y が参照渡し（アドレス渡し）となるようにする。たとえば，C 言語であればポインタを使う。

定理 22 正の整数 a, b に対し，$\mathrm{GCD}(a, b) = 1$ であれば，方程式 $ax + by = 1$ は整数解を持つ。

証明. 証明　$P(n)$ を「a, b のうちの大きい方が n 以下であるとき方程式 $ax + by = 1$ は整数解を持つ」として，$P(n)$ に数学的帰納法を適用する。 □

定理 23 a, b, c を整数とする。ab が c の倍数で $\mathrm{GCD}(b, c) = 1$ であれば，a は c の倍数である。

証明. $ab = cn$(n は整数) とする。
前定理より $bx + cy = 1$ となる整数 x, y があるので，$abx + acy = a$
$\therefore a = cnx + acy = c(nx + cy)$ は c の倍数。 □

定理 24 整数 a, b に対し，ab が素数 p の倍数であれば，a, b のうち少なくとも一方は p の倍数である。

証明. p は素数なので，$\mathrm{GCD}(b, p) = 1$ または $\mathrm{GCD}(b, p) = p$。
$\mathrm{GCD}(b, p) = 1$ のとき，前定理より a は p の倍数。 □

2.4.4　剰余系

a を k で割った余りを $a \bmod k$ で表し，$a \bmod k = b \bmod k$ であることを $a \equiv b (\bmod k)$ で表す。

定理 25 k を 1 より大きい整数とする。$a \equiv b (\bmod k) \Leftrightarrow a - b$ は k の倍数

証明. $\Rightarrow$ は明らか。$\Leftarrow$ を示す。
$a = q_1k + r_1, b = q_2k + r_2, q_1, q_2$ は整数，$0 \leqq r_1 < k, 0 \leqq r_2 < k$ とすると，
$a - b = (q_1 - q_2)k + (r_1 - r_2)$ で，$-k < r_1 - r_2 < k$ なので，
$a - b$ が k の倍数であることから　$r_1 - r_2 = 0$。 □

合同式の計算公式

$a \equiv b (\bmod k) \ \Rightarrow a + c \equiv b + c (\bmod k)$

$c \neq 0$ のとき，$a \equiv b (\bmod k) \Rightarrow ac \equiv bc (\bmod k)$ （逆は成立しない。逆が成立する場合を考えてみる。）

観察 26 $k = 2, 3, 4, \cdots, 16$ について，$(a \times b) \bmod k$ の表を作る。ただし，$a = 1, 2, \cdots, k-1$，$b = 1, 2, \cdots, k-1$。この表を利用して $ax \equiv 1 (\bmod k)$ となる整数 x を求める。

定理 27 a, k が互いに素であるとき，方程式 $ax \equiv 1 (\bmod k)$ は整数解を持つ。

問題 1 a, k を入力すると，$ax \equiv 1 (\bmod k)$ となる x（のうちの一つ）を出力するプログラムを作れ。
ヒント不定方程式 $ax + ky = 1$ の解を求める。

剰余系における乗算

$ab \bmod k = (a \bmod k)(b \bmod k) \bmod k$

注意　mod は加減に優先し，乗除は mod に優先するものとして括弧を省いて書く。

観察 28 パスカルの三角形において，素数 p の段は，両端を除くとすべて p の倍数である。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

問 29 それはなぜか。

観察 30 $k = 3, 4, 5, \cdots$ に対し，$2^n \bmod k \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を計算し，規則性を調べる。各 k に対し $2^n \bmod k = 2$ となる最小の自然数 n を求める（存在しないこともある）。

定理 31 2 より大きい素数 p に対し，$2^p \bmod p = 2$

証明. $2^p = (1+1)^p = 1 + {}_p\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_p\mathrm{C}_r + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} + 1$
$r = 1, 2, \cdots, p-1$ に対し，
${}_p\mathrm{C}_r = \dfrac{p!}{(p-r)!r!}$ より $p! = {}_p\mathrm{C}_r (p-r)!r!$ となり，
$p!$ は p の倍数で，$(p-r)!r!$ は p と互いに素なので，

${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数。
$\therefore 2^p \bmod p = 1 + 1 = 2$ □

観察 32 $k = 4, 5, 6, \cdots$ に対し，$3^n \bmod k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を計算し，規則性を調べる。各 k に対し $3^n \bmod k = 3$ となる最小の自然数 n を求める。

定理 33 3 より大きい素数 p に対し，$3^p \bmod p = 3$

証明. $3^p = (2+1)^p = 2^p +_p \mathrm{C}_1 2^{p-1} + \cdots +_p \mathrm{C}_r 2^{p-r} + \cdots +_p \mathrm{C}_{p-1} 2 + 1$
前定理より，$2^p \bmod p = 2$ なので，前定理の証明と同様にして $3^p \bmod p = 2 + 1 = 3$ □

定理 34 a を正の整数とする。a より大きい素数 p に対し，
(1)$a^p \equiv a \pmod p$
(2)$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$　　（フェルマーの小定理）

証明. (1) は，前定理と同様（数学的帰納法による）。
(2) は，a, p が互いに素であることからいえる。 □

問題 2 $a = 2$ とする。$a^n \bmod k = \{a(a^{n-1} \bmod k)\} \bmod k$ を利用して計算することで，$a^{k-1} \bmod k = 1$ となる a より大きい自然数 k を探せ。さらに，a の値を変えて同様の探査を行え。

☆上の問題は k が素数であるための必要条件。$2 \leqq a < k$ であるすべての整数 a に対し $a^{k-1} \bmod k = 1$ となる自然数 k の存在が知られている。たとえば，$k = 561, 1105, \cdots$ (カーマイケル数と呼ばれている)。
☆この後，RSA 暗号に進むための道が 2 つある。一つは Chinese Remainder Theorem(中国式剰余定理）を追加する道で，もう一つはフェルマーの小定理をオイラーの定理に拡張することである。それぞれに一長一短がある。
☆情報通信系で重要な代数系に有限体の理論がある。有限体を利用すると，誤り訂正符号を効率的に生成できる。実際に有限体を作って誤り訂正符号を作ることはさほど難しくないので，STEM 向きの教材として使える。

3　幾何

図形の方程式

平面図形 F に対し，$(x, y) \in F \Leftrightarrow P(x, y) = 0$ となる方程式 $P(x, y) = 0$ を F の方程式という。
すなわち，$F = \{(x, y) | P(x, y) = 0\}$。

方程式の表す図形

x, y の方程式 $P(x, y) = 0$ に対し，集合 $\{(x, y) | P(x, y) = 0\}$ を図形 $P(x, y) = 0$ という。
例 直線 $2x + 3y = 4$ は，集合 $\{(x, y) | 2x + 3y = 4\}$ を表す。
平面上の図形を表すときには，変数として x, y を用い，x 座標を x，y 座標を y で表す。
たとえば，集合 $\{(X, Y) | X^2 + Y^2 = 8\}$ は，円 $x^2 + y^2 = 8$ と称される。

上の例に示すように，方程式 $P(x,y)=0$ の部分は，x,y を変数として含む条件命題で置き換えてよい。

また,「図形」は，適宜，適切な名称に置き換えてよい。

3.0.5　軌跡・二次曲線

同値な方程式

$a \geqq 0, b \geqq 0$ のとき，$a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$

なぜなら，$a^2-b^2=0$ とすると，$(a-b)(a+b)=0$ より，$a-b=0$ または $a+b=0$。
$a+b=0$ のとき，$a \geqq 0, b \geqq 0$ より $a=b=0$。

円

点 (x_0, y_0) を中心とする半径 r の円の方程式は，$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

例題　三角形 ABC の頂点を通る円

円の方程式が，$x^2+y^2+ax+by+c=0$ の形に表せることを利用すると，a,b,c に関する 3 元連立一次方程式を解く問題になる。この円の中心を求めると三角形の外心が求まる。

放物線　準線 l と焦点 F からの距離が等しい点の軌跡を放物線という。

準線が $x=-p$，焦点が $(p,0)$ の放物線の方程式は $y^2=4px$。

放物線 $y^2=4px$ 上の点 (x_0,y_0) における接線の方程式は $y_0y=2p(x+x_0)$

例題　焦点が F である放物線上の点 P における接線が軸と点 T で交わるとき，FP=FT である。

この事実から，放物面鏡が軸に平行な光線や電波を焦点に集めることが説明できる。

楕円・双曲線

定理 35 $a>c>0$ のとき，2 点 $F(c,0), F'(-c,0)$ に対し $PF+PF'=2c$ である点の軌跡は,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

証明. 2 焦点からの距離の和が $2a$ である点を $P(x,y)$ とすると,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \tag{1}$$

これを

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

と変形し，2 乗して簡単にすると,

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx \tag{2}$$

これをさらに 2 乗して整理し，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{3}$$

逆に，点 $P(x,y)$ を (3) を満たす点とすると，$\dfrac{x^2}{a^2}\leqq 1$ だから，$-a\leqq x\leqq a$
$a\geqq x, a>c\geqq 0$ より，$a^2\geqq cx$，すなわち $a^2-cx\geqq 0$ だから (2)，
すなわち $FP=a-\dfrac{c}{a}x$ が成立する。
同様に，$F'P=a+\dfrac{c}{a}x$ もいえるので，$FP+F'P=2a$，すなわち (1) が成立する。□

注意 36 上の証明から，(1)⇔(2)⇔(3) である。なぜなら，(1)⇒(2)⇒(3)⇒(1)。

注意 37 上の証明は 2 次曲線の特殊事情に依存している。$F'P=a+\dfrac{c}{a}x$ を利用せずに，逆にたどる方針でいく場合，(2) から (1) を導くのに，$2a\geqq\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ を示す必要がある。それは，(3) から $y^2\leqq a^2-c^2$ なので，$(x-c)^2+y^2\leqq(x-c)^2+a^2-c^2=x^2-2cx+a^2\leqq a^2-2cx+a^2=2(a^2-cx)\leqq 2(a^2+ca)\leqq 2(a^2+a^2)=4a^2$ となることを利用して示せる。

定理 38 $e=\dfrac{c}{a}$ とおくとき，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$ は，直線 $x=\dfrac{a}{e}$ と点 $F(c,0)$ とからの距離の比が e である点の軌跡である。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$ 上の点を $P(x_0,y_0)$ とするとき $FP=a-\frac{c}{a}x_0$，$F'P=a+\frac{c}{a}x_0$ であることから，次の定理が示せる。

定理 39 点 $F(c,0)$，$F'(-c,0)$ を焦点とする楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$ 上の点 P における接線と長軸 (x 軸) との交点を T とするとき，$FP:F'P=FT:F'T$ である。

この定理と次の定理は，楕円の一方の焦点から出た光が楕円面で反射するともう一方の焦点に届くことの根拠になる。

定理 40 三角形 ABC において，辺 BC 上に点 P があって $AB:AC=BP:CP$ であるとき，AP は頂角 A の 2 等分線であり，辺 BC の延長上に点 Q があって，$AB:AC=BQ:QC$ であるとき，AQ は頂角 A の外角の 2 等分線である。

初等幾何的に平行線あるいは垂線を用いて証明できるが，ベクトルを用いて証明することもできる。

☆双曲線についても，ほぼ，同様。同一の双曲線をスケールを変えて描いてみれば，自ずと漸近線が見えてくる。

☆ 2 次曲線について多くの定理が得られるが，GeoGebra 等，コンピュータ利用で検証可能。ただし，証明には数式の計算が必要。面倒な数式の計算には数式処理ソフトの援用が望まれる（ワープロで数式を書けばそのまま計算できる環境がほしい。Word2010, Word2013 ではその環境が実現できていた)。

3.0.6　いろいろな曲線 (軌跡)

例題（アポロニウスの円）異なる 2 点 A,B に対し，AP:PB=4:3 を満たす点 P の軌跡を求めよ。

例題（楕円）　線分 AB は長さが 7 で，点 A は x 軸上を動き，点 B は y 軸上を動く。このとき，線分 AB を 3:4 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

例題　放物線 $y = x^2$ を原点を中心として 2 倍に拡大して得られる曲線の方程式を求めよ。

☆この例題と同様にして，放物線はすべて相似であることを示せる。

サイクロイド・トロコイド

例題 41 半径 1 の円の内側を半径 s の円が滑らずに転がったとき，小円上の定点の軌跡を求めよ。

3.1　空間幾何

3.1.1　空間ベクトル

2 次元ベクトルを 3 次元に拡張する。

3.1.2　直線の方程式

点 P が直線 AB 上の点である ⇔ $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。

3.1.3　平面の方程式

交わる 2 直線は一つの平面を定める。
1 直線上にない 3 点 A,B,C に対し，
点 P が平面 ABC 上の点である ⇔ $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC}$ となる実数 k, l がある。

命題 42 a, b, c のうち少なくとも一つが 0 でないとき，方程式 $ax + by + cz = d$ が表す図形は平面であり，逆に，平面はこの形の方程式で表される。

例題 43 (PBL 教材の例) ペンローズ四角形のような平面のみで構成された空間だまし絵各頂点に奥行方向の座標を未知数として追加し，平面の方程式を作り，maxima のようなコンピュータ代数システムを利用して連立方程式を解くと矛盾した結果が得られる。

3.1.4　射影変換

３Ｄグラフィックスの基礎 ⋯ コンピュータは何を計算しているのか

透視投影

例 44 視点の高さを 1.5 m として，0.5 m先に地平面に垂直に置かれたスクリーンに見えたとおりに写しとったとするとき，原点をスクリーン中央の地平面との接点に置くと，地平面上の点 $(x, y, 0)$ は，次式で定まるスクリーン上の点 $(x', 0, z')$ に写る。

$$z' = \frac{1.5y}{0.5+y}$$
$$x' = \frac{0.5x}{0.5+y}$$

同様にして，透視投影の方程式は，行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ を用いて

$x' = \dfrac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}$, $\quad y' = \dfrac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}$ の形に書ける。

問題 3 座標平面に，y 軸上の定点 $K(0, k)$ と定直線 $y = ax + b$ がある。ただし，$k > b > 0$ とする。

(1) K と直線上の動点 $P(x, ax+b)$ を結ぶ直線 KP と x 軸との交点を $P'(x', 0)$ とするとき，x' を x で表せ。[ヒント]$\overrightarrow{KP'} = t\overrightarrow{KP}$ となる実数 t がある。[答] $x' = \dfrac{-kx}{ax+b-k}$

(2) $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ とする。

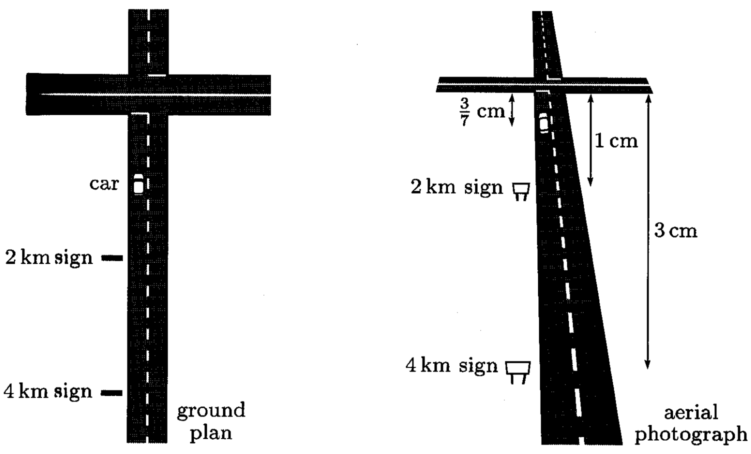
直線 $y = ax + b$ 上の 4 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ に対し，

KA, KB, KC, KD と x 軸との交点を順に A', B', C', D' とすると，

$$\frac{AC}{BC} / \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} / \frac{A'D'}{B'D'}$$

(注意 / は除算を表す)。[ヒント] 同一直線上の点なので，x 座標だけ計算すれば済む。

問題 4 下図のように観測されたとき，車は交差点から何 km 手前にいるか？ ([1])



[1]D.A.Brannan 他著 「Geometry」(Cambridge University Press) より

4　行列・一次変換

行列・一次変換は過去に高校数学の内容だったことがある。2×2 行列の制約は，2 次元でしか効果のないケイリー—ハミルトンの定理を普及させ，行列・一次変換が高校数学から消え去る要因となった。多変数関数の扱いの入口である行列・一次変換の重要性は増している（多変量統計解析，特に主成分分析)。行列・一次変換は抽象的な概念である。その概念を習得するとどんなよさがあるのか理解させるのに適した題材は何だろうか？　また，主成分分析の初歩をやさしく学ばせることは可能だろうか？

回転，鏡映は行列を用いて表現するとよさが分かる。文系数学を目指す場合でも幾何学を通して一次変換を学ぶのが最良ではないだろうか？(要検討)。

4.0.5　行列による一次変換の表現

$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy$ を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で表す。

例

動点 P は，2 地点 A,B のいずれかに存在し，1 日ごとに所在が定まる。

ある日，A 地点にあったとき，翌日も A 地点にある確率は 0.4，B 地点に移る確率は 0.6，

B 地点にあったとき，翌日 A 地点に移る確率は 0.9，B 地点に留まる確率は 0.1 であるという。

ある日，A 地点にある確率を a_0,B 地点にある確率を b_0 で，翌日，A 地点にある確率を a_1,B 地点にある確率を b_1 で表すと，

$$a_1 = 0.4a_0 + 0.9b_0$$

$$b_1 = 0.6a_0 + 0.1b_0$$

行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

4.0.6　行列の積

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ のとき，

$x'' = a'x' + b'y' = a'(ax + by) + b'(cx + dy) = (a'a + b'c)x + (a'b + b'd)y$

$y'' = c'x' + d'y' = c'(ax + by) + d'(cx + dy) = (c'a + d'c)x + (c'b + d'd)y$

そこで，行列の積を

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$$

と定める。すると，

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4.0.7　行列の計算公式

A, B, C を 2 行 2 列の行列とするとき，
$A+B=B+A$
$(A+B)+C=A+(B+C)$
$(AB)C=A(BC)$
$A(B+C)=AB+AC$
$(A+B)C=AC+BC$
注意　積の交換法則 $AB=BA$ は成立しない。

4.0.8　単位行列と零行列

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を単行列，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を零行列という。
A を 2 行 2 列の行列とするとき
$A+O=O+A=A,\ AE=EA=A,\ OA=AO=O$

4.0.9　行列のスカラー倍

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。実数 k に対し，$kA=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$。

4.0.10　逆行列

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$ となる行列 A^{-1} を行列 A の逆行列という。
$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。
$\det A=ad-bc$ とおく。
$\det A \neq 0$ のとき，$A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

4.0.11　連立一次方程式

連立一次方程式 $\begin{cases} ax+by=e \\ cd+dy=f \end{cases}$ を，行列を用いて $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ と書く。
$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

4.1　回転

4.1.1　原点を中心とする回転

原点を中心とする角 θ の回転移動によって点 $\mathrm{P}(x,y)$ が点 $\mathrm{Q}(x',y')$ に移るとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

なぜなら，$x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$ とすると，

$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha = x\cos\theta - y\sin\theta$

$y' = r\sin(\alpha+\theta) = r\cos\theta\sin\alpha + r\cos\alpha\sin\theta = x\sin\theta + y\cos\theta$

Note.

原点を中心とする角 θ の回転移動によって

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

のように対応することから回転行列を定めることができるけれども，その場合，回転が一次変換であることが分かっていることが前提であることに注意。

例

曲線 $xy = 2$ を原点のまわりに $45°$ 回転してできる曲線の方程式

求める曲線上の任意の点を $\mathrm{Q}(x, y)$ とすると，

曲線 $xy = 2$ 上に点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ があって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y,\ y_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$

点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ は曲線 $xy = 2$ 上にあるので

$$x_0 y_0 = 2$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) = 2$$

$$y^2 - x^2 = 4$$

4.1.2　線対称移動（鏡映）

x 軸に関する線対称移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

直線 $y = x\tan\,\theta$ に関する線対称移動

原点を中心に $-\theta$ 回転し，x 軸に関する線対称移動を行い，原点を中心に θ 回転するのと同じなので，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\,\theta & 2\cos\,\theta\,\sin\theta \\ 2\sin\theta\cos\,\theta & \sin^2\,\theta\, - \cos^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\,\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.1.3　2 点間の距離を変えない一次変換

一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で 2 点間の距離を変えないものを求めると，
$a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0, b^2 + d^2 = 1$。
$a^2 + c^2 = 1$ だから，$a = \cos\theta, c = \sin\theta$ となる θ が存在する。
$ab + cd = 0$ より，$b : d = -c : a = -\sin\theta : \cos\theta$
$b^2 + d^2 = 1$ より，$b = \mp\sin\theta, d = \pm\cos\theta$ （複号同順）
すなわち，原点を中心とする回転であるかまたは原点を通る直線に関する線対称移動。

4.1.4　原点を動かさない表向き相似変換

原点を中心とする拡大・縮小と原点を中心とする回転の合成

k を正の数とするとき，平面上の一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点を中心とする表向き相似変換という。

練習 45 (1) 原点を中心とする表向き相似変換と原点を中心とする表向き相似変換の合成は原点を中心とする表向き相似変換であることを示せ。
(2) 原点を中心とする拡大・縮小は原点を中心とする表向き相似変換であることを示せ。
(3) 原点を中心とする回転は原点を中心とする表向き相似変換であることを示せ。

原点を中心とする表向き相似変換を表す行列は，$k \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta \end{pmatrix}$ である。

練習 46 任意の a, b（ただし，$a^2 + b^2 > 0$）に対し，$a = k\cos\theta, b = k\sin\theta$ となる正の数 k と角 θ があることを示せ。

だから，$a^2 + b^2 > 0$ のとき，行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ が表す一次変換は，原点を中心とする表向き相似変換である。

4.2　代数的構造

4.2.1　零因子

2 次正方行列 A, B で $AB = O$ となる O でない A, B が存在する。

4.2.2　$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の代数系

原点を中心とする表向き相似変換を表す行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ （ただし，$a^2 + b^2 > 0$）を考える。

練習 47 (1) 原点を中心とする表向き相似変換を表す行列 A と原点を中心とする表向き相似変換を表す行列 B の積について交換法則 $AB = BA$ が成立することを示せ。
(2) 原点を中心とする表向き相似変換を表す行列 A と原点を中心とする表向き相似変換を表す行列 B の和 $A + B$，差 $A - B$，積 AB は原点を中心とする表向き相似変換を表す行列であることを示せ。
(3) 原点を中心とする表向き相似変換を表す行列 A は逆行列を持ち，A^{-1} も原点を中心とする表向き相似変換を表すことを示せ。

4.3 一次変換による直線や曲線の像

逆写像を用いて計算する。逆行列を持たない場合も扱う。

例題 48 一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって直線 $2x + 3y = 4$ はどのような図形に移されるか。

解. 直線上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移されるとき，
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$x' = 3x + 2y,\ y' = x - y$ より
$x = \frac{1}{5}(x' + 2y'),\ y = \frac{1}{5}(x' - 3y')$
$2x + 3y = 4$ なので，
$2(x' + 2y') + 3(x' - 3y') = 20$
$x' - y' = 4$
よって，直線 $2x + 3y = 4$ 上の点は直線 $x - y = 4$ 上に移される。
逆に，直線 $x - y = 4$ 上の点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に対し，
この変換で点 Q に移る直線 $2x + 3y = 4$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が存在することを示す。
$x = \frac{1}{5}(x' + 2y'),\ y = \frac{1}{5}(x' - 3y')$ により定まる点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると，
$x' = 3x + 2y,\ y' = x - y$ だから点 P は点 Q に移る。
$2x + 3y = \frac{2}{5}(x' + 2y') + \frac{3}{5}(x' - 3y') = x' - y'$。
点 Q は直線 $x - y = 4$ 上の点だから $x' - y' = 4$
$\therefore 2x + 3y = 4$
$\therefore$ 点 P は直線 $2x + 3y = 4$ 上にある。
ゆえに，直線 $2x + 3y = 4$ は直線 $x - y = 4$ 上に移る。
別解
直線 $2x + 3y = 4$ の方向ベクトルは $(-3, 2)$ なので，
直線 $2x + 3y = 4$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対し，
$x = 2 - 3t,\ y = 2t$ となる t がある。
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5t \\ 2-5t \end{pmatrix}$$

$x' = 6-5t,\ y' = 2-5t$ より $x' - y' = 4$

逆に，$x' - y' = 4$ のとき，$t = \dfrac{6-x'}{5}$ とおくと，$x' = 6-5t,\ y' = 2-5t$

直線 $2x+3y=4$ 上の点 $\mathrm{P}(2-3t, 2t)$ が点 (x', y') に移る。

ゆえに，直線 $2x+3y=4$ は直線 $x-y=4$ 上に移る。 □

例題 49 一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって直線 $2x+3y=4$ はどのような図形に移されるか。

解. 直線 $2x+3y=4$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移されるとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x' = 4x+2y$

$y' = 2x+y$

$\therefore x' - 2y' = 0$

よって，直線 $2x+3y=4$ 上の点は直線 $x-2y=0$ 上に移される。

逆に，直線 $x-2y=0$ 上の点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に対し，

この変換で点 Q に移る直線 $2x+3y=4$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が存在することを示す。

$4x+2y=x',\ 2x+y=y',\ 2x+3y=4$ となる x, y を求めればよい。

$2x+y=y',\ 2x+3y=4$ から $x = \dfrac{3}{4}y' - 1,\ y = 2 - \dfrac{1}{2}y'$

$x' - 2y' = 0$ なので $4x+2y=x'$ も成立する。

別解

直線 $2x+3y=4$ の方向ベクトルは $(-3, 2)$ なので，

直線 $2x+3y=4$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対し，

$x = 2-3t,\ y = 2t$ となる t がある。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-8t \\ 4-4t \end{pmatrix}$$

$x' = 8-8t,\ y' = 4-4t$ より $x' - 2y' = 0$

逆に，$x' - 2y' = 0$ のとき，$t = \dfrac{8-x'}{8}$ とおくと，$x' = 8-8t,\ y' = 4-4t$

直線 $2x+3y=4$ 上の点 $\mathrm{P}(8-8t, 4-4t)$ が点 (x', y') に移る。

ゆえに，直線 $2x+3y=4$ は直線 $x-y=4$ 上に移る。 □

例題 50 一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって直線 $2x + y = 4$ はどのような図形に移されるか。

解. 直線 $2x + y = 4$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移されるとき，
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$x' = 4x + 2y = 8$
$y' = 2x + y = 4$
よって，直線 $2x + 3y = 4$ は点 $(8, 4)$ に移される。
別解
直線 $2x + y = 4$ の方向ベクトルは $(-1, 2)$ なので，
直線 $2x + y = 4$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対し，
$x = 2 - t,\ y = 2t$ となる t がある。
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$
よって，直線 $2x + 3y = 4$ は点 $(8, 4)$ に移される。 □

この例題の解は直線 $x - 2y = 0$ ではないから，前 2 つの例題の解は逆も示さなければ不十分であることが理解できる。

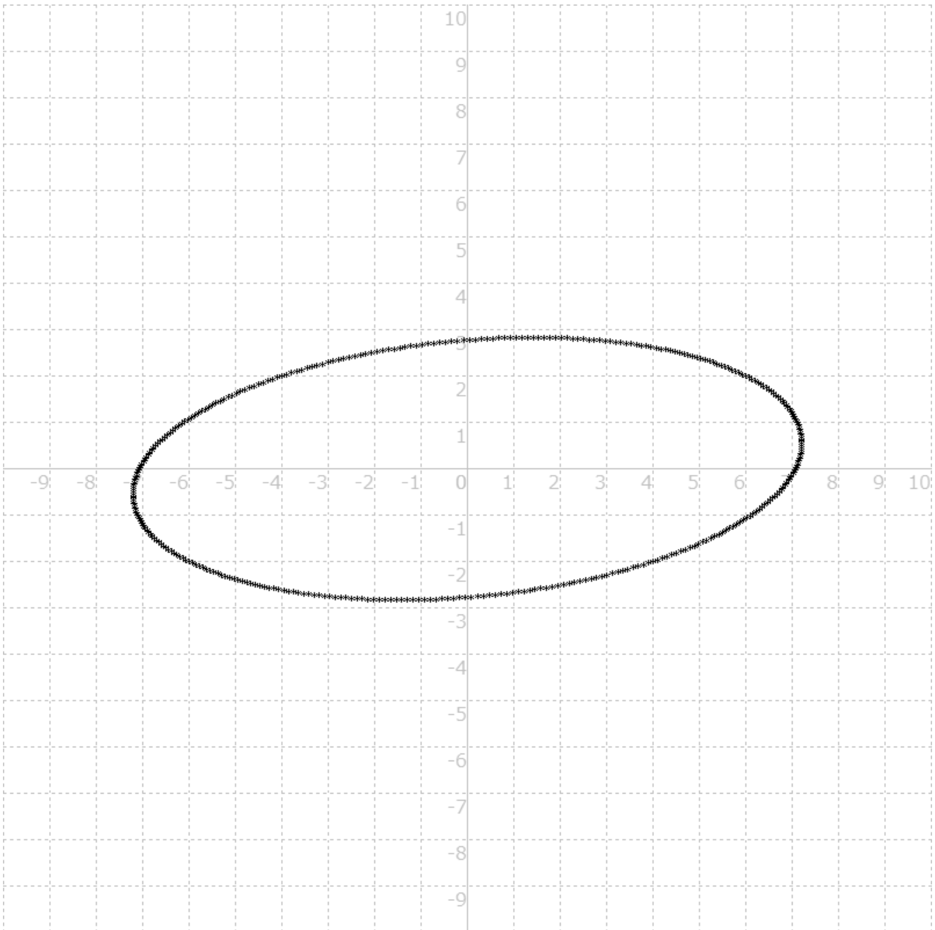
一次変換で直線は直線または 1 点に移されるから，直線上の異なる 2 点の移動先を求めることで直線を変換した像を求めることができる。しかし，その手法は一般化できないことが次の例題で示される。

例題 51 一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって円 $x^2 + y^2 = 4$ はどのような図形に移されるか。

解. 直線上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移されるとき，
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$x' = 3x + 2y,\ y' = x - y$ より
$x = \dfrac{1}{5}(x' + 2y'),\ y = \dfrac{1}{5}(x' - 3y')$
$x^2 + y^2 = 4$ なので，
$(x' + 2y')^2 + (x' - 3y')^2 = 4$
$2x'^2 - 2x'y' + 13y'^2 = 4$
よって，直線 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点は図形 $2x^2 - 2xy + 13y^2 = 4$ 上に移される。
逆に，図形 $2x^2 - 2xy + 13y^2 = 4$ 上の点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に対し，
この変換で点 Q に移る円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が存在することを示す。

$x=\dfrac{1}{5}(x'+2y'),\ y=\dfrac{1}{5}(x'-3y')$ により定まる点を $\mathrm{P}(x,y)$ とすると，
$x'=3x+2y,\ y'=x-y$ だから点 P は点 Q に移る。
このとき，$x^2+y^2=(x'+2y')^2+(x'-3y')^2$。
点 Q は図形 $2x^2-2xy+13y^2=4$ 上の点だから $2x'^2-2x'y'+13y'^2=4$
$\therefore x^2+y^2=4$
$\therefore$ 点 P は円 $x^2+y^2=4$ 上にある。
ゆえに，円 $x^2+y^2=4$ は図形 $2x^2-2xy+13y^2=4$ に移る。 □
コンピュータを用いて作図すると次のようになる。

```
10 SET WINDOW -10,10,-10,10
20 DRAW grid
30 FOR t=0 TO 2*PI STEP PI/180
40   LET x=2*COS(t)
50   LET y=2*SIN(t)
60   PLOT POINTS: 3*x+2*y, x-y
70 NEXT t
80 END
```



これは，楕円のように見える。本当に楕円だろうか。原点を中心とする回転によりそれを確かめよう。

例題 52 曲線 $2x^2-2xy+13y^2=4$ を原点のまわりに角 θ 回転し，得られる曲線の方程式が xy の項を含まないように θ を定めよ。

解. 回転して得られる曲線上の点を $\mathrm{Q}(x',y')$，それに対応するもとの曲線上の点を $\mathrm{P}(x,y)$ とする。

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

x,y は方程式 $2x^2-2xy+13y^2=4$ を満たすので，

$2(x'\cos\theta+y'\sin\theta)^2-2(x'\cos\theta+y'\sin\theta)(-x'\sin\theta+y'\cos\theta)+13(-x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2 = 4$

これを展開したとき，$x'y'$ の項は $(-2\cos^2\theta-22\cos\theta\sin\theta+2\sin^2\theta)x'y'$ であるので，

$2\cos^2\theta+22\cos\theta\sin\theta-2\sin^2\theta=0$

となる θ を取ればよい。

$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$，$2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$ なので，

$2\cos 2\theta+11\sin 2\theta=0$ とすればよい。

$\cos\alpha=\dfrac{2}{5\sqrt[2]{5}},\sin\alpha=\dfrac{11}{5\sqrt[2]{5}}$ となる α をとると，

$\sin(2\theta+\alpha)=0$

$\theta=-\dfrac{\alpha}{2}$ と定めればよい。ただし，$\cos\alpha=\dfrac{2}{5\sqrt[2]{5}},\sin\alpha=\dfrac{11}{5\sqrt[2]{5}}$。 □

このとき，曲線の方程式は $Ax^2+By^2=4$ の形になるので，この曲線は確かに楕円である。

4.4 座標軸の移動

座標軸の平行移動，回転

4.4.1 座標軸の回転

$\boldsymbol{e}_1=(\cos\theta,\sin\theta),\boldsymbol{e}_2=(\cos(\theta+\frac{\pi}{2}),\sin(\theta+\frac{\pi}{2}))$ とする。

平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ に対し $(x,y)=X\boldsymbol{e}_1+Y\boldsymbol{e}_2$ となる実数 X,Y がただ一通りに定まる。

(X,Y) は，座標軸を原点を中心に θ だけ回転したときの新座標系における点 P の座標を意味する。

$\boldsymbol{e}_1=(\cos\theta,\sin\theta),\boldsymbol{e}_2=(-\sin\theta,\cos\theta)$ なので，

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

4.4.2 斜交座標

平面上のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が平行でないとき，平面上のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v}=X\boldsymbol{a}+Y\boldsymbol{b}$ となる実数 X,Y がただ一通りに定まる。

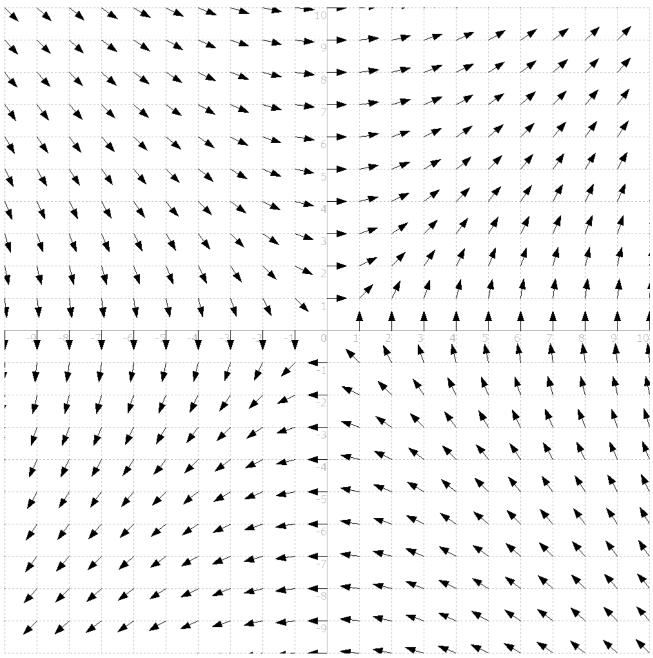
$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4.5　固有値・固有ベクトル

観察 53 次の図は，一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって各格子点がどの向きに移動するか，同じ大きさの有向線分を用いて図示したものである。移動方向が原点へ向かう向き，あるいは，原点と反対の向きとなるものを見出すことができる。



この図は次のプログラムを用いて描いた。

☆　探求の道具としてコンピュータが使えるようにコンピュータを学ばせることが必要。

```
100 DATA 1,2
110 DATA 2,1
120 DIM m(2,2)
130 MAT READ m
140 SET WINDOW -10,10,-10,10
150 DRAW grid
160 FOR x=-10 TO 10
170    FOR y=-10 TO 10
180       LET xx=m(1,1)*x+m(2,1)*y
```

```
190        LET yy=m(2,1)*x+m(2,2)*y
200        IF (xx-x)^2+(yy-y)^2>0 THEN
210           LET ang=ANGLE(xx-x, yy-y)
220           DRAW arrow WITH ROTATE(ang)*SHIFT(x,y)
230        END IF
240        WAIT DELAY 0.01
250     NEXT y
260 NEXT x
280 PICTURE arrow
290     PLOT LINES: 0,0; 0.3,0
300     PLOT AREA : 0.3,0.1; 0.3,-0.1 ; 0.6,0
310 END PICTURE
320 END
```

正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し，$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$，すなわち，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ を固有ベクトル，実数 λ を固有値という。

固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は，$(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たす。

$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ なので，$\det((A - \lambda E) = 0$。逆に $\det((A - \lambda E) = 0$ であれば，$(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となる零でないベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在する。

$\det(A - \lambda E) = 0$ を固有方程式という。

転置行列

行列 A に対し，行と列を入れ換えて得られる行列を A の転置行列といい，${}^tA$ で表す。

たとえば,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し，${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$v = (a, b)$ に対し，${}^tv = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

転置行列の計算公式

${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$

${}^t({}^tA) = A$

実数 k に対し，${}^t(kA) = k{}^tA$

Note. 転置演算 ${}^tA$ は行列の積に優先する。

内積　ベクトルの内積を転置行列を用いて表すことができる。

$u = (a, b), v = (c, d)$ に対し，$u \cdot v = u\_{}^{t}v$

$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ に対し，$u \cdot v = {}^t u\ v$

対称行列

正方行列 A は，${}^tA = A$ となるとき対称行列と呼ばれる。

対称行列の固有値・固有ベクトル

対称行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ の固有方程式 $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - {a_{12}}^2 = 0$ を展開して整理すると，$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2 = 0$。判別式を D とすると，$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4{a_{12}}^2 > 0$ なので，2 次対称行列は異なる 2 個の固有値を持つ。

その固有値を λ_1, λ_2 とし，λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ とする。

すなわち，${}^tA = A$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\boldsymbol{v}_2$

$\lambda_1(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2) = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = {}^t(\lambda_1\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_2 = {}^t(A\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_2 = {}^t\boldsymbol{v}_1\ {}^tA\boldsymbol{v}_2 = {}^t\boldsymbol{v}_1\ A\boldsymbol{v}_2$

$\lambda_2(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 \cdot \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 \cdot\ A\boldsymbol{v}_2 = {}^t\boldsymbol{v}_1\ A\boldsymbol{v}_2$

$\therefore \lambda_1(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)$

$(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2) = 0$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ より $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$。

命題 54 2 次対称行列は 2 個の異なる固有値を持ち，それらに対応する固有ベクトルは直交する。

4.6 多変量統計解析（主成分分析）

主成分分析への入口　ある集団に属する 2 つの変量 x, y について，その値の組を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_N, y_N)$ とする。直線 $ax + by + c = 0$ と各点 (x_k, y_k) との距離の平方の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{(ax_k + by_k + c)^2}{a^2 + b^2}$ が最小となるように $a : b : c$ を定める。

$a = \cos\theta, b = \sin\theta$ としておく。

$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} {x_k}^2 = {s_x}^2 + \overline{x}^2$，$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} {y_k}^2 = {s_y}^2 + \overline{y}^2$，$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k y_k = s_{xy} + \overline{xy}$ を用いて，

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{(ax_k + by_k + c)^2}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{a^2 + b^2} \left(a^2\sum_{k=1}^{N} {x_k}^2 + 2ab\sum_{k=1}^{N} x_k y_k + b^2\sum_{k=1}^{N} {y_k}^2 + 2ac\sum_{k=1}^{N} x_k + 2bc\sum_{k=1}^{N} y_k + c^2 \right)$$

$$= \frac{a^2\left({s_x}^2 + \overline{x}^2\right) + 2ab\left(s_{xy} + \overline{xy}\right) + b^2\left({s_y}^2 + \overline{y}^2\right) + 2ac\overline{x} + 2bc\overline{y} + c^2}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{(c + a\overline{x} + b\overline{y})^2 - a^2\overline{x}^2 - 2ab\overline{x}\overline{y} - b^2\overline{y}^2 + a^2\left({s_x}^2 + \overline{x}^2\right) + 2ab\left(s_{xy} + \overline{xy}\right) + b^2\left({s_y}^2 + \overline{y}^2\right)}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{(c + a\overline{x} + b\overline{y})^2 + a^2{s_x}^2 + 2abs_{xy} + b^2{s_y}^2}{a^2+b^2}$$

$c + a\overline{x} + b\overline{y} = 0$ のとき最小。そのとき，

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{(ax_k+by_k+c)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2{s_x}^2 + 2abs_{xy} + b^2{s_y}^2}{a^2+b^2} = {s_x}^2\cos^2\theta + 2s_{xy}\cos\theta\sin\theta + {s_y}^2\sin^2\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}{s_x}^2(1+\cos 2\theta) + s_{xy}\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}{s_y}^2(1-\cos 2\theta)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left({s_x}^2 + {s_y}^2\right) + \tfrac{1}{2}\left({s_x}^2 - {s_y}^2\right)\cos 2\theta + s_{xy}\sin 2\theta$$

$\frac{1}{2}\left({s_x}^2 - {s_y}^2\right) = r\cos 2\alpha, s_{xy} = r\sin 2\alpha$ (ただし $r>0$) とおくと，

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{(ax_k+by_k+c)^2}{a^2+b^2} = \tfrac{1}{2}\left({s_x}^2 + {s_y}^2\right) + r\cos(2\theta - 2\alpha)$$

最小となるのは，$2\theta - 2\alpha = \pi$，すなわち，$\theta = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ のとき。

このとき，$a = \cos\theta = -\sin\alpha$，$b = \sin\theta = \cos\alpha$

$\frac{1}{2}\left({s_x}^2 - {s_y}^2\right) = r\cos 2\alpha, s_{xy} = r\sin 2\alpha$ より，${s_x}^2 - {s_y}^2 = 2r(b^2 - a^2), s_{xy} = 2rab$

r を消去して，$a^2 s_{sy} + ab{s_y}^2 = ab{s_x}^2 + b^2 s_{xy}$

Note.

$a(as_{xy} + b{s_y}^2) = b(a{s_x}^2 + bs_{xy}) = ab\lambda$ とおくと

$as_{sy} + b{s_y}^2 = b\lambda$

$a{s_x}^2 + bs_{xy} = a\lambda$

$$\begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

すなわち，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は共分散行列 $\begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトル。

Note2.

この直線は，直線 $y - \overline{y} = \dfrac{s_y}{s_x}(x - \overline{x})$ ではない。

別解（商の微分法を利用，三角関数を回避）

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{(ax_k+by_k+c)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2{s_x}^2 + 2abs_{xy} + b^2{s_y}^2}{a^2+b^2} = \frac{{s_x}^2 + 2\frac{b}{a}s_{xy} + \left(\frac{b}{a}\right)^2{s_y}^2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$\frac{b}{a} = t$ とおいて $f(t) = \dfrac{{s_x}^2 + 2ts_{xy} + t^2{s_y}^2}{1+t^2}$ とすると，

$$f'(t) = \frac{\left(2s_{xy} + 2t{s_y}^2\right)\left(1+t^2\right) - 2t\left({s_x}^2 + 2ts_{xy} + t^2{s_y}^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} = \frac{-2t^2 s_{xy} - 2ts_x^2 + 2ts_y^2 + 2s_{xy}}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$f'(t) = 0$ より $s_{xy} - ts_x^2 + ts_y^2 - t^2 s_{xy} = 0$

$$t^2 s_{xy} + t(s_x^2 - s_y^2) - s_{xy} = 0$$

共分散行列の固有ベクトル $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$ とし，$|r| < 1$ の場合を考える。

共分散行列 $\begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1, λ_2 とする。

λ_1, λ_2 は正の数である。

なぜなら，固有多項式 $\lambda^2-({s_x}^2+{s_y}^2)\lambda+{s_x}^2{s_y}^2-s_{xy}{}^2=0$ において 2 次方程式の解と係数の関係から

$\lambda_1+\lambda_2={s_x}^2+{s_y}^2\geqq 0$, $\lambda_1\lambda_2={s_x}^2{s_y}^2-s_{xy}{}^2>0$ $\quad (\because\ r=\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$ で $|r|<1$)。

$\lambda_1>\lambda_2$ とし，λ_1,λ_2 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ とし，$|\boldsymbol{v}_1|=1,|\boldsymbol{v}_2|=1$ としておく。

$\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{(ax_k+by_k+c)^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2{s_x}^2+2abs_{xy}+b^2{s_y}^2}{a^2+b^2}$ の最小値を求める。

$a^2+b^2=1$ としておく。$\binom{a}{b}=t_1\boldsymbol{v}_1+t_2\boldsymbol{v}_2$ とする。$a^2+b^2=1$ より，${t_1}^2+{t_2}^2=1$

$a^2{s_x}^2+2abs_{xy}+b^2{s_y}^2=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}A(t_1\boldsymbol{v}_1+t_2\boldsymbol{v}_2)=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}(t_1A\boldsymbol{v}_1+t_2A\boldsymbol{v}_2)$

$=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}(t_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1+t_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2)=t_1\lambda_1\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_1+t_2\lambda_2\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_2$

$=t_1\lambda_1\ {}^t\boldsymbol{v}_1\binom{a}{b}+t_2\lambda_2\ {}^t\boldsymbol{v}_1\binom{a}{b}=t_1\lambda_1\ {}^t\boldsymbol{v}_1(t_1\boldsymbol{v}_1+t_2\boldsymbol{v}_2)+t_2\lambda_2\ {}^t\boldsymbol{v}_1t_1\boldsymbol{v}_1+t_2\boldsymbol{v}_2$

$={t_1}^2\lambda_1\ {}^t\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1+t_2{}^2\lambda_2\ {}^t\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2={t_1}^2\lambda_1+t_2{}^2\lambda_2={t_1}^2(\lambda_1-\lambda_2)+\lambda_2$

$a^2{s_x}^2+2abs_{xy}+b^2{s_y}^2$ が最小となるのは，$t_1=0,t_2=1$，すなわち，$\binom{a}{b}=\boldsymbol{v}_2$ のとき。

4.6.1 主成分分析

ある集団に属する 2 つの変量 x,y について，その値の組を (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), …, (x_N,y_N) とする。

$(\overline{x},\overline{y})$ を原点とする新たな座標軸 z,w を導入して，

$$\begin{pmatrix} z_k \\ w_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k-\overline{x} \\ y_k-\overline{y} \end{pmatrix}\quad (k=1,2,\ldots,N)$$

とする。ただし，$a^2+b^2=1$。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{N}z_k{}^2$ が最大となるように a,b を定めたい。

$$\sum_{k=1}^{N}z_k{}^2=\sum_{k=1}^{N}\{a(x_k-\overline{x})+b(y_k-\overline{y})\}^2$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\left\{a^2(x_k-\overline{x})^2+2ab(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})+b^2(y_k-\overline{y})^2\right\}$$

$$=a^2\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2+2ab\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})+b^2\sum_{k=1}^{N}(y_k-\overline{y})^2$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}z_k{}^2={s_x}^2a^2+2s_{xy}ab+{s_y}^2b^2$$

$$={s_x}^2a^2+s_{xy}ab+s_{xy}ab+{s_y}^2b^2$$

$$=\left({s_x}^2a+s_{xy}b\right)a+\left(s_{xy}a+{s_y}^2b\right)b$$

$$=\begin{pmatrix} {s_x}^2a+s_{xy}b & s_{xy}a+{s_y}^2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix}$ の固有値を λ, λ' $(\lambda > \lambda')$ とし，

λ に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ とする。

$v \perp v'$ なので，$v' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ としてよい。

$\begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$，$\begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}' = \lambda' \boldsymbol{v}'$

${}^t\begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix}$ なので，

${}^t\boldsymbol{v} \begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix} = \lambda \boldsymbol{v}$，${}^t\boldsymbol{v}' \begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix} = \lambda' \boldsymbol{v}'$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = s\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{v}'$ とする。ただし，$s^2 + t^2 = 1$ とする。

$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = s{}^t\boldsymbol{v} + t{}^t\boldsymbol{v}'$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} {z_k}^2 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ s{}^t\boldsymbol{v} \begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix} + t{}^t\boldsymbol{v}' \begin{pmatrix} {s_x}^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & {s_y}^2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \left(s\lambda{}^t\boldsymbol{v} + t\lambda'{}^t\boldsymbol{v}' \right) \left(s\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{v}' \right)$$

$$= s^2\lambda + t^2\lambda'$$

$\lambda > \lambda'$，$s^2 + t^2 = 1$ としたので，

$\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} {z_k}^2$ が最大となるのは $s = 1$，すなわち，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}$ のとき。

4.7　グラフ（隣接行列）

n 個の頂点 P_k をもつ無向グラフに対し，n 行 n 列の正方行列 $A = (a_{ij})$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (P_i \text{と } P_j \text{を結ぶ辺がないとき}) \\ 1 & (P_i \text{と } P_j \text{を結ぶ辺があるとき}) \end{cases}$$

と定めると，A^k の ij 成分は P_i と P_j を結ぶ長さが k 以下の経路の数になる。

例題 55 (PBL) 一筆書き　無向グラフを入力すると，一筆書きを実行するプログラムを作る。

学べること

行列を利用して無向グラフを表現し，連結性を判定する。

解決の本質部分は，辺の数に関する再帰。奇点を探し，

奇点があれば，奇点と奇点を結ぶ一筆書きを作り，
奇点がなければ元に戻る一筆書きを作る。
そのとき，1 辺を取り除いたグラフの一筆書きを実行する。

5　微分積分

☆ 微積分は，技能としてよりも，現象を表現するための言葉として学ぶべき内容。微積分の計算は数式処理（コンピュータ代数）に委ねる時代になった。微積分の学習は，数式処理で得られた結果の意味が理解できて，それを確かめることができるようにすればよい時代になった。現実事象への応用（STEM or STEEM）を目標とし，それに照準を合わせて計算ドリルを設定する。

5.1　関数の連続性

$\lim_{x \to a}(x) = f(a)$ となるとき，関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。
区間の定義　$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$，$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqq x \leqq b\}$
中間値の定理　関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で $f(a) \neq f(b)$ であるとき，k が $f(a)$ と $f(b)$ の間の数であれば $f(c) = k$ となる $c \in [a, b]$ がある。（直観的に正しいと認める）
中間値の定理からの帰結　関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で，$f(a)f(b) < 0$ であれば，方程式 $f(x) = 0$ は区間 $[a, b]$ に少なくとも一つの解を持つ。

5.2　微分可能

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在するとき，関数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという。
定理　関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき，関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続である。

5.2.1　関数値の増加・減少

平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能であるとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), a < c < b$$

となる c が少なくとも一つ存在する。

区間における増加と減少

区間内の任意の x_1，x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ となるとき，関数 $f(x)$ はこの区間において増加するという。
区間内の任意の x_1，x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ となるとき，関数 $f(x)$ はこの区間において減少するという。

曲線の凹凸

曲線の凹凸，変曲点は高校数学から除外してもいいのではないだろうか？

5.3　微分法

5.3.1　微分法の公式

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$，すなわち，$(x^{-1})' = -x^{-2}$
$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$　すなわち，$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

5.3.2　指数関数の微分

$f(x) = a^x$ とすると，
$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ となる e を選ぶと $f(x) = e^x$ のとき $f'(x) = e^x$
$(a^x)' = (e^{x\log_e a})' = (\log_e a)e^{x\log_e a} = (\log_e a)\, a^x$

5.3.3　対数関数

$f(x) = \log_e x$ とするとき，$e^{f(x)} = x$
$\{e^{f(x)}\}' = e^{f(x)}f'(x) = xf'(x), (x)' = 1$ より $f'(x) = \frac{1}{x}$

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

$$\{\log_e f(x)\}' = \frac{f'x)}{f(x)}$$

☆ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ を扱う必要があるか？

5.3.4　関数 x^a

$f(x) = x^a$ のとき，$\log_e f(x) = a\log_e x$ なので，$\frac{f'x)}{f(x)} = \dfrac{a}{x}$。
$\therefore f'(x) = a\dfrac{f(x)}{x} = a\dfrac{x^a}{x} = ax^{a-1}$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

5.3.5 正弦・余弦の微分

弧度法

$$\mathrm{l}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

正弦・余弦の微分

$$(\sin x)\prime = \cos x \qquad (\cos x)\prime = -\sin x \quad \ldots$$

5.4 高次導関数

$$f^{(0)}=f(x), f^{(1)}=f'(x), f^{(2)}(x)=f''(x), \cdots, f^{(n+1)}(x)=\{f^{(n)}(x)\}'$$

$(\sin x)''=-\sin x$

等速円運動の加速度

テーラー展開

$f(x)$ を多項式 $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$ で近似するとき

$$a_0=f(x_0), a_1=f'(x_0), a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}, \cdots, a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

多項式による近似

$$e^x \fallingdotseq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\sin x \fallingdotseq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x \fallingdotseq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

5.5 微分方程式

微分方程式が現象の記述と解析に有用なことを知るのが目的。求積法を学ぶことが目的ではない。

5.5.1 原始関数

定理　ある区間で $f'(x)=0$ であれば，その区間で $f(x)$ は定数である。

証明 ⋯ 平均値の定理による。

原始関数

$F'(x)=f(x)$ となる関数 $F(x)$ を関数 $f(x)$ の原始関数という。

原始関数の性質

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，任意の定数 c に対し $F(x)+c$ も $f(x)$ の原始関数である。

定理

$F(x), G(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，$F(x)-G(x)$ は定数である。

証明
$(F(x)-G(x))'=0$

5.5.2　微分方程式　$y'=x^n$

C を任意の定数とするとき，$y=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$ は微分方程式 $y'=x^n$ の解。ただし，$n=0,1,2,\ldots$。
例題　運動方程式 $\frac{d^2x}{dt^2}=-g$

5.5.3　微分方程式　$y'=ky$

微分方程式　$y'=ky$ の解は $y=Ce^{kx}$, ただし，C は定数。
$y=Ce^{kx}$ において，$x=0$ のとき $y=y_0$ とすると，$C=y_0$
☆補足 (参考).　$y=Ce^{kx}$ が解であるのは明らかだけれど，解が $y=Ce^{kx}$ に限ることを示すのには積の微分法が必要。
$y=f(x)$ も $y'=ky$ の解であるとすると，積の微分公式から
$\left\{\frac{f(x)}{e^{kx}}\right\}'=\left\{f(x)e^{-kx}\right\}'=f'(x)e^{-kx}+f(x)\left(-ke^{-kx}\right)=0\quad\therefore\frac{f(x)}{e^{kx}}=C$
例題　お湯のさめ方

フェヒナーの法則
音量などの刺激 S の増分 ΔS に対する感覚 R の増分を ΔR とするとき，$\Delta\ R\propto\Delta\ S/S$ をフェヒナーの法則という。
フェヒナーの法則に従うとき，$k\ \Delta\ R=\Delta\ S/S$ とすると，$\dfrac{\Delta S}{\Delta R}=kS$ だから，$S=Ce^{kR}$。
すなわち，$R\propto\log S$

5.5.4　微分方程式　$y''=-\omega^2y$

微分方程式 $f''(x)=-\omega^2f(x)$ の解は
$f(x)=A\cos\omega\ x+B\sin\omega\ x$, ただし，$A=f(0),B=\frac{f'0)}{\omega}$。
この解を $f(x)=A\sin(\omega\ x+\phi)$ の形に変形することができる。
☆補足 (参考).　解がこの形に限ることの証明には合成関数の微分法が必要。
$y=f(x)$ を微分方程式 $y''=-\omega^2y$ の解とする。すなわち，$f''(x)=-\omega^2f(x)$。
$A=f(0),B=\frac{f'0)}{\omega}$ として
$g(x)=A\cos\omega\ x+B\sin\omega\ x-f(x)$ とおく。
$g'(x)=-A\ \omega\sin\omega\ x+B\ \omega\cos\omega\ x-f'(x)$
$g''(x)=-A\ \omega^2\cos\omega\ x-B\ \omega^2\sin\omega\ x-f''(x)=-\omega^2g(x)$
$g''(x)+\omega^2g(x)=0$ の両辺に $2g'(x)$ をかけて，
$2g'(x)g''(x)+2\ \omega^2g(x)g'(x)=0$
これを積分すると $\{g'(x)\}^2+\omega^2\{g(x)\}^2=C$
$g(0)=0,g'(0)=0$ なので，$C=0$
$\therefore g(x)=0$

すなわち，$f(x) = A\cos\omega\ x + B\sin\omega\ x$

例題 56 単振動

$m\frac{d^2}{dt^2} = -kx$ の解は $x = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t + t_0)$

例題 57 単振り子

$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\ \theta$
$\sin\ \theta\ =\ \theta$ の近似が成立するとき，$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$ より $\theta\ = A\sin\sqrt{\frac{g}{l}}(t + t_0)$

例題 58 LC 直列回路

LC 直列回路に V ボルトの直流電圧を掛けたときの電流を I とすると
$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int Idt = V$
$L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I = 0$ より $I = A\sin\sqrt{\frac{1}{LC}}(t + t_0)$

5.6 積分法

☆不定積分は数式処理（コンピュータ代数）で代替可能となる領域。そのなかで，重点的に扱う必要のある積分，特に，応用上（物理学や工学などで）重要な意味を持つ積分は何か？　どういう考え方を身に付けさせればよいのか？

5.6.1 積分法の公式

$a \neq 1$ のとき $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
$a = 1$ のとき $\int \frac{1}{x}dx = \log_e|x| + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$　　$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$
$F'(x) = f(x)$ のとき $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$
$\int \frac{f'x)}{f(x)}dx = \log_e|f(x)| + C$
☆分数式の積分（部分分数分解）や $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$ を扱う必要性は？
部分分数分解は重要な手法でよく用いられるが，現実問題での具体事例は？(要調査)

5.6.2 置換積分

$F'(x) = f(x)$ のとき，$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$
例 $\int \sin^3 x\cos x dx = \int \sin^3 x(\sin x)'dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$
$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}(x^2)'dx = e^{x^2} + C$

5.7　部分積分

$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

例　$\int \log_e x dx = \int (x)' \log_e x dx = x \log_e x - \int x (\log_e x)' dx = x \log_e x - x + C$

例（漸化式）

$\int \sin^n dx = \int \sin x \sin^{n-1} x dx = \int (-\cos x)' \sin^{n-1} x dx$

$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$

$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1-\sin^2 x) \sin^{n-2} x dx$

$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx$

$\therefore\ n \int \sin^n dx = \cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx$

$I_n = \int \sin^n dx$ とおくと，$I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

5.8　定積分

☆　現行数学Ⅲだと，不定積分は求まらないのに定積分は求まることがある。たとえば，$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$ は高校数学の範囲外であるが，$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ は高校数学。この種の技巧を教えることに意義があるのだろうか？

5.8.1　定積分

定積分の定義

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

定積分の計算公式

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\} dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b 1dx = b - a$$

$$\int_a^b xdx = \tfrac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

$$\int_a^b x^2dx = \tfrac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$$

5.8.2　不定積分

定積分　区間に関する加法性

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$　（証明は難しい）

不定積分の導関数

$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ のとき，

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}=f(x)$$

定積分の計算公式

$f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続で，この区間で $F'(x)=f(x)$ であれば，
$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

なぜなら，$G(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ とおくと，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)\quad \because G(a)=0$

注意 被積分関数の連続性は重要。たとえば，$\int_{-2}^1 \dfrac{1}{x}=[\log_e|x|]_{-2}^1=\log_e 2$ 　は誤り。

5.8.3　曲線の長さ

曲線 $x=f(t), y=g(t)(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ の長さ $=\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$

例　アステロイド（第 1 象限）$x=\cos^3\theta, y=\sin^3\theta(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$
$\frac{dx}{d\theta}=-3\cos^2\sin\theta$，$\frac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\cos^2\theta\sin\theta)^2+\left(3\sin^2\theta\cos\theta\right)^2}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta=\frac{3}{2}$
☆きれいに計算できる例は少ない。大部分，数値計算になる。

5.8.4　フーリエ級数展開

積 $\mapsto$ 和の公式を用いると

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\begin{cases}0(m\neq n)\\ \pi(m=n)\end{cases}$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=0$

2π を周期とする関数 $f(x)$ を $P(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^n(a_k\cos kx+b_n\sin kx)$ で近似する。

$f(x)=P(x)$ と仮定して各係数を求めると，

$a_k=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$

$b_k=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx\quad(k=1,2,\cdots,n)$

実験　$P(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^n(a_k\cos kx+b_n\sin kx)$ の係数を変えた波を音として聞き，いろいろな音色が得られることを体験。次に，デジタル音源から 1 周期分のデータを取り出し，各係数を数値積分で求め，それを $P(x)$ に代入して得られる関数の音を聞いてみることで任意の音色が再現できることがわかる。

5.8.5 仕事と運動エネルギー

定積分の置換積分法

$x=g(t), a=g(\alpha), b=g(\beta)$ で，t が区間 $[\alpha,\beta]$ を動くとき $x=g(t)$ の変域が f が連続な区間から外れなければ，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$

仕事

物体が数直線上を $x=x_1$ から $x=x_2$ まで移動し，点 x において力 $F(x)$ を受けるとき，力 $F(x)$ がした仕事は $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$

$F=m\dfrac{dv}{dt}$ をもとに式変形を行う。ただし，$v=\dfrac{dx}{dt}$。また，$t=t_1$ のとき $v=v_1, x=x_1$，$t=t_2$ のとき $v=v_2, x=x_2$ とする。

$\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} F(x)\frac{dx}{dt}dt$

$F(x)=m\dfrac{dv}{dt}$ より

$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} F(x)\frac{dx}{dt}dt=\int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dt}dt=\int_{t_1}^{t_2} m\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dt}dt=\int_{t_1}^{t_2} mv\frac{dv}{dt}dt=\int_{v_1}^{v_2} mvdv=\left[\tfrac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2}$

$\frac{1}{2}mv^2$ を運動エネルギーという。運動エネルギーの変化量＝仕事。

5.9 数値計算

5.9.1 方程式 $f(x)=0$ の近似解

5 次以上の代数方程式は代数的に解けないから近似計算が不可欠。

2 分法

ニュートン法 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

5.9.2 定積分の近似計算

初等関数の不定積分は初等関数の範囲に納まらないから定積分の数値計算は不可避。

台形公式 $\int_a^b f(x)dx \fallingdotseq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(f(x_k)+f(x_{k+1}))}{2}\cdot(x_{k+1}-x_k)$

中点公式 $\int_a^b f(x)dx \fallingdotseq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\cdot(x_{k+1}-x_k)$

ただし，$x_k=a+k\cdot\frac{b-a}{n}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$

例　楕円弧 (第 1 象限) $x=2\cos\theta, y=\sin\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ の長さ

$\frac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$，$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-2\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\sin^2\theta}d\theta$

（$\sqrt{1+x}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots$ を用いることも考えられる）

5.9.3　微分方程式の近似解

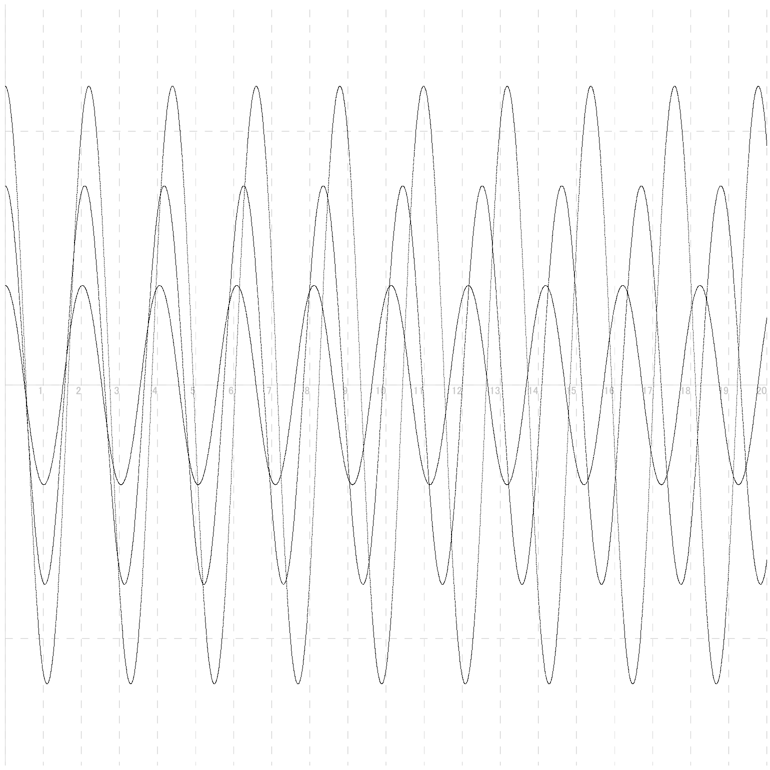
解を求めるのが難しい微分方程式も，数値計算でおよそのことが把握できる。

例　単振り子　$ml\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$　　振れ角の初期値を $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$ と変えて計算。

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta$

θ を x で表し，$v = \dfrac{dx}{dt}$ と置くと $\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin x$

増分 Δt を小さく定め，$\Delta v = \left(-\dfrac{g}{l}\sin x\right)\Delta t,\ \Delta x = v\Delta t$ の関係を利用して各時刻 t における v, x を計算する。



例　惑星の軌道

　万有引力の法則によると，惑星（彗星）の軌道が楕円・放物線・双曲線になることを数値計算で示す。

　恒星の質量を M，惑星の質量を m とし，$m \ll M$ を仮定して恒星を原点にとり，惑星の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y)$ とする。

万有引力定数を G とすると，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{GmM}{|\boldsymbol{r}|^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2}$$

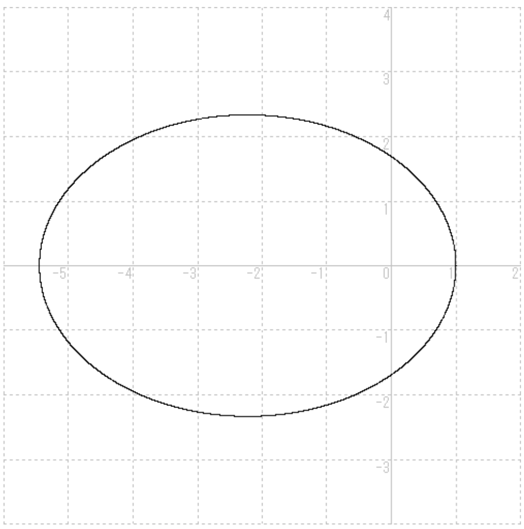
両辺を m で割り，成分に分けると，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -GM\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

$\dfrac{dx}{dt} = u, \dfrac{dy}{tt} = v$ とおくと，$\dfrac{du}{dt} = -GM\dfrac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}, \dfrac{dv}{dt} = -GM\dfrac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$ となるので，u, v と x, y の初期値を与えれば近似計算できる。

```
100 LET GM=1
110 DEF F(x,y)=-GM*x/(x^2+y^2)^(3/2)
120 DEF G(x,y)=-GM*y/(x^2+y^2)^(3/2)
130 LET x=1
140 LET y=0
150 LET u=0
160 LET v=1.3
170 LET dt=0.001
180 SET WINDOW -6,2,-4,4
190 SET POINT STYLE 1
200 DRAW grid
210 FOR t=dt TO 80 STEP dt
220    PLOT POINTS: x,y
230    LET u=u+F(x,y)*dt
240    LET v=v+G(x,y)*dt
250    LET x=x+u*dt
260    LET y=y+v*dt
270 NEXT t
280 END
```



6　確率・統計

自立思考の育成に力点を置く。マニュアル型の手続きを教える領域であることから抜け出す。

2 項分布，その他，使用する確率分布は数値計算で求める（乱数の利用もありうる)。

理屈はわからないけれども，覚えることばかりたくさん出てくるのが現行の統計分野。実用ではなく理論の理解を目的とするものに変える。特に重要な視点は近似の扱い。教科書に示された範囲の近似が許容されるとするのは，主体的な思考と反する。近似誤差を学習者が見積って統計を使うように変えなくてはならない。

現行学習指導要領（数学 B）は,「正規分布を用いた区間推定及び仮説検定の方法を理解する」として，区間推定，仮説検定を正規分布に限定している。これは仮説検定，区間推定の意味を教えるのに不適切な限定である。

6.1　条件付き確率

事象 B を全事象とするときの $A\cap B$ の確率を $P_B(A)$ で表す。

$P_B(A) = P(A\cap B)／P(B)$

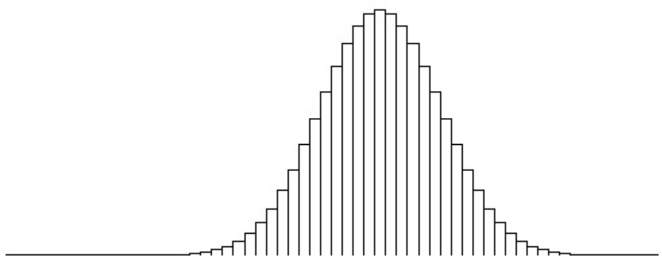
$P(A\cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B)$

例題 59 さいころを n 回振るとき目の数の和が k となる確率を $p_{n,k}$ とすると，

$p_{1,1} = p_{1,2} = \cdots = p_{1,6} = \frac{1}{6}$

$n>1$ のとき，$p_{n,k} = \displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}p_{n-1,k-i}$，ただし，$k<n$ のとき $p_{n,k}=0$ とする。

```
DIM p(10,60)
MAT p=ZER
FOR i=1 TO 6
   LET p(1,i)=1/6
NEXT i
FOR n=2 TO 10
   FOR k=n TO 6*n
      FOR i=1 TO MIN(6,k-1)
         LET p(n,k)=p(n,k)+p(n-1,k-i)/6
      NEXT i
   NEXT k
NEXT n
SET WINDOW -1,61,0,0.2
LET n=10
FOR i=1 TO 60
   PLOT LINES: i-0.5,0; i-0.5,p(n,i); i+0.5,p(n,i); i+0.5,0
NEXT i
END
```



ベイズの定理

事象 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ が排反で，$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ とする。

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$
$$= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

なので，

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)}{P(B)} = \frac{P_{A_k}(B)}{P(A_1)P_{A_1}(B) + \cdots + P(A_k)P_{A_k}(B) + \cdots + P(A_n)P_{A_n}(B)}$$

例題 60 4 枚のコインがあり，うち 3 枚は表裏が等しい確率で出現し，1 枚のみ異常で，表が出る確率が 60 ％である。1 枚のコインを無作為に選び，10 回投げたら 6 回表が出た。このコインが異常である確率を求めよ。

解

正常コインを 10 回投げて 1 の目が 6 回出る確率は ${}_{10}\mathrm{C}_6 \times 0.5^{10}$ =0.205078125

異常コインを 10 回投げて 1 の目が 6 回出る確率は ${}_{10}\mathrm{C}_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4$ =0.250822656

	1 の目が 6 回出る	……	合計
正常コイン	$\frac{3}{4} \times_{10} \mathrm{C}_6 \times 0.5^{10}$		$\frac{3}{4}$
異常コイン	$\frac{1}{4} \times_{10} \mathrm{C}_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4$		$\frac{1}{4}$
合計	$\frac{3}{4} \times_{10} \mathrm{C}_6 \times 0.5^{10} + \frac{1}{4} \times_{10} \mathrm{C}_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4$		1

無作為にコインを選んで 1 の目が 6 回出る確率は

$\frac{3}{4} \times_{10} \mathrm{C}_6 \times 0.5^{10} + \frac{1}{4} \times_{10} \mathrm{C}_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4$ =0.21651425775

異常コインを選んでそれを 10 回投げて 1 の目が 6 回出る確率は

$\frac{1}{4} \times_{10} \mathrm{C}_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4$ =0.062705664

10 回投げて 1 の目が 6 回出るときそのコインが異常である確率は，

$$\frac{\frac{1}{4} \times_{10} \mathrm{C}_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4}{\frac{3}{4} \times_{10} \mathrm{C}_6 \times 0.5^{10} + \frac{1}{4} \times_{10} \mathrm{C}_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4} = 0.289614479210896$$

6.2 累積確率分布

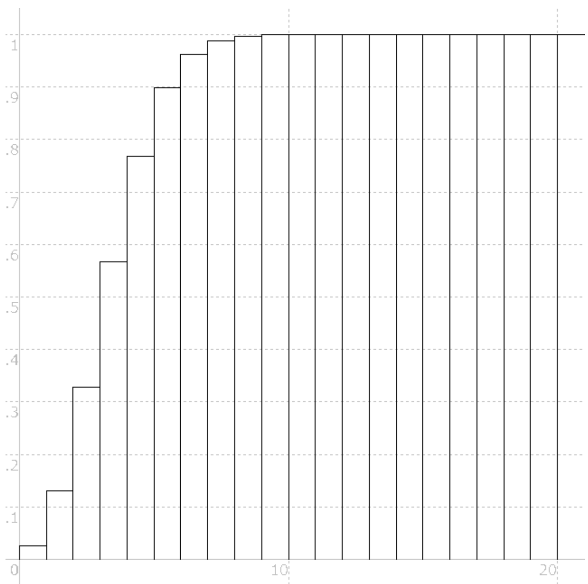
検定を実行するのに累積確率分布が便利である。

確率変数 X に対し，$P(X \leqq x)$ を累積確率分布という。

例題 61 さいころを 20 回振るときの 1 の目の出る回数を X とするとき，X の累積確率分布を求めよ。

解

```
100 DECLARE EXTERNAL FUNCTION Comb
110 LET n=20
120 LET p=1/6
130 SET WINDOW -0.5, n+1, -0.05, 1.05
140 DRAW grid(10, 0.1)
150 LET a=0
160 FOR k=0 TO n
170    LET x=comb(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k)
180    LET a=a+x
190    PLOT LINES: k, 0; k,a; k+1,a
200 NEXT k
210 END
1000 EXTERNAL FUNCTION Comb(n,r)
1010 REM 組合せの数（combination）
1020 IF r=0 THEN
1030    LET comb=1
1040 ELSE
1050    LET comb=comb(n,r-1)*(n-r+1)/r
1060 END IF
1070 END FUNCTION
```

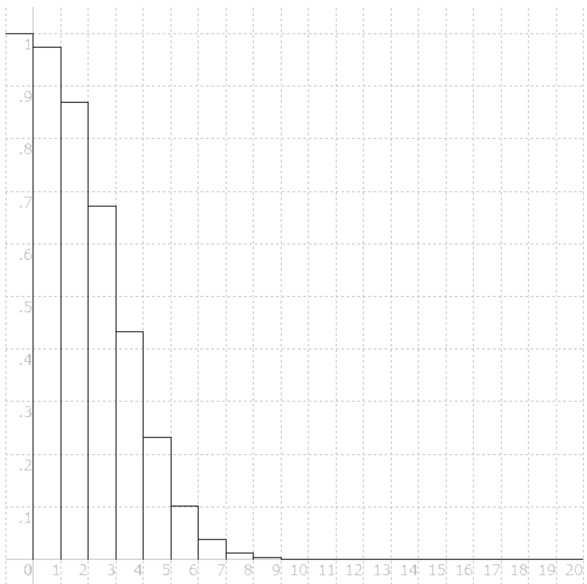


解説　組合せの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を漸化式
${}_n\mathrm{C}_0 = 1,\ r \geqq 1$ のとき ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{r-1} \times \dfrac{n-r+1}{r}$
を利用して求めている。

例題 62 さいころを 20 回振るときの 1 の目の出る回数を X とするとき，X の逆方向累積確率分布 $P(X \geqq x)$ を求めよ。

解

```
100 DECLARE EXTERNAL FUNCTION Comb
110 LET n=20
120 LET p=1/6
130 SET WINDOW -1, n, -0.05, 1.05
140 DRAW grid(1, 0.1)
150 LET a=0
160 FOR k=n TO 0 STEP -1
170    LET x=comb(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k)
180    LET a=a+x
190    PLOT LINES: k, 0; k,a; k-1,a
200 NEXT k
210 END
1000 EXTERNAL FUNCTION Comb(n,r)
```
（以下, 省略）



Note。
　$n = 20$ 程度であれば問題ないが，n が大きくなると，前例題の方法で組合せの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を求めると $r = n/2$ に近い r で桁あふれが発生して計算できなくなる。検定のための 2.5 %点を求めるために逆方向累積分布を求めるとき，

```
1000 EXTERNAL FUNCTION Comb(n,r)
1010 IF r>n/2 THEN
1020    LET Comb=Comb(n,n-r)
1030 ELSEIF r=0 THEN
1040    LET comb=1
1050 ELSE
1060    LET comb=comb(n,r-1)*(n-r+1)/r
1070 END IF
1080 END FUNCTION
```

のように，$r > n/2$ のときは，${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ の公式を用いて計算する。

6.3　検定

検定論の本質は，実際に観察された結果が，想定する確率分布から考えて起こりそうか見定めることである。それを計量的に行うために，想定する分布に従う確率変数 X に対し，$P(a \leqq X \leqq b) = 1 - \alpha$ となる 2 数 a, b を求める。（確率変数 X が主語のように見えるが，本当の主語は確率分布）

2 項分布などでは，コンピュータによる計算で，そのような 2 数が容易に求まる。

例題 63　$n = 180, p = \frac{1}{6}$ のとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{x} {}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{n-k} < 0.025$ となる最大の自然数 x を求めよ。

解

```
LET n=180
LET p=1/6
LET c=0
FOR k=0 TO n
   LET c=c+comb(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k)
   IF c>=0.025 THEN EXIT FOR
NEXT k
PRINT k-1
END
```

（答　20）

6.4　推定

パラメータ θ をもつ確率分布に対し，その分布に従う確率変数を X として
$P(a_\theta \leqq X \leqq b_\theta) = \alpha$ となる 2 数 a_θ, b_θ を定める。このとき，X の取り得る値 x に対し，
$I_x = \{\theta | a_\theta \leqq x \leqq b_\theta\}$ とし，I_x が区間として定まるときその下端と上端を L_x, U_x とする。
すなわち，$L_x \leqq \theta \leqq U_x \Leftrightarrow a_\theta \leqq x \leqq b_\theta$。$\therefore P(L_X \leqq \theta \leqq U_X) = P(a_\theta \leqq X \leqq b_\theta) = \alpha$

一般に，確率変数 X から定まる区間 $[L_X, U_X]$ があって $P(L_X \leqq \theta \leqq U_X) = \alpha$ となるとき，$[L_X, U_X]$ を信頼度 α の信頼区間という。$[L_X, U_X]$ が確率変数であることに注意。$P(L_X \leqq \theta \leqq U_X)$ は,（未知の）母数 θ をもつ確率分布について確率変数 $[L_X, U_X]$ が θ を含む確率であって，確率変数 X の実現値を x とするとき，θ が区間 $[L_x, U_x]$ に存在する確率ではない（θ を確率変数と見ていない)。

☆　この信頼区間の定義は難解。高校数学では,

信頼度 α の信頼区間＝有意水準 $1-\alpha$ の検定で棄却されない母数 θ の区間

と限定していいのではないだろうか。

例題 64 さいころを 100 回投げて 1 の目が 15 回出た。

(1) 1 の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ であると仮定したとき，100 回さいころを投げて x 回 1 の目が出る確率の累積確率分布（順方向および逆方向）を求める。

(2) $P(X=x) ={}_{100}\mathrm{C}_x p^x (1-p)^{100-x}$ とし，$p = 0.0001, \ldots, 0.9999$ に対し，$P(X<a) \geqq 0.025, P(X>b) \leqq 0.025$ となる最小の a，最大の b を求める。

このとき，$P(a \leqq X \leqq b) \geqq 0.95$

(1)

$P(X=x) ={}_{100}\mathrm{C}_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(1-\frac{1}{6}\right)^{100-x}$

順方向

```
LET n=100
LET p=1/6
LET c=0
FOR x=0 TO n
   LET c=c+ COMB(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x)
   PRINT USING "###   %.#########":x,c
NEXT x
END
```

(実行結果)

```
  0  0.000000012
  1  0.000000254
（中略）
  9  0.021292412
 10  0.042695684
（中略）
100  1.000000000
```

逆方向

```
LET n=100
LET p=1/6
LET c=0
FOR x=n TO 0 STEP -1
```

```
   LET c=c+ COMB(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x)
   PRINT USING "###   %.#########":x,c
NEXT x
END
```

（実行結果）

```
100  0.000000000
```

（中略）

```
 25  0.021703379
 24  0.037864369
```

（中略）

```
  0  1.000000000
```

$P(X<10)<0.025, P(X>24)<0.025, P(10 \leqq x \leqq 24) \geqq 0.95$

100 回さいころを投げて 1 の目が 15 回出ることは，危険率 5 %では棄却されない。

(2)

```
LET n=100
FOR p=0.0001 TO 0.9999 STEP 0.0001
   PRINT p,
   LET c=0
   FOR x=0 TO n
      LET c=c+ COMB(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x)
      IF c>=0.025 THEN EXIT FOR
   NEXT x
   PRINT x,
   LET c=0
   FOR x=n TO 0 STEP -1
      LET c=c+ COMB(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x)
      IF c>=0.025 THEN EXIT FOR
   NEXT x
   PRINT x
NEXT p
END
```

（実行結果）

（前略）

.0864	4	14
.0865	4	15

(中略)

.2353	15	32
.2354	16	32

(後略)

p=0.0865〜 0.2353 のとき，100 回さいころを投げて 1 の目が 15 回出ることは，危険率 5 %では棄却されない。

すなわち，1 の目が出る確率 p の 95 %信頼区間は $0.0865 \leqq p \leqq 0.2353$。

例題 65 （母比率の推定）
ある工場で，製品の中から無作為に 400 個を選んで調べたところ，40 個の不良品があった。
この工場で作られる製品の不良率 p に対する信頼度 95 %の信頼区間を求めよ。

解　不良率を p とするとき，400 個中 x 個の不良品ができる確率は ${}_{400}\mathrm{C}_x p^x (1-p)^{400-x}$
$P(X=x) = {}_{400}\mathrm{C}_x p^x (1-p)^{400-x}$ とし，$p = 0.0001, \ldots, 0.9999$ に対し，
$P(X<a) \geqq 0.025, P(X>b) \leqq 0.025$ となる最小の a，最大の b を求める。

上の例題と同様のプログラムを実行して
（前略）

.0724	19	39
.0725	19	40
（中略）		
.1336	40	67
.1337	41	67

（後略）

p の 95 %信頼区間は $0.0725 \leqq p \leqq 0.1336$。
☆正規分布で近似する必要がない。上述の結果は十進 BASIC の 10 進 1000 桁モードを使用して求めた。

7　検討課題

7.1　　整式（剰余定理，因数定理，恒等式）

☆　大方の生徒にとって存在意義をあまり感じない。技能としての整式の割算と，整式 $P(x)$ について，$P(\alpha) = 0$ なら $P(x)$ を $(x - \alpha)$ で割れば因数分解できる　という経験則を 3 次関数の単元で学ばさせれば十分ではないだろうか。

7.1.1　整式

文字 x と数の加減乗の演算で表される数式を整式という。

文字 x を含む整式を $P(x)$ で表す。（条件も $P(x)$ のように書くが，整式と宣言するか，条件と宣言するかで区別する。⋯ 単に $P(x)$ とのみ書くとどちらか区別できない。）

2 つの整式は，加減乗の演算で変形して等しいことが示せるとき，整式として等しいという。たとえば，$(x+1)(x+2)$ と x^2+3x+2 とは整式として等しい。

文字 x の整式は展開して整理すると $a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ の形になる。だから，文字 x の整式が整式として等しいとは，その形に整理したとき各次数の項の係数がすべて等しいことである。

整式として等しいことも数として等しいことも同じ記号「=」を用いて表す。文字を含むとき，その文字を整式を構成する文字と見るか数と見るかで解釈が分かれる。「整式の計算公式」における「=」は整式として等しいことを意味している。

Note.　関数と数式の違い

　関数は入力と出力にのみ注目した概念。異なる数式が同じ関数を表すかもしれない。そのような例が，整数の剰余系に現れる。また，関数は数式で表されるとは限らない。

☆「整式が表す関数」でなく整式を対象とする数学を学ばせることが必要か？

7.1.2　整式の整除

整式 $A(x)$ を整式 $B(x)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，

$A(x) = B(x)Q(x) + R(x), R(x)$ の次数 $<B(x)$ の次数

ただし，0 の次数は $-\infty$, 0 以外の定数の次数は 0 とする。

また，このとき，$Q(x)$ の次数 $+B(x)$ の次数 $= A(x)$ の次数となっている。

7.1.3　剰余定理と因数定理

整式 $P(x)$ に含まれる文字 x に数 α を代入してできる数を $P(\alpha)$ で表す。

たとえば，$P(x) = x^2 + 2x + 3$ のとき $P(2) = 2^2 + 2 \times 2 + 3 = 11$。

整式 $P(x)$ を一次式 $x - \alpha$ で割った商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，余り $R(x)$ は定数。

余りを R で表すと，$P(x) = B(x)(x - \alpha) + R$

x に α を代入して，$P(\alpha) = B(\alpha)(\alpha—\alpha) + R = R$

剰余定理　整式 $P(x)$ を一次式 $x-\alpha$ で割った商を $Q(x)$，余りを R とすると，$R = P(\alpha)$

因数定理　整式 $P(x)$ において $P(\alpha) = 0$ ならば，$P(x) = Q(x)(x-\alpha)$ と表せる。

☆ $P(x)$ が $(x-\alpha)$ を因数に持てば $P(\alpha) = 0$ であるから，因数分解の過程で $P(\alpha) = 0$ となる α を探してきて $P(x)$ を $(x-\alpha)$ で割ってみることを思いつく。そして，実際に割って割れることを確かめてしまえば（論理的には）因数定理は不要。因数定理を教える意義は何だろうか？

7.1.4　恒等式

文字式の計算は x にいずれの数が代入されても成立する計算公式に基づいて実行される。だから，2 つの整式 $P(x), Q(x)$ が整式として等しいとき，任意の数 α に対し $P(\alpha) = Q(\alpha)$ である。

逆に，異なる整式 $P(x), Q(x)$ で，任意の数 α に対し $P(\alpha) = Q(\alpha)$ となることがあるだろうか。

定理　次数が n 以下である 2 つの整式 $P(x), Q(x)$ に対し，次の (1)〜(3) は同値

(1)（整式として）$P(x) = Q(x)$

(2)　任意の数 α について $P(\alpha) = Q(\alpha)$

(3)　相異なる $n+1$ 個の数値 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ について $P(\alpha_k) = Q(\alpha_k)(k = 1, \cdots, n+1)$

証明. (1)⇒(2)⇒(3) は明らかなので，(3)⇒(1) を示す。

$F(x) = P(x) - Q(x)$ とおくと，$F(x)$ は次数 n 以下の整式である。

$F(\alpha_k) = 0(k = 1, \cdots, n+1)$ なので，$F(x) = Q(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha)\cdots(x-\alpha_{n+1})$ と表せる。

このとき $Q(x) \neq 0$ であれば，$F(x)$ の次数が n 次以下であることに反する。$\therefore Q(x) = 0$ すなわち，$P(x) = Q(x)$ □

☆高次導関数を利用しても証明できる。因数定理が不可欠ではない。

7.2　遷移確率

7.2.1　遷移行列

例題

動点 P は，2 地点 A,B のいずれかに存在し，1 日ごとに所在が定まる。

ある日 A 地点にいたとき，翌日も A 地点にいる確率は 0.4，B 地点に移る確率は 0.6,

B 地点にいたとき，翌日 A 地点に移る確率は 0.9，B 地点に留まる確率は 0.1 であるという。

始め A 地点にいたとき，n 日目 A 地点にいる確率を a_n，B 地点にいる確率を b_n とする。

$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 0.4a_n + 0.9b_n$

$b_0 = 0, \quad b_{n+1} = 0.6a_n + 0.1b_n$

数値計算を実行してみると，$a_n \to 0.6, b_n \to 0.4(n \to \infty)$ となりそう。

それを証明する。

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$ とおいて，$A\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}$ となる $k, \boldsymbol{x}$ を求める (ただし，$\boldsymbol{x} \neq 0$)。

$A\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}$ を書き換えると

$A\boldsymbol{x} - kE\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$(A - kE)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$\begin{pmatrix} 0.4-k & 0.9 \\ 0.6 & 0.1-k \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{x} \neq 0$ より $\det \begin{pmatrix} 0.4-k & 0.9 \\ 0.6 & 0.1-k \end{pmatrix} = 0$

$(0.4-k)(0.1-k) - 0.9 \times 0.6 = 0$

$k = -0.5, 1$

$k = -0.5$ のとき $\begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。すなわち，$A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \times (-0.5) \\ (-1) \times (-0.5) \end{pmatrix}$

$k = 1$ のとき $\begin{pmatrix} -0.6 & 0.9 \\ 0.6 & -0.6 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を選ぶ。すなわち，$A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 \\ 2 \times 1 \end{pmatrix}$

まとめると $A \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \times (-0.5) & 3 \times 1 \\ (-1) \times (-0.5) & 2 \times 1 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} A^n \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

$\det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -5$ より $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-5} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$

$\therefore A^n = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-0.5)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.4 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$

$\qquad = \begin{pmatrix} -(-0.5)^n & 3 \\ (-0.5)^n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.4 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0.6+0.4\times(-0.5)^n & 0.6-0.8\times(-0.5)^n \\ 0.4-0.4\,(-0.5)^n & 0.4+0.8\times(-0.5)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a_n = 0.6 + 0.4 \times (-0.5)^n$

$b_n = 0.4 + 0.8 \times (-0.5)^n$

したがって，$n \to \infty$ のとき $a_n \to 0.6, b_n \to 0.4$

☆　行列の対角化はやや高度。といって，対角化を避けると遷移行列を扱う意義が乏しくなる。また，2×2 行列に限定すると，n 乗を求めるのにケイリー—ハミルトンの定理を用いる裏技が流行る（これは避けなければならない)。

7.2.2　行列の対角化

$A\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}$ となる $k, \boldsymbol{x}$ が 2 組求まるとき，それらを $j, k, \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, すなわち

$$A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = j\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

とする。ただし，$j \neq 0, k \neq 0, j \neq k$。

$$A\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} jp_1 & kq_1 \\ jp_2 & kq_2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \neq 0$ である。

なぜなら，$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ とすると，

$tA\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = tk\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ より $A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ となるので $k\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = j\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

これは，$j \neq 0, k \neq 0, j \neq k$ に反する。

$$\therefore \det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}^{-1} A\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

7.3　多変数関数（偏微分）

高校で偏微分を教えるとしたら，

$z = f(x, y)$ のとき，$dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$
が使いこなせるようにする程度が適切か。具体的には，たとえば，誤差の伝搬の見積り。
波動方程式
$u = A\sin(kx - \omega t)$ のとき，$\dfrac{1}{k^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\omega^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
は物理との関係で有用。
ただし，偏導関数が連続であれば全微分可能であるが，その証明はやさしくない。

7.4　正規分布

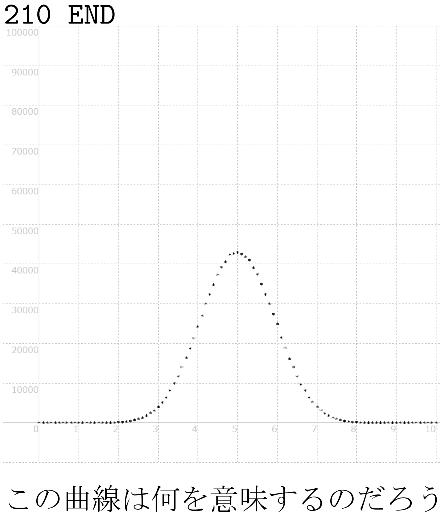
検定・推定の理論は正規分布抜きに学ぶことができる。たとえば，2 項分布の問題であれば，正規分布による近似を行わないほうが正確な計算ができるから，正規分布による近似の必要性はない。

正規分布を学ぶ意義は，誤差の累積が正規分布を導くこと。実験的なアプローチが欠かせない。

実験　一様乱数の和の分布

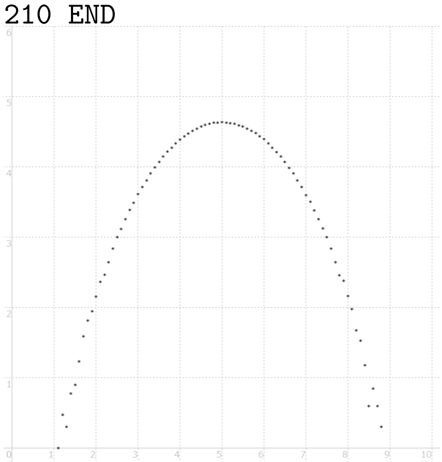
10 個の [0,1) 一様乱数の和の分布を求めてみた。

```
100 DEF s=RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND
110 DIM d(0 TO 100)
120 FOR t=1 TO 10^6
130    LET i=ROUND(s*10)
140    LET d(i)=d(i)+1
150 NEXT t
160 SET WINDOW -9,101,-10^4,10^5
170 DRAW grid(1,10^4) WITH SCALE(10,1)
180 FOR i=0 TO 100
190    PLOT POINTS:i,d(i)
200 NEXT i
210 END
```



この曲線は何を意味するのだろうか？　縦軸の目盛りを常用対数に変えてみる。

```
100 DEF s=RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND
110 DIM d(0 TO 100)
120 FOR t=1 TO 10^6
130    LET i=ROUND(s*10)
140    LET d(i)=d(i)+1
150 NEXT t
160 SET WINDOW -.2,10.2,-0.2,6
170 DRAW grid
180 FOR i=0 TO 100
190    IF d(i)>0 THEN PLOT POINTS:i/10,LOG10(d(i))
200 NEXT i
210 END
```



この結果は，10 個の [0,1) 一様乱数の和を X とおくとき，$\log_{10} P(X=x)$ が x の 2 次関数であることを示している。

正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$

確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとは，

$P(a \leqq X \leqq b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$ となること。

確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$E(X)=m, V(X)=\ \sigma^2$ であり，確率変数 $\dfrac{X-m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0,1^2)$ に従う。

☆重要な視点は，期待値が 0 の正規分布が（1 より小さい定数 a があって）a^{x^2} に比例すること。そのうち，分散が 1 であるように定数を定めたものが標準正規分布。ただし，その論理を計算で示すのはかなり難しい（おそらく複素解析が必須）。

連続型確率変数の期待値と分散

連続型確率変数 X に対し $P(a \leqq X \leqq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ となる関数 $f(x)$ を取り，$E(X) = \displaystyle\int_a^b xf(x)dx, V(X) = \int_a^b (x-m)^2 f(x)dx$,（ただし，$m=E(X)$）とする。

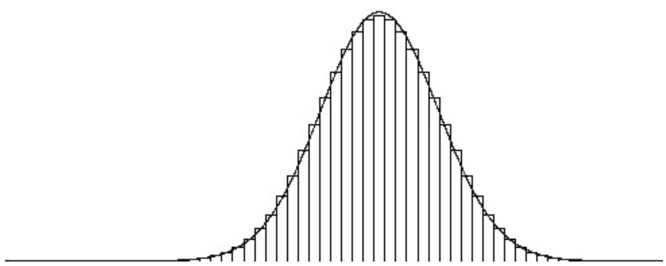
☆この定義が期待値，分散を意味することは，区分求積を知らないと理解できない。

中心極限定理

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立であって，各 X_k は平均値が m，分散が σ^2 であるような同一の確率分布を持つとする。n が十分大きいとき，$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ の分布は，正規分布 $N(nm, n\ \sigma^2)$ に近い。従って，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ の分布は，正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に近い。

中心極限定理の証明は難しいが，二項分布や多項分布を計算したり，乱数を用いたシミュレーションなどで近似の様子を観察することができる。

例 66 さいころを n 回振るとき，目の数の和の期待値は $\frac{7}{2}n$, 分散は $\frac{35}{12}n$。目の数の和の分布と $N(\frac{7}{2}n, \frac{35}{12}n)$ のグラフを描くとほぼ一致している。



練習 67 さいころを 10000 回投げるとき 1 の目の出る回数の確率分布を求めよ。

(1) $a_k = {}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}$ とおくとき，$\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{n-k}{k+1}\cdot\dfrac{p}{1-p}$ であることを利用して計算する。

[ヒント]$b_k = \log a_k$ とおくと $b_{k+1} - b_k = \log\dfrac{n-k}{k+1} + \log\dfrac{p}{1-p}$，$b_0 = n\log(1-p)$, $b_n = n\log p$。上向き，下向きの両方向からの計算で誤差を減らす。

(2) 乱数によるシミュレーション。

(3) 正規分布で近似して求める。

中心極限定理からの帰結

定理 68 n が十分大きいとき，確率変数 $\overline{X}$ について，不等式

$m - 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} < m + 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

が成立する確率はおよそ 95% である。

不等式を $\overline{X} - 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ と変形することで，σ が既知であるときの，未知母数 m の 95 %信頼区間を求めることができる。この不等式における確率変

数は $\overline{X}$ であることに注意。この不等式は，標本調査を多数回繰り返したとき，得られた信頼区間が未知母数 m を含む確率が 95 %であることを意味する。

観察 69 信頼区間の幅 $\propto \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

だから，たとえば，信頼区間の幅を $\frac{1}{10}$ 倍にしたければ，標本の大きさ n を 100 倍にしなければならない。

これと同様の傾向が正規分布を仮定できない場合にも観察される。

7.4.1 ベイズ推定

事前分布を仮定し，実験結果から事後分布を計算する。

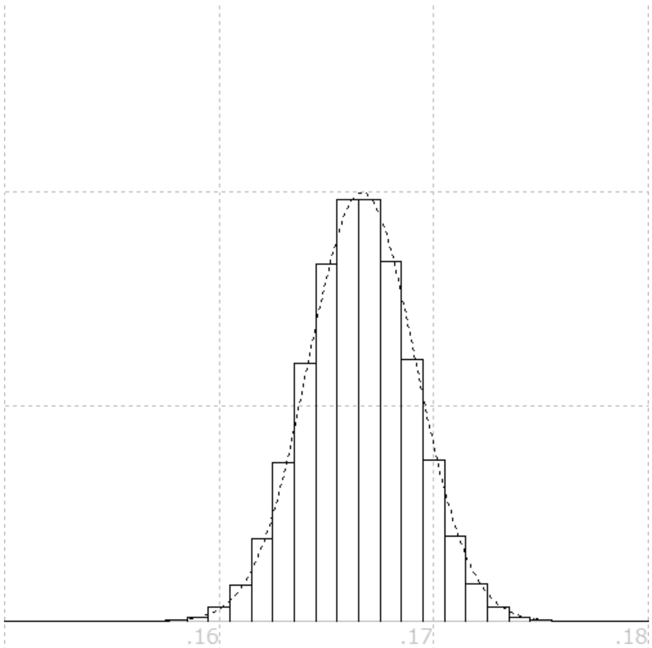
例題 70 A 社製のさいころは，1 の目が出る確率が平均 $\dfrac{1}{6}$，分散 0.0025^2 の正規分布に従うことが知られている。A 社製のさいころを一つ取り出し，200 回投げたところ，1 の目が 30 回出た。このとき，このさいころの 1 の目の出る確率 p の確率分布を求めよ。

解. $f(x) = \dfrac{1}{0.0025\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2}{2 \times 0.0025^2}\right)$,
$\Delta x = \frac{1}{10000}, x_k = k\Delta x \quad (k = 0, 1, \ldots, 10000)$ とする。
$p = x_k$ のとき，このさいころを 200 回投げて 1 の目が 30 回出る確率は ${}_{200}\mathrm{C}_{30} {x_k}^{30} (1 - x_k)^{170}$
このさいころを 200 回投げて 1 の目が 30 回出る確率は $\displaystyle\sum_{k=0}^{1000} f(x_k)\Delta x \times {}_{200}\mathrm{C}_{30} {x_k}^{30} (1 - x_k)^{170}$
このとき，$x_k - 00005 \leqq p < x_k + 00005$ となる条件付き確率は
$$\frac{f(x_k)\Delta x \times_{200} \mathrm{C}_{30}\ {x_k}^{30} (1 - x_k)^{170}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{1000} f(x_k)\Delta x \times_{200} \mathrm{C}_{30}\ {x_k}^{30} (1 - x_k)^{170}} = \frac{f(x_k) \times {x_k}^{30} (1 - x_k)^{170}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{1000} f(x_k) \times {x_k}^{30} (1 - x_k)^{170}} \quad \square$$

```
100 OPTION ARITHMETIC NATIVE
110 DEF f(x)=EXP(-(x-1/6)^2/(2*0.0025^2))/(0.0025*SQR(2*PI))
120 LET N=1000
130 DIM p(0 TO N)
140 LET t=0
150 FOR k=0 TO N
160    LET x=k/N
170    LET p(k)=f(x)*x^30*(1-x)^170
180    LET t=t+p(k)
190 NEXT k
200 MAT PRINT p;
210 MAT p=(1/t)*p
220 SET WINDOW 0.15, 0.18, -10, 230
230 DRAW grid(0.01,80)
240 FOR k=0 TO N
```

```
250     LET x=k/N
260     PLOT LINES: x-0.5/N,0 ;x-0.5/N, p(k)*N; x+0.5/N, p(k)*N; x+0.5/N,0
270 NEXT k
280 SET line STYLE 3
290 FOR x=0.15 TO 0.18 STEP 0.0001
300     PLOT LINES:x,f(x);
310 NEXT x
320 END
```

点線は事前分布。事後分布がわずかに左方にシフトしている。



例題 71 あるさいころを，2000 回投げたところ，1 の目が 300 回出た。このとき，このさいころの 1 の目の出る確率 p の確率分布を求めよ。

さいころの 1 の目の出る確率について何も仮定がないので，それは一様分布に従うとして計算する。

解. $f(x) = \begin{cases} 1 \ (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 \ (x < 0 \text{ または } 1 < x) \end{cases}$,

$\Delta x = \frac{1}{10000}, x_k = k\Delta x \quad (k = 0, 1, \ldots, 10000)$ とする。

$p = x_k$ のとき，このさいころを 2000 回投げて 1 の目が 300 回出る確率は

$$ {}_{2000}\mathrm{C}_{30} {x_k}^{300} (1 - x_k)^{1700} $$

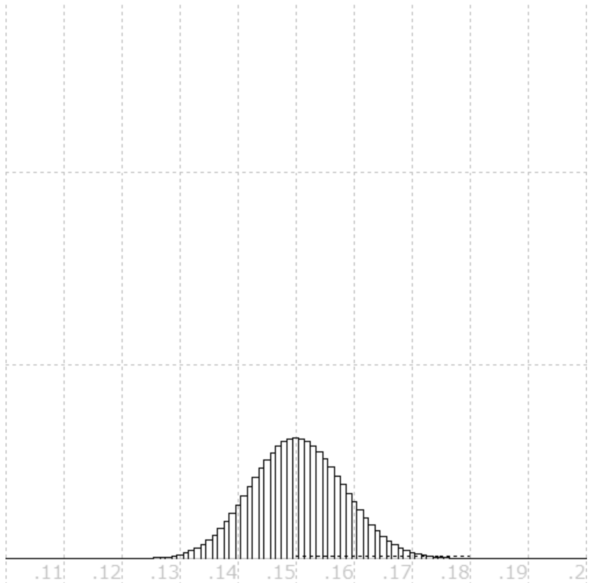
従って，このさいころを 2000 回投げて 1 の目が 300 回出る確率は

$$ \sum_{k=0}^{1000} f(x_k)\Delta x \times_{2000} \mathrm{C}_{300} {x_k}^{300} (1 - x_k)^{1700} $$

このとき，$x_k - 00005 \leqq p < x_k + 00005$ となる条件付き確率は

$$ \frac{\Delta x \times_{2000} \mathrm{C}_{300} \ {x_k}^{300} (1 - x_k)^{1700}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{1000} \Delta x \times_{2000} \mathrm{C}_{300} \ {x_k}^{300} (1 - x_k)^{1700}} = \frac{{x_k}^{300} (1 - x_k)^{1700}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{1000} {x_k}^{300} (1 - x_k)^{1700}} \ \square $$

```
100 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
110 DEF f(x)=1
120 LET N=1000
130 DIM p(0 TO N)
140 LET t=0
150 FOR k=0 TO N
160    LET x=k/N
170    LET p(k)=f(x)*x^300*(1-x)^1700
180    LET t=t+p(k)
190 NEXT k
200 MAT PRINT p;
210 MAT p=(1/t)*p
220 SET WINDOW 0.1, 0.2, -10, 230
230 DRAW grid(0.01,80)
240 FOR k=0 TO N
250    LET x=k/N
260    PLOT LINES: x-0.5/N,0 ;x-0.5/N, p(k)*N; x+0.5/N, p(k)*N; x+0.5/N,0
270 NEXT k
320 END
```



十進 BASIC の十進 1000 桁モードを利用して計算している。通常の倍精度数で計算するためには漸化式を用いるなどの工夫が必要。

7.4.2　逆三角関数

数式処理ソフトで原始関数を求めるとき，逆三角関数の知識は必須（結果の解釈ができない)。ただし，以下に示す公式の暗記を強いるものになるようだと逆効果。

逆正弦

$\arcsin x \quad\quad x = \sin\theta$ となる θ，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

$f(x) = \arcsin x$ とする。

$\sin f(x) = x$ なので，$f'(x) = \dfrac{1}{\cos f(x)}$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq f(x) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なので，$\cos f(x) = \sqrt{1-\sin^2 f(x)} = \sqrt{1-x^2}$

$\therefore (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

逆正接

$\arctan x = \quad\quad x = \tan\theta$ となる θ, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

$(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f(x) = \arctan x$ とする。

$\tan f(x) = x$ なので，$\dfrac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x) = 1$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq f(x) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なので，$\cos^2 f(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2 f(x)}$

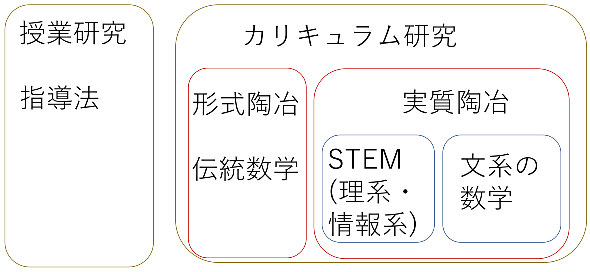
$\therefore (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

論点その１

３つの対立軸

2021年8月8日　白石和夫

1



2

対立軸１

授業研究
Active Learning
Deep Learning

カリキュラム研究
現代社会が求める数学との乖離が大。

Active Learning, Deep Learning が実現しないのは，カリキュラムの構造に原因がある。理解よりも暗記に走るのはなぜか。

3

対立軸２

形式陶冶
伝統的な数学が思考力育成に適している。

実質陶冶
時代が求める数学教育
多くの人が創造的な仕事のために数学が使えるように。

4

対立軸3

STEM
3次元空間の幾何
情報通信のための代数系

文系の数学
統計学
幾何や代数系は不要

5

追記

2021年8月8日の学会課題SGで示したスライドですが，議論を進めるとき，どの視点から考えているのかを意識することが大切であろうと思い，収録します。
たとえば，現状で「文系の数学」を学ぶのに幾何や代数系は不要です。幾何や代数系の拡充を主張することは，文系数学の基盤を学ぶ時間を圧迫することを意味します。
さらに，2枚目のスライド全体を1つの側に追いやる対立軸0と呼ぶべき視点の存在も見えてきました。

6

論点その２

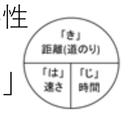
何が子供たちを暗記に走らせるか

2021年8月8日　白石和夫

1

数学ができる人の考え方（比率・割合）

数学ができる人には，「きはじ」の必要性が理解できない。



「時速40kmで60km走るのに要する時間」

40km: 1時間

60km: □時間

80km: 2時間

120km: 3時間

2

数学ができる人の考え方をカリキュラムに取り入れることは可能

日本

小5

異種の二つの量の割合

（単位量当たりの大きさ）

小6

比（比を比の値で定義）

シンガポール

5年 Ratio → Rate → Percentage

6年 Ratio and Fraction

→Ratio and Proportion

→ Percentage

→ Speed → Pie Charts

単位量当たりの考えを学ぶのは，比を学んだ後。

3

課題

数学ができる人（教科書を無視して学べる人）には難なくできることが，教科書通りに学ぶ子には大きな障害になっていることがある。

そのような事例を見出し，改善すること。

4

追記（2023年3月）

現状の教え方に関心を持っていただきたいのです。

なぜ，こんな難しい考え方で教えなければいけないのか

という疑問を投げかけてほしいのです。

それをできるのが，多様な人材を抱える数学教育学会です。

5

Society5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み

小学校における教育内容について

丹　洋一（東京福祉大学教育学部）
ytan@mwnet.jp

概要：
□今後の小学校段階の学校数学の内容について検討した。特に検討した内容は、「集合の考え方とプログラミングに必要な数学について」、「ICT 機器をツールとして利用できるようにすること」の 2 つである。このことによって、学んだ数学を実際の問題に活用できるような子どもの育成を目指す。計算方法の習得・習熟のみより、意味理解と論理的に思考し表現できて課題解決に使えることが、重要になる。

検索語：Society5.0,ICT 教育,小学校,算数

1. はじめに

日本の初等数学教育はずっと小学校では「算数」中学校以降では「数学」と呼称してきた。この違いは、平林(1986)がいう「実は『初等教育は学校教育における一段階というよりもむしろ一系統』であり、『民衆の日常生活の必要を満すために、読み・書き・算術を中心として初歩的な知識を与え、ときには国民教化に必要な教化（宗教・修身など）を加えながら、それだけで一応完成する教育とみなされて』いた。・・・・・・つまり初等教育は庶民の教育であり、中等教育は学者・指導者の教育であって、両者は理念的に、その出発から全く無関係のものであった。」に源流があるように思える。

ただし、明治時代以降の庶民の教育である「算数」では、生活で使う量を扱い、買い物等から始まる商、農水産等に関わる内容が多く取り扱われてきた。しかし、現代社会で必要とされる技能と知識は、これにはとどまるものではない。初等教育から数学を学ぶ時代になってきている。

この SG では、Society5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築に関して、小学校段階の教育内容について考察して提案してきた。守屋（2005）のカリキュラムを基本にして、以下の発表を行ってきた。

・丹（2022）「小学校カリキュラムの検討～集合の考え方とプログラミングに必要な数学を中心にして」数学教育学会 2022 年度春季年会 Organized Session A 発表
・丹（2022）「小学校カリキュラムの検討について」,数学教育学会冬季研究会発表
・丹（2023）「小学校における計算について」,数学教育学会春季年会

これらの発表を元に報告をまとめたい。

2. 集合の考え方とプログラミングに必要な数学について

2020 年度からプログラミング教育が小学校で必修化された。多くの小学校では、5・6 年生の算数の時間で行われている。しかし、教科書の内容は、文科省で例示した正多角形の作図」を Scratch 等で行う活動が中心で、現場でも手探りの状態が続いているように思われる。はっきりとした数学の素養がなく、ただビジュアルプログラミングをかじって、コマンドのブロックを並べて、キャラクターを動かして遊ぶだけでは、文科省が目的とした「論理的思考力」は身につかない。何を教材として扱うかが問題になってくる。

この課題に対して、集合の考え方を核にすることが重要である。集合の考え方を核にして、以下の学習を行う。

ア命題と論理
イ数だけでなく、文字列も変数として扱い、演算を行う。
ウ剰余系（同じ要素を繰り返す余り計算の利用）
エ群論（運動も要素として扱い、演算を行う。有限集合の中で、演算について閉じていることを学ぶ。）

アに関しては、接続詞の表現を正確に使えることが重要である。特に論理で扱う「not（でない)・and（かつ)・or（または)」を正確に区別して使えることが必要である。プログラミングで利用する真理表の作成にもつながるようにしたい。ドモルガンの法則を実感させることもプログラミングで扱いたい。
イに関しては、数だけでなく、文字列も変数として扱えること、演算ができることを学ばせたい。
ウに関しては、プログラミングでは余りの計算が多く用いられている。その利用の仕方を学ぶことが重要になる。小学校でも「暦の曜日」の計算を題材にできる。
エに関しては、要素が演算について閉じていること、簡単な群について学ぶこともできる。模様書き（長方形、正方形）をすることによって、運動を要素として考えることができ、簡単な群論について学ぶことができる。

3. ICT 機器をツールとして利用できるようにすること

今までの授業は子ども全員が、ノート、鉛筆、消しゴム、定規・コンパス（電卓）を持つことを前提としていた。しかし、近年急速に学校の ICT 環境整備が進み、多くの学校で 1 人 1 台の PC・タブレットを持って授業に参加出来るようになった。小学校算数で ICT 機器を活用する狙いとして、
ア ICT 機器の利用によって、数学的概念の理解強化を図る。
イ教師の一斉指示だけでなく、必要な時にツールとして利用する。
ウ ICT 機器の利用によって可能になる新たな概念の獲得をねらう
を挙げておきたい。またツールとしてのアプリケーション等は
・表計算ソフト（EXCEL 等）
・作図ツール（Geogebra 等）
・プログラミング言語・環境（Scratch 等）
を想定している。
アについては、文字式・変数の意味を理解するのに、表計算ソフトを利用することが想定される。その後、方程式の理解にも利用できる。(渡部(2002)また、確率・統計の概念を理解させるのにも利用できる。また、作図ツールやプログラミングによって、関数のグラフを作図することが当たり前の授業になる。
イとしては、面倒な計算を多く必要とする場面で、表計算ソフトを子どもが利用することが予想される。不定形の面積を計算する際に、台形の公式を入力して、そこに上底・下底・高さを入力して、次々に面積を計算する。(渡邉 2002)
ウとしては、
・モンテカルロ法を利用した円周率の計算等
・カオスゲームの描画によって、フラクタル図形を作成し、考察する。
その他、今までは計算の確かめや思考過程をたどるために、ノートに書きこんでいたが、表計算ソフトのセルに数値と式を入力しながら計算させることは、計算の式と結果を同時に表示し、記録できるという意味で学び方が変わる。
数学の知識や技能を学んでも、そのことだけでは、活用できるようにならない。活用の経験が必要になる。その意味で ICT 機器をツールとして、子ども自身が判断して使えるようになることは、大切なことである。

4. まとめ

今までの小学校算数では、計算方法を理解し、習熟させることに多くの時間が割り当てられ

てきた。そして、しかし、ICT 機器の発達と普及によって、数学の意味理解と生活・社会の課題解決に活用することがますます重要になってきている。そして可能になってきている。
　だからこそ、小学校段階においても教育内容の改善が必要になってくる。日本ではプログラミング教育がはじまったばかりであり、小学校ではビジュアルプログラミング、そこからテキストプログラミングに進むことが検討されていて、どの言語・ツールを採用するかが問題になっている。しかし、最近は ChatGPT 等のＡＩ利用によって日常言語によるプログラム作成が可能になり、人間は何をさせるか指示・質問するだけでないかとも言われる時代がきている。
　そのような時代になり、数学の価値はますます増大している。計算のみよりも意味理解を大事にすること、論理的に思考し表現できて課題解決に使えることが、変わらず重要になってくる。

引用文献

[1]平林一榮,「数学教育の有効性のために」,奈良教育大学紀要 35 巻第 2 号,1986
[2]守屋誠司,「数学教育における小・中一貫カリキュラムの試案と実験事例－その２－」, 京都教育大学「教育実践研究紀要」第５号, pp. 45-55, 2005
[3]丹洋一,「小学校カリキュラムの検討～集合の考え方とプログラミングに必要な数学を中心にして」, 数学教育学会 2022 年度春季年会予稿集, pp. 65-67, 2022
[4]丹洋一,「小学校カリキュラムの検討～集合の考え方とプログラミングに必要な数学を中心にして」, 数学教育学会 2023 年度春季年会予稿集, pp. 93-95, 2023
[5]守屋誠司編, 小学校指導法算数改定第 2 版, 玉川大学出版部, 2019 年.
[6]渡邉 伸樹, 代数の体系化をめざして－その 1－小学校 1 年生における文字の Excel による指導, 数学教育学会誌, Vol. 43 1-2 号, pp. 25-34, 2002
[7]渡邉 伸樹, 代数の体系化をめざして－そのⅡ－小学校 5 年生へのエクセルによる不定形の求積の指導, 数学教育学会誌, Vol. 43 3-4 号, pp. 5-15, 2002

学会課題 Study Group

Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み

中学校における ICT を取り巻く現状と考察

高山琢磨（東京都港区立港南中学校）

概要：Society 5.0 を見据えた教員養成を考える上で，中学校の学校現場における数学教育の在り方を考える必要がある。本稿では，Society5.0 の時代における ICT を用いた文理融合の数学教育の在り方を考察する。特に，①学習者用端末のさらなる活用②AI 技術の進歩に対応する授業改善③データサイエンス教育およびプログラミング教育の充実の 3 点について学校現場の状況を鑑み考察していく。

検索語：Society 5.0，AI 技術，データサイエンス，プログラミング

1. はじめに

2022 年，新型コロナウイルスの蔓延により一人一台端末の普及は前倒しして完了した。タブレットを中心とした学習者用端末を授業で使用できる環境が整ったことにより，生徒の学習環境，教室での授業の在り方は大きく変化している。数学の授業においても，以前から Grapes を用いた関数の授業などは行われてきたが，生徒全員がパソコン室へ移動して活動する授業がほとんどであった。しかしながら，現在はタブレットパソコンが生徒一人につき一台与えられ，インターネットや様々なソフトウエアを自由に使え，教師のタブレットの内容も素早く教室において投影される環境が整った。教員養成においても，学生が小学校から高校までの 12 年間に学習者用端末を自由に使いこなして大学へ入学してくることから，その授業のありかたにも大きな変化をもたらすことは言うまでもない。

本稿では，Society 5.0 に対応できる文理融合の数学教育を実現するために，次の３点の重要性を主張する。

①統計グラフを活用してデータをビジュアル化することで，わかりやすく表現し，議論を通して分析する。

②現実世界の問題を実際のデータを用いて数学的に解決する。

③数学における論理を理解し，言語活動をより論理的に行えるようにする。

④プログラミングを数学の授業に活用し，論理的に考える力を養う。

これらの実現に向けて，学校現場の現状を鑑み，具体的な方策を提案する。

2. 一人一台の学習者用端末の活用

現在のところ，学校における生徒の学習者用端末使用のルールは，学校によってかなり差があることが明らかとなっている。教師が指示したときのみ生徒は机上に学習者用端末を出すことが許され，指定されたソフトウエアのみの使用を許可される学校がある反面，生徒は常に机上に学習者用端末を置いて，自分が必要だと思うときに学習者用端末を開き，筆記用具を使うように自由に学習活動に使用することができる学校もある。また，学習者用端末の自宅への持ち帰りについても，学校ごとにルールが異なるケースが出てきている。

Society5.0 の時代にあって，授業中は常時タブレットなどの学習者用端末を生徒の机上に置き，筆記用具と同じように自由に使える環境を整えるべきであろう。その際に，生徒はできる限り汎用性のあるアプリケーションを使用することで，

教師が日常使用しているアプリケーションを用いて指導することが可能となり，授業準備の簡素化にもつながる。また，学習者用端末を自宅へ持ち帰り，指定されたドリル学習を行うことはもとより，教科書，問題集の開設動画を見たり，自分の興味のある数学の内容の動画を視聴したりすることで，主体的な学習を促すことができる。さらに，生徒同士が問題についてチャットを用いて学び合う，あるいは，生徒自身が解説動画を作成し互いに使用しあう，あるいは教師の指導を仰ぐといったことが期待される。

3. AI 技術の進歩に対応する授業改善

2023 年，チャット AI の出現は社会に大きな驚きをもたらした。今後の社会構造の変化を予感させる出来事といっても過言ではない。例えば，ある目的をもって書籍やインターネットを用いて調べ，必要な情報を取捨選択し自分の考えを構築する能力を図る「調べ学習」は，チャット AI の出現が課題としてのあり方に大きな変化をもたらす。また，様々な職種において今まで行ってきた経験的，学習的な専門的知識が無意味なものとなってしまう時代がそこまで到来している。このような時代にあって，教育現場，さらには数学教育がどのようにチャット AI に向き合っていけばよいのかを考えることは喫緊の課題である。

筆者はチャット AI の使用を制限するのではなく，それを活用していく姿勢が大切であると考える。例えば，チャット AI を用いて図形問題の証明を行ったとき，①その証明を論理的に読み取り，理解する②チャット AI が示した証明が本当に正しいのかを常に批判的に捉え，検証する③チャット AI の示す証明を改良する，あるいはそれ以外の証明があるかどうかを深く考察する，といった学習活動が考えられる。

4. データサイエンスとプログラミング

Society5.0 の数学教育においてプログラミングを扱っていく重要性も指摘しておきたい。データサイエンス，機械学習，AI 等の技術の進化にともない，アルゴリズムや数理モデルの必要性が増している。このような時代にあって，数学的思考や問題解決能力は非常に重要な能力となる。さらにプログラミングを数学の授業で活用することで，論理について学ぶ機会となることを期待したい。

プログラミングの学習では，数学の論理を正確に理解し，活用することが求められる。また，プログラミングの学習は，数学を関連付けておこなうことで，数学の理解が深まることが期待される。

また，データサイエンスを取り巻く環境も日増しに向上している。すなわち，データサイエンス的な手法を用いて，様々なデータをインターネット上から取り込み，度数分布表を作成したり，箱ひげ図を分析したりすることや，プログラミングを用いて過去のデータを検証し，未来を予想することは以前より容易となっている。筆者も，中学校数学科においてプログラミングを活用する授業を提案している。今後，教員養成においても，データサイエンスとプログラミングの融合を視野に入れた数学的活動の指導技術の養成が大切になる。

5. まとめ

以上述べてきたように，Society5.0 の数学教育において，一人一台端末の一層の活用，チャット AI の有効利用，プログラミング教育の導入が重要になるものと筆者は考えている。この大きな変化は，昭和の時代に，電卓が普及し数学の授業で計算技能の必要性を議論した構造と似ていると考えらえる。現在，電卓が普及したことで計算技能が不要であると考える生徒は皆無であろう。Society5.0 に向けて，一人一台端末の普及により，インターネットから生データを取り出し，分析する際に計算の仕方を理解した上で複雑な計算は計算機にまかせることで，より現実に近い値を用いた計算が可能となる。さらに，チャット AI により解を見つけ，それを論理的に読み取り理解する，その解を批判的に捉え，さらに簡潔で理解が容易な解を見出す，このような活動の重要性を教員養成の段階から指導してくことが大切であろう。

引用・参考文献

[1]高山琢磨， プログラミングを関連付けたユークリッド互除法の指導法に関する一考察， 2021 年度春季例会発表論文集，pp. 5-7， 2021 年.

[2] 高山琢磨， 現実場面への円周角の定理の活用を目指した実践の提案，2023 年度春季例会発表論文集，pp. 130-132，2023 年

Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み

― ICT 時代の小・中学校の「数と計算」―

埼玉大学名誉教授　　町田彰一郎

概要: Society5.0 の時代の数学教育、教員養成を考察する。、本論では、とりあえず PC を傍らに置いた「数と計算」のあり方について事例を挙げ考察する。これによって従来の数と計算のあり方を見直し、電卓、PC、デジタル機器を傍らに置いた小・中の算数・数学教育をどのようにすれば可能なのかを検討する。

検索語: 数と計算、基数モデル、位数モデル、EXCEL，データ ・ サイエンス、

1. 教育界に迫りつつある学びの変化

本論に入る前に、「数と計算」の戦後の歴史を振り返る。戦後すぐの「生活単元学習」の時代には、小学校おける「数と計算」は、日常生活における四則計算を目安に行われてきた。「現代化」が始まると、「数と計算」をその構造に着目し「文字式の計算」への移行が進められた。さらに、電卓・PC が開発され、関数教育が進むと実数への移行が進み算数・数学の計算が文字式の計算・グラフ作成へ移り、算数と数学との連携が課題となってきた。そして、スマフォの時代、ICT 教育が始まると、膨大な量の計算はシステムの中に隠れ、人間はその結果を享受する時代となり、データサイエンスが課題となってきた。本論の対象である Society5.0 の時代、インターネットは単なる人と人の連携によるグローバル化、人とものの連携としてのモバイル型大型辞書・辞典としての探索型システムにとどまらず、ロボット、自動運転車等の、ものとものインターネットを介した情報交流が始まった。最近のチャット GTP の開発は、従来の検索型の AI から生成型・会話型 AI が出現したことを示している。チャット GPT(Generative Pretrained Transformer)とは、「素朴な疑問、表現したいテーマをAI に問いかけるとその主題での文章を作ってくれる。」 単に、辞書解説してくれるだけの検索型ではなく、与えられた課題のレポートを作ってくれる会話型・生成型となる。こうした生成型 AI システムの普及により、21 世紀型 AI 時代、生成型ロボットの時代の産業革命が進行中といわれている。

筆者が大学院生の頃、当時米国で開発されだした CAI(Computer Assisted Instruction)研究を始めた、このとき、筆者は学習者に問い発し、学習者の回答事例を分析し、適切な助言を与えるシステムのあり方に直面し、AI 研究が始まったころでもあり、この開発の夢と現実の問題解決の難しさを体験した。もし、ここで、チャット GPT のようなシステムが CAI 研究に活用されたすると、学習者の反応分析は、顔色や経歴も含めすべての応答データが生成型 AI によって解析され、より効率的な

学習場面を実現されることになるだろう。しかしながら、これを安易に受け入れることは将来の人材育成に取って非常に危険な課題を提供することになることは明らかであろう。筆者はその後、工学部から教育学部に職を得たこともあり、また、英国のフレーザー女史の CAI から CAL（Computer Assisted Learning） への示唆もあり、教育の目標を Instruction から Learning へ関心を移した。

数学の教育が一般庶民階層にまで広がっていく時代背景には、農業化から工業化への産業革命があった。日本では明治維新を介して明治に移行し明治 5 年に学校教育制度が生まれた。しかし、こうした工業化が生まれる前に一般庶民を活性化した変容があった。それは、農業化から商業化への変容である。それはヨーロッパで言えば、ルネサンスの時期、数学教育的にいえば、インドから数と計算が入ってきて、アラビアを経て、ドイツに伝わり数式・文字の普及を通じてヨーロッパに活性化をもたらした時期でもある。日本では、室町時代に入ってきた数と計算がそろばんの普及とともに江戸時代の寺小屋、郷学校、藩校等で庶民にも広がった文化がある。これらは商業化、数と計算の文化が近代数学の誕生、工業化への土台を作るのに多大な貢献をしたことになる。よく、いわれるエピソードとして、学校制度が始まった当時の多くの教員は現在の欧米型四則計算、数字、文字の扱いを知らなかった。しかし一方で、江戸時代末期、アメリカにたまたま訪れた 1 庶民が当時の米国の庶民階層では計算が出来なかった計算を、そろばんを使って容易にできたことが当時のアメリカの人たちを驚かせたという。欧米では、優秀な数学者が多数いたがそれは、一般大衆に伝わっていなかった。江戸時代の庶民階層は藩ごとの自立協働もあり、商業化がかなり進んでいた、その中での明治維新という工業化への産業革命が起きたということが日本の近代化を大きく支えてきたといえる。

今日の世界の情勢を俯瞰すると、21 世紀の AI による産業革命下、「グローバルな視点」や「個人の尊厳」を見誤ると、情報・経済の一局集中化が進み、経済・社会・文化格差が生まれ、民主主義の崩壊につながることが危惧される。最近世界中で、自然界の持続可能な開発目標＝SDGsへの取り組みが高まっているが、これと同じことが教育一般の分野でも必要なことかと思われる。

Society5.0 の時代を生きるための「数学の学習」へ進む前に、時代に即した「数と計算」を自立的・協働的に児童・生徒・学生に慣れさせることが重要である。各大学で起きているデータサイエンスへの試みはその流れともいえる。こうした中、今回の学習指導要領の元では、「主体的で対話的な深い学び」、「個別最適な学びと協働的な学び」 等がうたわれている。このことは今日の社会を生き抜く人間の育成にとって重要な視点であるが、今日の日本の社会状況の中では、ここまでの周囲の環境が整っていないようにみえる。現実の学校内では、幼い頃より学校外で事前に知識を得てきている経済的に豊かで教育熱心な親の元での児童・生徒達が、自立協働を進める授業体制の中で、集団をリードし、他の児童・生徒が黙り、クラス内で話し合いが進まず、結果的に深い学びが生まれず、かえって格差を助長してしまうとの指摘がある。

では、生成系 AI 技術が進む時代の「計算」とは、どう捉えたら良いのだろうか？ 単に与えられた内容を受け入れるだけの人間では、グローバル、バーチャルに情報が錯綜する現代の社会では、変容を生き抜くための技術を身につけることが出来ず、ネットを検索しても必要事項を自ら生成し、捉え返すまでにはいかない。そこで、

「自ら課題を持ち、仮説を立て、試行錯誤しながら、ICT を使いこなす個人の育成」
が求められる。こうした中、「計算、さらには数学」とは、複雑な現象の構造を明らかにして、人々の次の行動への示唆を与えてくれる教科であるとの認識を持つことが求められる。

本論の課題設定からすれば、児童・生徒が ICT を使い、自立的・協働的に、計算を行うことによって、問題の構造を明らかにし、課題を見いだす(PPDCA) とともに、「その結果が正しいか、その場に適切なものかどうか」の検証する力の育成がより重要な役割を持つことになる。

2　ICT 活用事例；数と計算の中に潜む「数たちの還暦」

本章では、ICT を使いこなして自立協働して課題を達成する事例をあげ、「数と計算」指導の今日的なあり方を考察する。

(1)　1 桁どうしのたし算をしていくと、どこでもとへ戻るか、それともいつまでも続いていくか。

以下に文献 1 から取り上げた課題、「数たちの還暦」を挙げる。0 から 9 までの数の中から数を一つあげ、下のやり方で順に一桁の計算をしてみる。 たとえば、3、これに 1 をたして 3＋1＝4、次は、1＋4＝5 を作る。このように足し算を続け、10 を超えたら、1 の位の数だけ書き、4＋5＝9, 5＋9＝4、こうして計算を続けていくと、結果はどのようになるか？　試行錯誤をし、主体的、対話的な学習形態を通じて自立協働し、自分たちの理論を作り上げる。小学生でも計算は簡単で、何回かしていく内に次のことが成り立つのではとの予測がでる。

最後に、3, 1 となって、60 となって最初の場面に戻ってくるのではないか。下の表は下方に向かって 3, 1, 4, ,、、と確かめたものである。60 回目で 8, それ以降は 3, 1, と戻ってくることがわかる。

	0	1	2	3	4	5	6
0		7	3	2	3	7	8
1	3	7	8	7	3	2	3
2	1	4	1	9	6	9	1
3	4	1	9	6	9	1	
4	5	5	0	5	5	0	
5	9	6	9	1	4	1	
6	4	1	9	6	9	1	
7	3	7	8	7	3	2	
8	7	8	7	3	2	3	
9	0	5	5	0	5	5	

中には、3, 1, 4, 、、とは異なる数でやってみる児童がでる。

ここでは、これを「数たちが持つ還暦」ということにして、いろいろな数で確かめさせる。計算自体は難しくないので、友達と自立・協働しながら、自分の「思い」をぶつけるように

する。ならないものもあるが、多くの場合 60 になるので、次の「還暦」問題を確かめさせる。どんな数でも最大 60 回で元に戻ることになるだろう。

注；還暦とは、十干、十二支で、すべての組み合わせで 12✕10＝120、丙午(ひのえうま)は言うが、(うまひのえ)とは言わず、60 年でうまれた干支に戻ってくることを還暦という、

そこで、次の課題をだす。

(2)　もし、2011 年 8 月 23 日に生まれた児童がいたとすると、これを
2011823 として、1111111 をたして繰り返えすととうなるだろうか。

次のようにして位ごとに一桁のたし算をしてみると次のように、60 回目に 2011823 と、2011 年 8 月 23 日に戻っている。

	2	0	1	1	8	2	3
1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	1	2	2	9	3	4
3	4	2	3	3	0	4	5
4	7	3	5	5	9	7	9
5	1	5	8	8	9	1	4
	・・・・・・						

	・・・・・・						
55	9	5	7	7	1	9	1
56	7	7	2	2	7	7	2
57	6	2	9	9	8	6	3
58	3	9	1	1	5	3	5
59	9	1	0	0	3	9	8
60	2	0	1	1	8	2	3
	1	1	1	1	1	1	1

(3)　EXCEL を使い仮説が正しいものか確かめる。

上記の計算は、単なる一桁の計算なのでの殆どの児童はできる。しかしながら、どの子であっても 60 回の内に計算間違いをすることが起きる。たとえ手で計算しようと PC を使ってしようと間違いを確認作業することは、これからのビッグ・データの時代には大切である。、求めたことが本当に正しいのか？ 60 回で元に戻るという仮説が本当に正しいことか？ こうしたことが、主体的で協働的な学習活動の中で求められる教育課題といえるだろう。

ここでは、EXCEL を使ってこの仮説が正しいことを確かめる。EXCEL を使うと、数を総当たりし計算しても瞬時に確認出来る。0 に、1 から 9 までの数を足していくとどうなるか？

‘　　　0 0 0 0 0 0 0 0 0

‘ 1　1 2 3 4 5 6 7 8 9

‘ 2　1 2 3 4 5 6 7 8 9

‘　　　・・・・・・・

‘59　1 2 3 4 5 6 7 8 9

‘60　0 0 0 0 0 0 0 0 0

EXCEL には別の機能もあるがここでは数学的な手続きで行うことにする。それは、

例えば、E4 のセルに最初の 0, E5 に 1 があるとする、

E6 では　=(E4+E5)—INT((E4+E5)/10)*10

とすると、0＋1＝1 が求まる、これを縦に、横にコピーしていけば、瞬時に計算が進む。

その後、 1 にそれぞれ、0～9 までの数を足して、

‘　　　1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

‘1　　0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

‘2　　1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

・・・・・・・・・・・・・・

さらに、 ‘ 2 2 2 2 2 2 2 2 2

‘ 0 1 3 4 5 6 7 8 9

と続け　最後に、

‘ 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9

‘ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

まですすめればよい。こうして 10✕10＝100 個の計算(表では、削除してある最初の 0＋0 を含めてある)が短時間で終わる。 60 以外の数もあるが、みな 60 の約数となる。

そこまで、教師の EXCEL 操作を助けながら児童は自立協働して作業をすすめていく内に、次に「なぜこうなるのだろう？」という疑問がわく。小学生では、結果の一覧をみながら話し合い意見を交換して、結果をまとめていけばよいが、中学生では、計算により数の構造が見えてきて、計算を数多くやっている内に、

偶数＋偶数＝偶数、奇数＋奇数＝偶数、

偶数＋奇数＝奇数、奇数＋偶数＝奇数、

との関係と何か関係がありそうだと言う見方が出てくる。

そこで、偶＋奇＝奇の視点から確かめてみる。

例えば、偶数は、0, 2, 4, 6, 8 の 5 個、　奇数は、1, 3, 5, 7, 9 の 5 個

偶数＋偶数＝偶数　は、0, 2, 4, 6, 8、しか使わない。これで調べてみると、

0＋0（1 個）、2＋6, 4＋2、6＋8, 8＋4(4 個)、 0＋2、・・・・8＋8、(20 個）しかないことがわかる。次に、

偶数＋奇数＝奇数で行ってみると、

実際、偶数 6, 奇数 1, 、、、から始まる例で調べると、
6＋1＝7 (6, 1, 7)、1＋7＝8、7＋8＝5, 8＋5＝3 (8, 5, 3)、
5＋3＝8、3＋8＝1, 8＋1＝9 (8, 1, 9)、、、、 として、第一列
6, 1, 7; 8, 5, 3; 8, 1, 9; 0, 9, 9; 8, 7, 5; が出来る。こうして順次隣の数を足していくと
2, 7, 9; 6, 5, 1; 6, 7, 3; 0, 3, 3; 6, 9, 5;
4, 9, 3; 2, 5, 7; 2, 9, 1; 0, 1, 1; 2, 3, 5;
8, 3, 1; 4, 5, 9; 4, 3, 7; 0, 7, 7; 4, 1, 5; 最後は、4, 1, 5 となり、最初の 6、1 へ戻ってくる。
6, 1, 7 で始まる偶、奇、奇のパターンは 20 組あり、 数は 1 組 3 個なので、3✕20＝60 個の数が出てくる。この 60 個の数を先頭が 6 から始まる数を取り出すと、
6, 1, 7; 6, 5, 1; 6, 7, 3; 6, 9, 5; が出てき、ここでは 6, 1 から始めたが、6, 5 からでも、6, 7、6, 9 から初めても前述の 60 個の数が順繰りに出てくるだけなので、これを下のように、6 以外の数でも、8, 0, 2, 4 と順次調べてみると、以下のことに気づく。
先頭が 6 から始まる場合; 6,1,7; 6,5,1; 6,7,3; 6,9,5; で 3 がない。
先頭が 8 から始まる場合; 8,5,3; 8,1,9; 8,7、5; 8,3,1; で 9 がない。
先頭が 0 から始まる場合; 0,9,9; 0.3.3; 0,1,1; 0,7,7; で 5 がない。
先頭が 2 から始まる場合; 2,7,9; 2,5,7; 2,9,1; 2,3,5; で 1 がない。
先頭が 4 から始まる場合; 4,9,3; 4,5,9; 4,3,7; 4,1,5; で 7 がない。

ここで、先頭が 6 のとき, 出てこなかった 3 をあえて使って、みるとどうなるだろうか？ すると、
6, 3, 9; 2, 1, 3; 4, 7, 1; 8, 9, 7; 6, 3, 9･･･となり、元に戻る。これは 5 以外の、すべて前になかった数の組み合わせとなり、3✕4＝12 個 (60 の約数) となることがわかる。
同様に、偶＋偶＝偶、奇＋偶＝奇、奇＋奇＝偶でやってみると、似たような結果となる。
こうした中、100 個の構成は以下のようになる。
0、0;(1 個)、0、5;5, 0;5, 5;(3 個)、2, 6;4, 2;6, 8;8, 4;(4 個)、1, 3;1, 8;2, 1;･･･9, 7;(12 個)、0, 2;0, 4;0, 8;････8, 0;8, 2;8, 6;8, 8;(20 個)、0, 1;0, 3;･･･9, 8;9, 9;(60 個)と
一番多くでた数 60 とその約数からなっていることがわかった。

3 小・中の連携から考える「数と計算」再考

前章で扱ってきた内容は、PC を傍らに置いた算数・数学指導の観点から、従来の筆算中心の「数と計算」指導を見直すものであった。本章では、これを更に深く捉え返し、筆算指導のあり方を ICT との活用の時代にどうあるべきかを提案するものとしたい。その前提には、算数を従来は算術の延長としての Arithmetic として捉えがちであったが、これを Elementary School Mathematics として捉え、小中連携の立場から、従来の数と計算を見直すことを試みる。この立場は、たんなる Mathematics とは異なる、純粋数学の基礎理論を伝える立場ではなく、児童の認知過程を考慮しながら、新たな知見を体験的対話的に体感しながら学ぶ小学生としての観点から「Do Math」を行うものである。しかしここで重要なのは、中高との連携の視点を重視することである。

誌面の制限から詳しくは扱えないが、後の過去の文献を参照願いたい。ここでは、大枠を展開することにする。

(1)　位数モデルから基数モデルへの強調の中、頭位からの計算を目指す

位数モデルとは、たとえば、234 とは、1 が基本となり数え上げ、4 個、30 個、200 個とし位取り基数法によって 234 に到達するモデルである。これに対して、基数モデルとは、単位(1)、(10)、(100)があり、それぞれの単位が住む部屋が位の部屋となる。

注　筆者は本論での基数モデルを、基底モデルとしていた時期があった。解釈の微妙な違いで、どちらでも使えるが、今後は基数モデルとする。

百の位	十の位	一の位
(100)、(100)	(10)、(10) (10)	(1)、(1) (1), (1)
2	3	4

文字式では、(ax+b) + (cx+d)=(a+c)x+(b+d)

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ac+bd)x+bd$

と、頭位から計算する。しかし、数の計算では、32＋54、 32✕54 は末位から計算する。これでは、小学校で行っている数の計算が、中学校の文字計算へとつながっていかない。ではなぜ、小学校では末位から計算するかという、 小学校の数計算は、1 がいくつあるかという位数モデルを採用しているからである。もし、これを基数モデルで考えたら、

	十の位	一の位
	(10)、(10),(10)	(1),(1)
＋	(10)、(10)、(10)、(10)、(10)	(1)、(1)、(1)、(1)
	3＋5＝8	2＋4＝7

　3✕10＋2
＋　5✕10＋4
(3＋5)✕10＋(2＋4)

となり、どこの位からでも計算でき、

頭位からでは、 (3✕10＋2)＋(5✕10＋4)＝(3＋5)✕10＋(2＋4)

かけ算では、

千の位	百の位	十の位	一の位
		3	2
✕		5	4
1	5		8
	1	2	
	1	0	
1	7	2	8

10✕10＝100 の位の部屋で、
(100)が 3✕5＝15、
1✕1＝1 の位の部屋で、(1)が 2✕4＝8
1✕10＝10 の位の部屋で、
(10)が 3✕4＝12
(10)が 5✕2＝10

32✕54＝(3✕5)✕100＋(12＋10)✕10＋(2✕4)＝1728

となり、頭位からの計算となり、そのまま、文字式の計算へつながっていく。

ちなみに、基数モデルは、基数が 10 でなくともp進法にまでつながっていく。

繰り下がりのある引き算では、どうするだろうか？　位数モデルでは、位の部屋には、0 から 9 までの数しかはいらなかったが、基数モデルでは、位の部屋はあくまで単位が住む部屋なので、10 を超える数の単位が入ってもかまわなくなる。従って、繰り下がりのある計算も、暗算で苦労しなくとも、 次のような計算ができる。

1034―378

	1	0	3	4
―		3	7	8

これを、

	9	12	14
―	3	7	8
	6	5	6

(2) **電卓、コンピュータを傍らにおいて計算する筆算とは？**

前章では、PC があれば、たとえ筆算が出来たとしても、多量のデータのなかからその構造を見つけ出し、解決へつなげるために EXCEL での使用が重要な意味を持つことを示した。

では筆算はいらないか？　というとそうではない。電卓、PC を傍らにおいた筆算が必要となる。

a. 8 桁電卓で出来ない計算が電卓と筆算の併用で可能となる事例

6 桁✕6 桁の計算は、8 桁の電卓では計算できない。しかし、基数モデルの筆算を使えば、これは容易に計算できる。

987654✕123456

987654 は(1000)が 987 個、(1)が 654 個と考えられる。同様に、123456 は(1000)が 123 個 (1) が 456 個である。従って、計算は以下のようになる。

(1000)の単位どうしの計算が 1000000 の位の部屋で 987✕123＝121401、

(1)の単位同士の計算は、1 の位の部屋で、654✕456＝298224、

さらに、(1000)の単位の計算は、1000 の位の部屋で、987✕456＝450072、

および、654✕123＝88442、

これらを綜合すると、

							9	8	7	6	5	4
✕							1	2	3	4	5	6
	1	2	1	4	0	1	0	0	0	0	0	0
							2	9	8	2	2	4
				4	5	0	0	7	2	0	0	0
					8	8	4	4	2	0	0	0
	1	2	1	9	3	9	8	1	2	2	2	4

8 桁を超える計算でも、位の単位ごとの計算（電卓使用で可）で、3 桁✕3 桁にすれば、筆算で可能となる。これは、小数計算でも同様である。また、基数モデルで、分数計算の新しい解釈が可能である。

b. 分数計算を基数モデルで考える。

$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3}$　　これは、基数を 1 で表現している。これを、以下のように基数を変えて表現することも出来るので、結果としては、基数 1 の場合も、$\frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$ となる。

1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3}$	$\frac{3\times 3}{5} \div \frac{2\times 3}{3}$	$\frac{3\times 5}{5} \div \frac{2\times 5}{3}$	$\frac{3\times 15}{5} \div \frac{2\times 15}{3}$
	$\frac{3\times 3}{5} \div 2$	$3 \div \frac{2\times 5}{3}$	$(3\times 3) \div (2\times 5)$
	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$		$\frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$

c. デジタル機器を使って、素数 11 から、11111・・・11 の約数を調べる体験数学を行う。

11は素数だが、111 は素数ではない。では11111・・1と続く数はどうなっているのだろうか？
ちなみに、ネットで調べると、11・・・・1が19個の時は素数であることが知られている。では、この間の数はどんな約数があるのだろうか？
こうした問題の解決には、頭位からの計算に慣れているとよい。

111＝3×37、 1が偶数個並んだ数は、

11×101＝1111、 11×10101・・・01＝111・・・・1 のように約数 11 がある。

1が3の倍数個ある場合は、111 111 ・・・111＝111×1001001・・・・001 となり、約数に 111 を持つ。この場合は、111＝3×37から、3、 37も約数となる。

こう考えると、111・・11 が素数個ある場合はどうかということになる。

知られているのは、11111＝41×271、1111111＝239×4649 などだが、
こうしたことが本当に正しいのか、電卓や PC を傍らにあれば、体験することができる。
たとえば、1が11個並んだときは、11111111111＝21649×513239
これを電卓と頭位からの計算によって、これが本当に正しいか、体験してみよう。

21 649
× 513 239
10 773 155 111
5 019
332 937
11 111 111 111

同様に、1 が 13 個並ぶ数、53×79×265371653=4187×265371653、
1 が17個並ぶ数、2071723×5363222357。これらも同様な方法で電卓と基数モデルで体験できる。

13 個の場合；

4187
× 2 6537 1653
8374 0692 1111
\+ 2737 0419
1 1111 1111 1111

4187×2＝8374
4187×6537＝2737 0419
4187×1653＝692 1111

17個の場合，

53 6322 2357×207 1723 =1 1111 1111 1111 1111

2071723 を(10000)が 207 と、(1)が 1723 として、それぞれの基数に分け計算する。、

まずは、 (10000)の位の部屋で、

53 6322 2357×207
1 097 487 899
130 8654
1 1101 8702 7899

53 6322 2357 ×1723
9 1319 406 1111
1089 2806
9 2408 3212 1111

11101 8702 7899 0000
\+ 9 2408 3212 1111
1 1111 1111 1111 1111

こうして、11 が素数、111 が合成数ということから、進んで生じた疑問を、デジタルと基数モデルの筆算を合成して分析することができた。

このような頭位からの計算は、当然、日常計算における暗算へ適応できる。

今後は、デジタル機器を傍らに置いた計算が当たり前の時代になるが、これに対応する数と計算の指導法を指導方法として確立していくことが必要である。

最後に、こうした事例研究から、ICT を活用しさらに筆算も併用した体感的・実験的・体験的数学(Experimental Mathematics)教育を進めることによって、ICT 時代の数学教育へのあり方が明らか

になってきたように見える。ここで、体感とは数学にふれあい感じ取ること、実験とは仮説を立て検証する中から数学を見いだす、体験とは、現実事象を対峙する中から数学を見いだす。いずれも、ICT を身近においた、学習者どうしの主体的で対話的、協働的な学びが背景にある。これを実現するためには、紙と鉛筆による同一問題による一斉テスト中心の教育から、多様なアプローチから自律的協働的学びの中から結果をレポートとして発表する評価への移行が求められる。

参考文献

1 町田彰一郎(2022) 「GIGA スクール・ICT 算数授業づくり — 算数の「個別最適な学び」と「数学的活動・ICT の活用に向けて—数たちの隠された「還暦」—」 、新算数教育研究会「新しい算数研究 12 月号、東洋館出版社
2 町田彰一郎(2023) 「シンポジウム: Society5.0 に対応できる文理融合の学校数学 ～計算を何に使うか～ データ活用時代の「数と計算」の事例研究」、数学教育学会春季年会、
3 町田彰一郎(2006) 「なぜその人は「計算」が「速い」のか？」、東洋館出版社、平成 18 年 8 月 10 日初版
4 町田彰一郎(2016) 「日本の『数学教育』の源流を探る —21 世紀の変容を乗り越える「教育」のために」、創英社/三省堂書店、平成 28 年 8 月 1 日
5 町田彰一郎(2005) 「乗法指導の歴史的・Base Model 的考察 —21 世紀型新教材の開発に向けてー」、第 38 回数学教育論文発表会論文集 301-306
6 町田彰一郎(2008) 「小学校から中学校へそして高校へ、高校から中学校へそして小学校へ」、埼玉算数・数学教育研究会(旧埼大研)会誌— 平成 20 年度学習要領時代の数学教育に向けてー 34-36
7 町田彰一郎(2020) 「1人一台の PC、タブレットの時代に求められる小中高大の算数・数学に求められる小中高大の算数・数学教育」、数学教育学会冬季研究会 発表論文集 1-8

幾何学分野

酒井利訓（東海大学）

1　改革の概要

代数的な問題に限らず，幾何学的な問題であっても，問題を数式で表現できさえすれば，計算機で（実用的な）解が得られることは多い．このことを体験を通して学ぶとともに，計算機での処理に持ち込むために，問題を数学的に表現するためのツールとしての幾何学の役割にも焦点を当てて，幾何学分野の改革を行いたい．こうした視点から，中学校において，**極座標**および**鋭角の三角比**を学習することとする．これらは，高等学校コアにおける一般角に対する三角関数やベクトルの導入の伏線になる．また，ベクトルは「幾何ベクトル」にこだわらず，**データとしてのベクトル** (何個の数値の組であるかは限定しない) という観点から導入する．高等学校オプションには，**行列**，**射影変換・透視変換**などが含まれる．

2　小学校

空間図形に関する活動を通して，空間図形に対する直観を育てる．そのために，中学校の「**空間図形の構成と平面上の表現**」を小学校に移行し，見取図，展開図，投影図を扱う．これまでも，立方体や直方体の見取図や展開図は第 4 学年で学習することになっているが，それに加えて，第 6 学年で円錐の展開図や表面積などを学ぶことにする．なお，現在中学校で学んでいる錐体の体積についても第 6 学年に移行し，実験 (水量や重さ等) による推測により学習することとする．

平面図形に関しては,「**定規とコンパスによる作図**」（角の二等分線，垂直二等分線，垂線など．線対称性に気づかせる）を中学校から第 6 学年に移行する．

第 6 学年
1)　**縮図や拡大図，対称な図形，定規とコンパスによる作図**
2) **概形とおよその面積**
3) **円の面積・扇形の面積**
4) **角柱・円柱及び錐体の体積**
5) **空間図形の構成と平面上の表現**
・見取図，展開図，投影図

（小学校全体における幾何学分野の配当の一覧は後掲）

3　中学校

第 3 学年では，三平方の定理を学習した後に，座標の概念を **3 次元**まで広げ，空間内の 2 点間の距離を求めるなど，**解析幾何の有用性**が認識できる題材 (適宜，コンピュータや方眼紙を利用) を扱う．必要に応じて初等幾何によって内容を補完したり，学んだ事実を直感的に把握したりする．

この「座標幾何」の学習に続けて，**極座標**（第 5.1 節参照）を学ぶ（角は x 軸方向 (東) を基準とする）．平面上の点を極座標で読み取ったり，極座標で与えられた点を方眼紙上に取り，直交座標に変換することなどを通して，その直後の**三角比**の学習や高校でのベクトル導入の伏線（中学校では「座標の加算」として扱う）とする．

三角比では，**鋭角の正弦・余弦**を「斜辺の長さ 1 の直角三角形の高さと底辺の長さ」として捉えさせ，相似比を利用して必要な長さを求める．

以上が大きな変更点であるが，この他の変更点について以下に補足する．まず，第 1 学年の「空間図形」で**透視投影**を扱う．透視投影は，高校オプションにおいて数式を用いた扱いへ発展させる．第 2 学年では，例えば，三角形の合同条件を利用して二等辺三角形を考察すること（裏返すと重なることの考察など）はせず，操作的活動の結果として受け入れる．また，第 3 学年の「相似」については，小学校と同様に,「拡大・縮小」によって定義する．

なお,「球の体積・表面積」,「円周角と中心角」は高等学校へ移行する．

第 1 学年
1) 平面図形の移動 2) 空間図形 ・直線や平面の位置関係・正射影・透視投影

第 3 学年
1) 図形の相似 ・平面図形の相似と三角形の相似条件 ・ 相似な図形の相似比と面積比及び体積比の関係 ・平行線と線分の比 2) 三平方の定理 ・三平方の定理とその証明 ・空間座標 3) 極座標 ・極座標と直交座標 4) 三角比 ・ 鋭角の三角比（正弦・余弦・正接）

（中学校全体における幾何学分野の配当の一覧は後掲）

4　高等学校

4.1　高等学校コア

正弦定理では**「外接円の半径」を含めることにはこだわらない**こととする (外接円を使わない証明を採用する)．連比の形 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ を意識させることが重要である．なお，現在中学校で学んでいる「円周角の定理」をここで扱い，外接円の半径を含めた形の正弦定理を導くこともできる．

三角関数の加法定理や合成の学習では，幾何学的な題材だけでは定理や公式の意義を十分に伝えられないため，電気や電波などの**物理学的な題材**を取り入れる．

また，ベクトルは「幾何ベクトル」にこだわらず，**数値の組** (何個の数値の組であるかは限定しない) からなるデータを扱う基礎として学ぶ（第 5.2 節参照）．内積の定義もこの立場から導入する．

「空間図形」は，現在中学校で扱われている球の体積・表面積を含む．また，直感の不足を補うために，空間座標の内容を充実させ，**平面の方程式**も扱う．

なお，複素数平面，ド・モアブルの定理およびチェバの定理・メネラウスの定理，接弦定理，方べきの定理は削除する（大学へ移行).

4.2　高等学校オプション

複素数平面を削除する一方，新たに追加される行列において，複素数 $a + bi$ に対応する行列

$\boldsymbol{a}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{b}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を扱う．**射影変換**では，長方形を射影変換したり，射影変換された長方形をもとの長方形に戻すことを扱う．**透視変換**では，透視投影の方程式を導いたり，鳥瞰図から実際の距離を計算したりする．

高等学校コア
1) **図形と方程式** 　**直線と円** 　・点と直線　・円の方程式 　**軌跡と領域**
2) **図形と計量** 　**三角比** 　・鈍角の三角比　・正弦定理 (及び円周角の定理)　・余弦定理 　**図形の計量**
3) **三角関数** 　**角の拡張** 　**三角関数** 　・三角関数　・三角関数の基本的な性質 　**三角関数の加法定理** 　・三角関数の加法定理　・2 倍角の公式，三角関数の合成
4) **図形の性質** 　**平面図形** 　・三角形の性質　・円の性質　・作図 　**空間図形**
5) **ベクトル** 　**データとしてのベクトルとその内積** 　**平面上のベクトル** 　・幾何ベクトルとその演算　・内積 　**空間座標とベクトル** 　・空間座標，空間におけるベクトル　・平面の方程式

（高等学校全体における幾何学分野の配当の一覧は後掲）

高等学校オプション
1) **平面上の曲線** 　**平面上の曲線** 　・二次曲線（直交座標による表示）　・媒介変数による表示・極座標による表示
2) **行列** 　**行列** 　**1 次変換** 　・原点を中心とする拡大・縮小，原点のまわりの回転，　$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) 射影変換とその逆
4) 透視投影

（高等学校全体における幾何学分野の配当の一覧は後掲）

5　指導法の例

5.1　極座標

極座標の指導では，まず,「(i) 平面上の点の位置を極座標で読み取る」ことから入り，次に,「(ii) 極座標で与えられた点を (直交) 座標平面上にとって，その目盛りを読み取ることで直交座標に変換する練習をする」.

こうした活動の中で,「各 θ に対して，$r=1$ に対する x, y 座標がわかれば，他の r に対する座標もわかる」ことに気づかせ,「(iii) $r=1$ に対する y 座標，x 座標として，$\sin\theta, \cos\theta$ を定義する」．これを受けて「(iv) 方眼紙上の単位円 (図 1) を使って，様々な θ に対する $\sin\theta, \cos\theta$ の値を小数第 2 位程度までで読み取る」.

以上の一連の活動において，角は $30°, 45°, 60°$ の「有名角」の系統にこだわらず，むしろいろいろな角を指定して,「目盛りを読み取る」経験を多く積ませる。これにより，$\sin\theta$ や $\cos\theta$ が y 座標や x 座標であることを強く意識させられ，三角比や高等学校コアでの三角関数につながっていく (なお，三角比を学んでから極座標を扱うと，角として有名角を使うことで，$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ などを用いた正確な値で座標を答えることが目標となってしまうおそれがある).

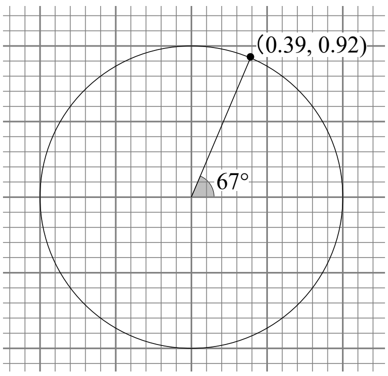


図 1

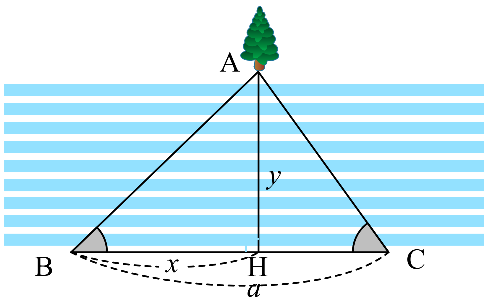


図 2

5.2　正接の問題の例

図 2 に示される川幅 AH を求める (H の場所を特定することもできる)．a, B, C を計測した場合，以下のような求め方が考えられる.

[方法 1] 適切な縮図を描き，それを利用する.

[方法 2] 2 直線の交点の y 座標として求める．その際，B を原点とし，C$(a, 0)$ となるように座標軸を導入することが考えられる．この場合，直線 AB は $y=(\tan B)x$ と表される (実際は、$\tan B$ は具体的な数値で表される)．また，中学校では $y=m(x-a)$ の形の直線の方程式は学んでいないため，直線 AC については，y 切片 が $a\tan C$ となることを用いて，$y=-(\tan C)x+a\tan C$ と表すことになる．これらの交点の y 座標 $(=a\tan B\tan C/(\tan B+\tan C))$ は，計算機を用いて求めればよい．**計算機で求められるように問題を表現する**という部分に主眼をおく.

[方法 3] BH+CH = BC から求める．$\dfrac{y}{\tan B}+\dfrac{y}{\tan C}=a$ を y について解いて，$y=\dfrac{a\tan B\tan C}{\tan B+\tan C}$. この場合も，数値計算には計算機を用いればよい.

5.3 ベクトルと内積の導入

ベクトルを数値の組 (何個の数値の組であるかは限定しない) からなるデータを扱う基礎として学ぶ．例えば，各人の 5 科目のテストの点数の組を考え，科目ごとのクラスの合計点を計算することはベクトルの和を求めていることに他ならない．

内積

1 個 a 円のミカンと 1 個 b 円のリンゴをそれぞれ c 個，d 個買うときの総額は，単価の組 (a, b) と個数の組 (c, d) から，$ac + bd$ によって計算できる．この計算を $(a, b)\cdot(c, d) = ac + bd$ と表し，得られる値をベクトル (a, b), (c, d) の内積とよぶこととする ($|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ の形での定義ではない)．

データとしてのベクトルの内積が使われている例として，例えば，以下のことがあげられる：複数のデータ $a_i\vec{v_i}$ (ただし，$i \neq j$ に対して $\vec{v_i}\cdot\vec{v_j} = 0$ かつ $|\vec{v_i}| = |\vec{v_j}|$) を 1 つのデータ

$$\vec{u} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_m\vec{v_m}$$

にまとめて送信し，受信先で各 $\vec{v_i}$ との内積を取ることで必要な情報だけを取り出す．

上記の「ミカンとリンゴ」の例では,「単価」を表すベクトルと「個数」を表すベクトルという異種のベクトルの内積であった．一方，同一平面上の幾何ベクトルの内積は，同種のベクトルの内積であり，例における「総額」のような意味づけが難しいことには留意が必要である．

なお，幾何ベクトルを考える場合，内積の値が座標系の取り方によらないことを確かめておく必要がある．一旦内積から離れ,「2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のなす角 θ を求める (図 3)」ことを目標に設定し，次のように進める：

まず，余弦定理より

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

である．$\vec{c} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$ だから，

$$\cos\theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} = \cdots = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

よって，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 = \vec{a}\cdot\vec{b}$ となり，内積の値は座標軸の取り方によらないことがわかる．

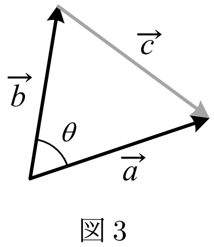


図 3

5.4 三平方の定理の証明

現段階では「平方根」の学習からの流れを受け，三平方の定理の証明では，図 4(a) を用いることが多い ($c^2 = (a + b)^2 - \frac{1}{2}ab \times 4 = a^2 + b^2$)．この証明では $(a + b)^2$ の展開を前提としており，また，平方根を先に学習することを想定している．これらを前提にしなくても，図 4(b) のように変形して，変形の前後で白い部分の面積が等しいことから $a^2 + b^2 = c^2$ を導くこともできる (平方根の導入は三平方の定理の後でも可能)．

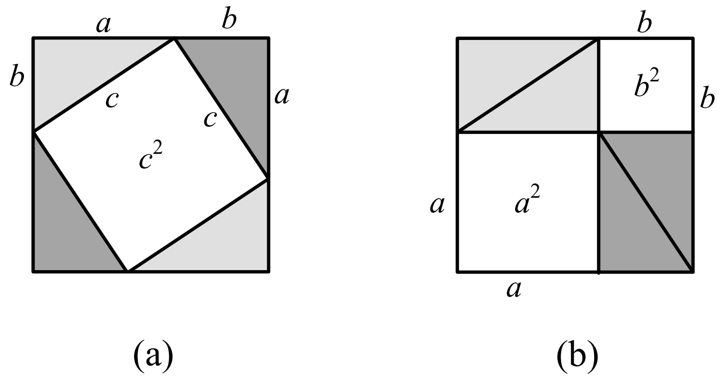


図 4

この証明は,「補充合同」の考え方を用いており，白い部分の面積が等しいことを直接示しているわけではない．直接示すのであれば，例えば，図 5 のような裁ち合わせを用いることになる．

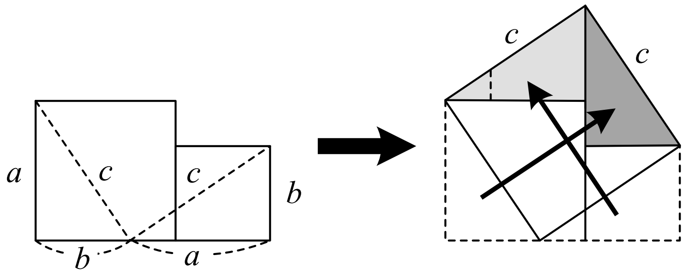


図 5

なお，図 4 と同様の変形を用いることで，高等学校コアにおける正弦の加法定理を証明することもできる (図 6(a), (b))．

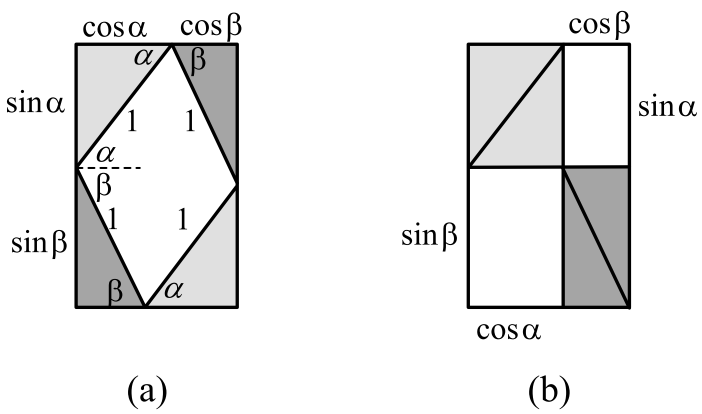


図 6

5.5　三角比に関する諸定理の証明

(外接円を考えない) 正弦定理や余弦定理の証明では,「三角形を直角三角形に分割する」ことによる方法が代表的である (図 7)．図 7 は三角形の面積の公式や第一余弦定理の証明にも現れる図である．また，角の大きさに制約はつくが，正弦の加法定理を導くことにも使える (図 8)．「図 7 からどんな公式が導けるか」というテーマで授業を構築することが考えられる ($C = 90^\circ$ の場合には，相似な 3 つの三角形の面積比に着目して，$a^2 + b^2 = c^2$ を導くこともできる)．

なお，余弦の減法定理は 2 つのベクトル $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $(\cos\beta, \sin\beta)$ の内積を考えることで容易に導ける：$1{\cdot}1\cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha$．この証明を用いる場合，三角関数の前にベクトルの内積を学んでいる必要がある．

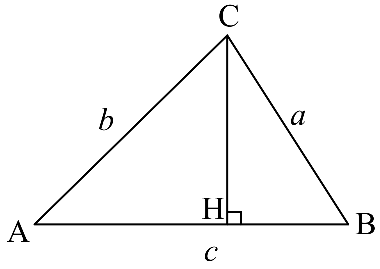


図 7： $\mathrm{CH} = b\sin A = a\sin B$ より $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$;
$(c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2 = a^2$ より $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

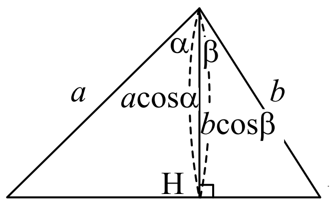


図 8： $\dfrac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{2}a\cdot b\cos\beta\cdot\sin\alpha + \dfrac{1}{2}b\cdot a\cos\alpha\cdot\sin\beta$
より $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

幾何学分野の配当

<table>
<tr><td colspan="3">小学校</td></tr>
<tr><td rowspan="2">低学年</td><td>1) 図形についての理解の基礎
・形とその特徴の捉え方　・形の構成と分解
・方向やものの位置</td><td></td></tr>
<tr><td>2) 三角形や四角形などの図形
・三角形，四角形　・正方形，長方形と直角三角形 ・正方形や長方形の面で構成される箱の形</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">中学年</td><td>1) 二等辺三角形，正三角形などの図形
・二等辺三角形，正三角形　・角　・円，球</td><td></td></tr>
<tr><td>2) 平行四辺形，ひし形，台形などの平面図形
・直線の平行や垂直の関係　・平行四辺形，ひし形，台形
3) 立方体，直方体などの立体図形
・立方体，直方体　・直線や平面の平行や垂直の関係　・見取図，展開図
4) ものの位置の表し方
5) 平面図形の面積
·面積の単位 (cm^2, m^2, km^2) と測定 ・正方形，長方形の面積（メートル法の単位の仕組み）
6) 角の大きさ
・回転の大きさ　・角の大きさの単位と測定</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">高学年</td><td>1) 平面図形の性質
・図形の形や大きさが決まる要素と図形の合同・多角形についての簡単な性質 ・正多角形 ・円周率
2) 立体図形の性質
・角柱や円柱
3) 平面図形の面積
・三角形，平行四辺形，ひし形及び台形の面積の計算による求め方
4) 立体図形の体積
・体積の単位（cm^3, m^3）と測定 ・立方体及び直方体の体積の計算による求め方（メートル法の単位の仕組み）</td><td></td></tr>
<tr><td>5) 縮図や拡大図，対称な図形，定規とコンパスによる作図
6) 概形とおよその面積
7) 円の面積・扇形の面積
8) 角柱・円柱及び錐体の体積
9) 空間図形の構成と平面上の表現
・見取図，展開図，投影図</td><td>角の二等分線，垂直二等分線，垂線等を作図して線対称性に気づかせる．円の中心の作図を含む．

錐体の体積は実験 (水量や重さ等) によって推測する．

展開図：円錐及び表面積を含む．</td></tr>
</table>

中学校		
第 1 学年	1) **平面図形の移動** 2) **空間図形** ・直線や平面の位置関係 ・正射影 ・透視投影	「空間図形」では空間を数学的に捉える力を培う.「透視投影」については，高校オプションで数式を用いて扱う.
第 2 学年	1) **基本的な平面図形と平行線の性質** ・平行線や角の性質 ・多角形の角についての性質 ・平面図形の性質を確かめること 2) **図形の合同** ・平面図形の合同と三角形の合同条件 ・証明の必要性と意味及びその方法	三角形の合同条件を利用して二等辺三角形を考察 (裏返すと重なることなど) することはせず，操作的活動の結果として受け入れる.
第 3 学年	1) **図形の相似** ・平面図形の相似と三角形の相似条件 ・ 相似な図形の相似比と面積比及び体積比の関係 ・平行線と線分の比 2) **三平方の定理** ・三平方の定理とその証明 ・空間座標 3) **極座標** ・極座標と直交座標 4) **三角比** ・ 鋭角の三角比（正弦・余弦・正接）	相似は「拡大・縮小」によって定義する. 応用として，地図上の面積から実際の面積を求めることや照度などの逆 2 乗則を扱う. 「三平方の定理」の証明は幾何学的方法（裁ち合わせなど）を用いることで，$(a+b)^2$ の展開の学習に先立って学ぶことができる. 座標の概念を 3 次元まで広げ，空間内の 2 点間の距離を求めることなど，解析幾何の有用性が認識できる題材 (適宜，コンピュータや方眼紙を利用) を扱う. 必要に応じて初等幾何によって内容を補完したり，学んだ事実を直感的に把握したりする. 上記の「座標幾何」に続けて，極座標を学ぶ. 角は x 軸方向 (東) を基準とする. 平面上の点を極座標で読み取ったり，極座標で与えられた点を方眼紙上に取り，直交座標に変換することなどを通して，**三角比**の学習や高校での**ベクトル**導入の伏線（「座標の加算）とする. 鋭角の正弦・余弦を「斜辺の長さ 1 の直角三角形の高さと底辺の長さ」として捉えさせ，相似比を利用して必要な長さを求める. 鋭角三角形の 1 つの頂点から対辺に垂線を下ろし，正弦定理や余弦定理の証明の考え方を使う問題を扱うことも考えられる.

<table>
<tr><td colspan="3">高等学校</td></tr>
<tr><td>コア</td><td>1) 図形と方程式
直線と円
・点と直線 ・円の方程式
軌跡と領域</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2) 図形と計量
三角比
・鈍角の三角比 ・正弦定理 (及び円周角の定理) ・余弦定理
図形の計量</td><td>正弦定理そのものには「外接円の半径」を含めることにはこだわらない (外接円を使わない証明を用いる).
連比の形 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ での記述を含める.
余弦定理は，ベクトルの内積の証明に活用する.</td></tr>
<tr><td></td><td>3) 三角関数
角の拡張
三角関数
・三角関数 ・三角関数の基本的な性質
三角関数の加法定理
・三角関数の加法定理 ・2 倍角の公式，三角関数の合成</td><td>幾何学的な題材に限定すると，定理や公式の意義を十分伝えられない．電気や電波などの物理学的な題材を取り入れる.</td></tr>
<tr><td></td><td>4) 図形の性質
平面図形
・三角形の性質 ・円の性質 ・作図
空間図形</td><td>「空間図形」は球の体積・表面積を含む.</td></tr>
<tr><td></td><td>5) ベクトル
データとしてのベクトルとその内積
平面上のベクトル
・幾何ベクトルとその演算 ・内積
空間座標とベクトル
・空間座標，空間におけるベクトル ・平面の方程式</td><td>直感の不足を補うために，空間座標の内容を充実させ，平面の方程式を扱う.
結論が与えられている証明問題では初等幾何学が有効なこともあるが，結論が与えられていない場合であっても，ベクトルを用いることで結論が導けることは多い．探求型の学びに適する.</td></tr>
</table>

オプション	1) 平面上の曲線 平面上の曲線 ・二次曲線（直交座標による表示）・媒介変数による表示・極座標による表示 2) 行列 行列 **1 次変換** ・原点を中心とする拡大・縮小，原点のまわりの回転，$a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$	サイクロイド・トコロイドなどを含める．
	3) 射影変換とその逆	長方形を射影変換したり，射影変換された長方形をもとの長方形に戻す．これを発展させたものが，自動車のアラウンドビューモニターである．
	4) 透視投影	透視投影の方程式を導いたり，鳥瞰図から実際の距離を計算したりする．

「Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み」に参加させて戴いて

船倉武夫

A) 数学教育が直面している今日的課題

２Ｉ世紀は、ＡＩとディープラーニングの進展によって、数学教育にとっては、数学の世紀でもあると賞賛される「幸福な時代」になると予測されている。すなわち、勝ち組（トップ）になるためのアイテムとして数学力の有用性が保証され、数学を使える人を育てることが今日的な喫緊の課題として提言されている。一方で、社会の構成員の過半数を占める中間層の雇用が失われると予測されている。つまり労働市場の二極化（トップとボトム）が進行し、過半数の者が職を失う「不幸な時代」である。

ところで、文理を分ける踏み絵としてガラパゴス化した「入試数学」があり、その対策の暗記数学が生まれてきている。また、「難しい・分からない」の批判に合わせて、内容を狭く限定し集中してドリルを繰り返す安易な教育方法も散見する。いずれにしても短期的に効果が上がったように見えたとしても，中長期的でみれば、学習者は知識の剥落を招き、「数理科学的にモノを考える人を育てる」ことにつながらない現実がある。いわゆる文系において数学を学ぶことを回避する「数学離れ」が個人的問題にとどまらず、社会問題になっている。

歴史を顧みると，戦後の「生活単元学習」は数学を道具として使うことを重視した教育であり、現今においても、成功も失敗も学ぶべきところがある。また、近年は、その場で必要な数学を現地調達ですむとして、大学入試での数学を排除し、高校数学教育を空洞化してきた経緯がある。また、国際的なボーダレス化が進行している。小中高を通じて、中断することなく継続して数学教育を受けていることを前提とできないことへの配慮は不可欠なのである。

教育改革には，大きな枠組みによって定まるメカニズムの改変が伴う。もちろん、現場教員の個々の不断の努力が基盤であるが、それぞれが孤立しては、利益相反してしまう。数学教育学会という組織の存在意義・真価が問われている。

B) 実現すべき課題

① 数学教育は，現代社会の課題を解決する技能を習得した社会人の育成へ寄与することにフォーカスする。

② 数学の内側に留まっては、改革は実現しない。数学で他教科の内容を扱い，そして，数学で学んだことが他教科の学習に生かされるように再構築が必要である。

③ 数学教育は、文系／理系の区分しない普遍教育を目指す。

④ 「系統学習」の再構築が求められている。数学は多文化であり、学習者の多様な個性に応じ、系統は唯一つと限らない。Adaptive Learning（適用学習）が不可欠である。

⑤ 社会的な課題が複雑化し高度化しているのに応じて、2 つのＰＢＬ(Problem-based Learning と Project-based Learning)の導入が有効である。ただし、数学教育でグループ学習を進めたチーム学習へ移行するハードルは高い。

⑥ 数学を主体的に学ぶ。学ぶ価値を理解、いつ・どこで・誰が・どの様に・なぜ学ぶか、コンプライアンスが不可欠である。ステークホルダー（学習者）の利益を最優先した教育活動を保証しなくてはならない。

⑦ 多様な学習者に負荷をかけない教育過程を実現すべきである。そのために、用語、記号及び技能を払拭し，数学教育のユニバーサルデザインを目指さねばならない。コンピュータのアシスト機能を積極的に利用する。

⑧ チャット GPT の数学版の出現も近々あろう。⑦とは異なり、危険性をしっかり批判的に理解しておかねばならない。

C) 教員養成の課題

数学教員は、社会に果たす数学の役割を認識し，数学は科学の言葉・道具であり、数理モデル化し，計算で解決する研究過程の価値と役割を理解しなくてはならない。

Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み

データの科学

船倉武夫（千葉科学大学名誉教授）
tfunakura@cis.ac.jp

文理分断は「理科教育」を振興する政策の負の結果だ。「理科教育」を「小中高の理科と算数・数学」と定義し，「文化的な国家の建設の基盤，重要な使命，科学的な知識，技能，態度を習得させ，工夫創造の能力を養い，日常生活を合理的に営み，有為な国民を育成」を目的として定められている。近年の「文理を隔てない学びの必要性」という主張は全員の習熟するのを諦めだ。「異質な考えを認める」は「結果の平等」から「機会の平等」への変更であり「分からない」のは学習者の自己責任へ転嫁している。

§1. SDG’s

天災，人禍，複合災禍，いずれも国境を越えて，世界中が協働して取り組まなければならない課題が山積している。それをやり遂げ，地球規模で持続可能な発展を続けるためには科学技術が不可欠であるという主張に対して異論をはさむ者は皆無であろう。しかし科学とは何か？その意味は多義，曖昧である。

§2. 科学的な方法

今までの科学は，体系化された実験・観測・探索・思考が根幹であった。科学的な方法とは「実験と数学による解析」が基礎である。同一の条件・同一の環境のもとでの実験を行えば，再現されることを最重視されてきた。決定論的な手法である。

ところで，実験はいろいろな事情で困難，不可能であるケースの方がはるかに多い。例えば，医療科学（医学・薬学など）は，普遍性を追求しながら，一人ひとりの命を助けることが究極の目的である。また，経済学，社会学・心理学・人間行動学・防災学など，対象そのものが複雑性や複合性を内包しているため，同一性を設定することが困難であり，「観測と統計による解析」が根幹である。

§3. 似非科学

本年 6 月，あるグルメサイトによる飲食店の評価ポイントを算出する「アルゴリズム（計算手順)」の妥当性をめぐる司法判断があった。原告は，「アルゴリズムを変更したため，評価点が下げられ不利益を受けた」と主張して，損害賠償が認められた。しかし不正防止や企業秘密を根拠として，アルゴリズムの開示請求は棄却された。

デジタルプラットフォーム（DPF）事業者が，任意に決めたアルゴリズムを用いて，提供するサービスをランク付けして公表する行為が，インターネット利用者の消費行動へ多大な影響を与えていることを初めて司法が認定したのである。

DPF の活動は公共性が高い。しかし CSR（企業は，利益追求・法令遵守のみならず，社会の多様な要求に対し適切な対応をとる義務。人権を尊重，消費者への適切な対応，環境への配慮，地域社会の一員として果たす責任。）の観点で，アルゴリズムをブラックボックス化することは決して許されてはならない。

似非科学の特徴は次のようである。

① 理科で学ぶように体系化していない

② 都合がよいデータのみを収集
③ 評価観点にCSRが欠如
④ 因子分析でなく作為的類別
⑤ 意思決定・最終判断に数学がいない

§4. 創造ものづくり

知的情報のみを最優先社会となり，社会活動の中心が物の生産現場から乖離してきている。過去の知的情報を加工する工程に矮小化されてきているため，創造的でなくなったことが，今日の日本の脆弱性の原因であろう。

たとえば，食料自給率が低下しているが，そもそも，工業高校・農業高校・水産高校の社会的地位が低下させて後継者不足を通じて，一次産業を安楽死させてきた結果だといえよう。大学もまた同じ。

文系に偏重し理系が少ないのが問題であると言われているが，正しくは，言語活動に偏重し，非言語活動を軽蔑し，形式知を重視し，暗黙知を軽視した結果だと思われる。

ものづくりにいた人材を，オフィスに集め，テレワークで分散し，ものづくりの場から盗んできた。例えば，コロナ禍になって，日本にはワクチンづくりする科学技術がないことを露呈したのである。また，ドローンも完全国産化できていない。

定型業務に限らずＡＩロボットに置き換わり，人が働くことの機会が奪われていると指摘されている。ところで，日本国憲法27条「すべて国民は，勤労の権利を有し，義務を負ふ」に続く，2項「賃金，就業時間，休息，その他の勤労条件に関する基準は，法律でこれを定める」と書かれている。

明治５年学制であっても，次のように記載していることを指摘したい。

> 日用常行言語書算を初め仕官農商百工技芸及び法律政治天文医療等に至る迄凡人の営むところの事学あらさるはなし。・・・稀に学ぶものも動もすれば国家の為にすと唱へ身を立るの基たるを知ずして或は詞章記誦の末に趨り空理虚談の途に陥り其論高尚に似たりといへども之を身に行ひ事に施すこと能ざるもの少からず。

§5. 理科教育の変遷（概略）

a. 学制（明治5～11年）

明治 10 年頃には，欧米の自然科学の教科書（「物理階梯」等）を翻訳し用い出す。

b. 教育令時代（明治 12～18年）

小学校では「算術，博物，物理，化学，生理，幾何，経済」を設けていた。事実・現象を理解するため，観察・実験を勧めていても，実情は講読のようだ。

c. 小学校令時代（明治 19～昭和 15 年）

明治 19 年，小学校に「理科」が初めて設けられた。明治 24 年，「理科ハ通常ノ天然物及現象ノ観察ヲ精密ニシ其相互及人生ニ対スル関係ノ大要ヲ理会セシメ兼ネテ天然物ヲ愛スルノ心ヲ養フヲ以テ要旨トス。理科ニ於テハ務メテ農業工業其他人民ノ生活上ニ適切ナル事項ヲ授ケ殊ニ植物動物等ヲ授クル際之ヲ以テ製スル重要ナル人工物ノ製法効用等ノ概略ヲ知ラシムヘシ」

明治40年，理科は義務教育に位置づけられ 小学4年から全員が学習，また，中学3年から物理，化学が学習することにもなった。

d.　国民学校時代（昭和 16～20 年）

第一次世界大戦（1914～18 年）は，科学技術を競う戦争であった。世界各国が，軍事目的で理科教育の振興を競った。日本は，国民学校令の施行であった。教科が国民科・理数科・体練科・芸能科・実業科と五つに大別された。ここで，「理数科」は，理科と算数（算術から改名）の総合である。その役割は，透徹せる理知的能力を有し，合理創造の精神を体得し，もって国運の進展に貢献しうることであった。理科の細目には「・・・国民生活ニ須要ナル普通ノ知識技能ヲ得セシメ科学的精神ヲ涵養」とある。

e.　太平洋戦争直後

昭和 21 年「新教育令」において，「科学の法則や成果を身につけることで，疑問から出発し，観察・実験により法則を発見し，生活に応用することである。理科教育では，科学的方法の訓練を通して，科学的な能力や態度を育成し，科学的方法を体得させることが重要」と強調している。

f.　学習指導要領（試案）（昭和 22～33 年）

昭和 22 年，文部省は，米国の理科教育「コース・オブ・スタディー」を参考にして小・中へ，すべての人が合理的な生活を営み，よい生活ができるため，次を提示した。

(a) 物事を科学的に見る考える扱う能力

(b) 科学の原理と応用に関する知識

(c) 真理を見出し新しいものを創る態度

昭和 27 年試案・小学校理科の目標７つから２つを引用しておく。

（ア）科学的・合理的な仕方で，日常生活の責任や仕事を処理できる

（イ）科学的方法を会得し，自然の環境に起こる問題を解決するのに役立たせる

ＧＨＱの指示で生活単元が促進いた。子どもの日常の経験に即して授業を組み立て，学習者の興味関心を喚起する学習方法である。しかし子どもの状況によって学習内容が変動し，雑駁な知識の羅列となりがちだった。科学的な知識・概念の深まらず，子どもの学力低下を招くと非難された。

その様な中で，昭和 28 年「理科教育振興法」制定された。その目的は次の通り。「理科教育が文化的な国家の建設の基盤として，特に重要な使命を有することにかんがみ，・・・理科教育を通じて，科学的な知識，技能及び態度を習得させるとともに，工夫創造の能力を養い，もって日常生活を合理的に営み，且つ，わが国の発展に貢献しうる有為な国民を育成するため，理科教育の振興を図ること」。

「理科教育」として，小中高の理科，算数及び数学に関する教育という定義に注目して欲しい。

実験設備の充実のための費用を国が保証してくれると理科教員は喜んだそうだが，果たして，算数・数学も教員はどうであったか。

その 2 年後の昭和 30 年，「産業教育」振興を，中高大・高専において，「産業に従事するために必要な知識，技能，態度を習得させる目的をもつて行う教育」と定義し，その目的を「産業経済の発展，国民生活の向上の基礎，勤労に対する正しい信念を確立，産業技術を習得，工夫創造の能力を養い，経済自立に貢献する有為な国民を育成」としている。「理科教育」を振興するため政策は，文系・理系と分ける文理分断はという側面もあったといえる。

g.　系統学習時代（昭和 33～42 年）

昭和 33 年，学習指導要領改訂では，問題解決型学習ではなく，科学の体系が重視されるととも

に，学年ごと学習内容を明確にし，学年進行で学習内容が系統的に深まる教育内容に変えた。学問がもっている体系的な知識や論理をそのまま取り入れて授業展開を目指した。効率的であるが，学習心理を配慮せず，一方的に教え込みがちになる欠陥がある。ちなみに，中学校の理科の内容は，2分野制となり，第 1 分野は物理・化学，第2分野は生物・地学を取り扱うこととなった。

h. 教育の現代化（昭和 43～49 年）

東西冷戦下，昭和 32 年，ソ連の人工衛星スプートニク 1 号が打ち上げられ，世界中は震撼した。これが「スプートニック・ショック」である。科学技術の振興が急務となった。ブルーナーが教育界に大きな影響を与え，科学教育の現代化が始まった。

日本では，「探究の科学」の理念のもと，小・中・高の理科のカリキュラムが開発された。高度経済成長期であり，国策として理工系拡充政策が始まり，昭和 32～35 年の理工系学生が 8,000 人増，次いで昭和 36～38 年の 2 万人増が実施された。探究学習は，「科学の方法を適用すれば，たとえ十分な知識がなくても，科学的な問題を応用的に解決」できるとの考えに従い，次が重視された。

① 観察・実験・測定，記録，グラフ化，仮説，検証など科学の方法を体得

② 科学の基本概念が習得できるよう，教材を系統的・構造的に配列・構成

しかしながら，探究学習は，一方で子どもたちの日常とかけ離れた学校教育だけの理科のための理科になっていて，理科嫌い・理科離れの子どもを産むと多くの批判を受けた。科学技術の発展に対応するため，多くの内容が盛り込まれ過ぎ，学習負担の増加があった。因果関係は不明であるが，子どもたちの問題行動が顕在化し，大きな社会問題化し，人間性の尊重と「ゆとり」が提唱され出した。

i. ゆとり教育（昭和 52～63 年）

昭和 51 年教育課程審議会の答申「自ら考え正しく判断できる力をもつ児童生徒の育成」と示した上で，次を示している。

① 人間性豊かに育てること

② ゆとりがあり充実した学校生活

③ 個性や能力に応じた教育

昭和 52 年学習指導要領の改訂における理科の改正の基本方針は，小・中・高を通して，自然を探求する能力及び態度の育成や自然科学の基礎的・基本的な概念の形成が無理なく行うため，心身の発達を考慮して，基礎的・基本的な事項に精通と述べている。

ゆとり教育で授業時間数は大幅削減された。

j. 「生きる力」の育成（平成 10～19 年）

平成 8 年，中教審は答申「21 世紀を展望した我が国の教育の在り方について」で，「たくましく生きるための健康や体力が不可欠であることは言うまでもない。我々は，こうした資質や能力を，変化の激しいこれからの社会を［生きる力］と称することとし，これらをバランスよくはぐくんでいくことが重要」と述べたことから，教育の新たな目的の一つとして挙げられるようになった。

そして「総合的な学習の時間」が創設された。平成 14 年 度からの完全週 5 日制と相まって，子どもたちの学習時間は大幅に低下，それに伴い学力の低下が指摘された。

k. 補遺

平成20年以降は詳細を省略する。

ところで，Society 5.0 において，文理を隔てないリベラルアーツを学ぶ必要があると主張している。経団連は文理分断からの脱却と異議を唱えた。ただし全員が習熟するのはあきらめている。異質な考えを認めるという表現の裏に，分からない者は切り捨てという意味が潜む。「結果の平等」から「機会の平等」へ変更している。言葉を変えると，分からないのは自己責任に押し付けていると文脈から読める。

§6. データの科学

実験や観察して大量な情報を収集する。それら情報から，一定の仮説をもって，有意なデータを抽出するのが，理科である。情報技術でデータをデジタルしている。大量なデジタルデータを分析して，相関や因子を見出し，「定式化」（単位がつく）をはかる。それを「数式化」（単位がつかない）して，「計算処理」するのである。

結論を解釈して，もとのデータや情報に適用してみるのである。断片的をつむぎ体系化して，想像することで，新たな知識に基づく具体的なものづくりにつながる。

大量の計算を実行するのは，もちろん，計算機／計算器を使えばよい。すべてを数学的に精緻に理解していなくても，すでに，定評価を受けている機能（公式や論理構成）は，ブラックボックスであっても，まず使ってみることからはじめことになる。

「納得できないことは受け入れない」

「受け入れるもはは納得したものに限る」

ただし，計算のパーツとその組み合わせを体得していないと，計算全体像を把握できない。

§7. 数学嫌い

いわゆる文系の人の話を聞くと「子どものころから，算数が苦手だった」「中高で数学が難しくなって分からない」から，進路選択で文系を選んだと回答することが多い。

学習障害は，全般的な知的能力に遅れはなく，平均的なIQを示すものの，主に，「読む」・「聞く」・「話す」・「書く」・「計算する」・「推論する」学習能力に著しい困難を示す障害であると定義されている。その一つに，ディスカリキュア（算数障害）がある。

疾病及び関連保健問題の国際統計分類（ＩＣＤ）は世界保健機関（ＷＨＯ）が作成した分類であるICD-10（ＷＨＯ,1992）において，次の記述がある。（邦訳：厚生労働省）

【算数能力の特異的障害】

この障害は算数能力における特異的な機能障害で，　全般的な知的障害＜精神遅滞＞や不十分な学校教育のみでは説明することができないものを包含している。欠陥は代数，三角法，幾何，微積分などの，より抽象的な数学的能力よりは，むしろ加減乗除の基本的計算能力の習熟にかかわっている。

DSM-5 「限局性学習症／限局性学習障害に診断基準が掲載されている。

【診断基準】

数字の概念，数値，または計算を習得することの困難さ（例：数字，その大小，および関係の理解に乏しい，1 桁の足し算を行うのに同級生がやるように数字的事実を思い浮かべるのではなく指を折って数える，算術計算の途中で迷ってしまい方法を変更するかもしれない）

数学的推論の困難さ（例：定量的問題を解くために，数学的概念，数学的事実，または数学的方法

を適用することが非常に困難である）

文系数学の教案を考えるとき，ディスカリキュアからの視点は重要である。節をあらためて，具体的な算数の問題を考察してみる。

§8. 具体例の検証

［問題］

弟が毎分 80m の速さで出発した 10 分後，兄が毎分 240m の速さで弟を追いかけたとき，何分後に追いつくか。

この設問が算数・数学の特有の言い回しで構成されている。まず，日本語初級者の外国人を想定して，設問を「やさしい日本語」に翻訳しておく。複文を短文に分解する。

(a) 弟は毎分 80 m の速さである。

(b) 兄は毎分 240 m の速さである。

(c) 弟が出発してから 10 分後に兄が出発する。

(d) 兄は弟に追いつくか。

① 何分後か。

② 何 m 歩いたところか。

仮定とするデータの提示と，質問に分かれる。解答は，定性的判断とその定量的根拠を答えることが求めている。

数学の狭いエリアで効率よい解答を求めるのではなく「データの科学」らしく問題を取り組んでみるので，参考して欲しい。

すぐに，問題の解答に取り組まない。

まず(a)から「不動産の表示に関する公正競争規約」に気づくかである。「各種施設までの距離又は所要時間」として，次の様に定められている。「徒歩による所要時間は，道路距離 80m につき 1 分間を要するものとして算出した数値を表示すること。この場合において，1 分未満の端数が生じたときは，1 分として算出すること」と定められている。

距離 500 m の場合に適用してみよう。

筆算　500 m ÷ 80 m/分 ＝ 6 分あまり 20 m　この計算は商とあまりの単位が異なる

電卓　500 m ÷ 80 m/分 ＝ 6.25 分間

電卓　6.25 分間＝6 分 15 秒　電卓に換算機能がある

端数を切り上げて 7 分となる。ところで，

$$80\ \mathrm{m}/分 \times 60\ 分/時 = 4800\ \mathrm{m}/時 = 4.8\ \mathrm{km}/時$$

兄の速さ(b)は

$$240\ \mathrm{m} \div 80\ \mathrm{m} = 3\ 倍$$

$$4.8\ \mathrm{km}/時 \times 3\ 倍 = 14.4\ \mathrm{km}/時$$

バイクとしては遅い過ぎる。走った可能性もあるが，フルマラソンを 3 時間以内で走りきれるサブスリー（sub-3-hour）に相当する速さである。自転車に乗ったと推測できる。

弟は 10 分間で進む距離(c)は

$$80\ \mathrm{m}/分 \times 10\ 分 = 800\ \mathrm{m}$$

である。兄と弟との速さの差は

$$240\ \mathrm{m}/分 - 80\ \mathrm{m}/分 = 160\ \mathrm{m}/分$$

である。1分ごとに160 mずつ近づく。

$$800\ \mathrm{m} \div 160\ \mathrm{m}/分 = 5\ 分$$

$$240\ \mathrm{m}/分 \times 5\ 分 = 1200\mathrm{m}$$

兄は弟に追いつく。弟が出発してから15分後であり，兄が出発してから5分後である。兄弟が出会ったのは出発点から 1200 m 離れた地点である。

「公用文の基準」によれば，1,200mと記載することになっている。また 1.2 ㎞と記載することも許される。さらに，「国際単位系」によれば，1km200m の記載は不可である。「計量単位令」によれば，80m毎分 あるいは 80m/分 であるべきで，毎分 80m の表現は違反する。

§9. 数値の表現

「データの科学」を学ぶ上で，まず，数値の表現が十分に理解していることが必須である。

〇整数

日本では，例えば，

1234567890

は4桁刻みで

12 億 3456 万 7890

と書き読んでいる。国際単位系では

1G 234M 567K 890

SI 接頭語が3桁ごとにｋ：キロ，M：メガ，G：ギガ … が振られる。ただし，1つだけ1回だけ使用するルールである。したがって，3桁ごとにわかりやすくするためには

1 234 567 890

のように，分かち書きが不可欠である。これらを算数・数学の教科書は言及しているであろうか。

0の省略問題がつきまとう。

数値表示では，8 万 0012 人（朝日新聞など）と8 万 12 人（読売新聞など）と 2 通りの表現が混在している。文字列の長さを重視し，誤解を防ぐには前者が望ましいが，発音通りならば後者である。

〇指示標識

飛行場の滑走路上に数字が大書されていている。滑走路標識である。最近，ドローンで改正された航空法には次の規則がある。

［航空法施行規則・別表］

滑走路進入端（着陸をしようとする航空機から見て手前にある滑走路の末端をいう。）に近い場所に，指示標識が設置されている。

二　指示標識の数字は，進入方向から見た滑走路の方位を磁北から右まわりに測つたものの十分の一（小数点以下第一位を四捨五入する。）の整数とする。一桁となる場合は最初に〇をつける。

三　前号の規定にかかわらず，前号の方法によつて求めた指示標識の数字が，近接する空港等の滑走路の指示標識の数字と等しくなる場合には，指示標識の数字は，前号の方法によつて求めた指示標識の数字に一を加えた整数又は一を減じた整数とする。

データサイエンスにおける危機管理の問題である。

［問題］
（1）　北を00ではなく36としているが，その理由を考えよ。
（2）　世界では1桁のとき0を追記しない例が多いのに，日本で規定している理由を考えよ。
（3）　16方位の数値を求めよ。
（4）　指示標識の数字と，滑走路の方位との間に生じる最大誤差は何度か求めよ。

公用文においては，長い整数は，例えば 1,234,567,890 のごとく，3 桁刻みで，コンマ“,”の挿入を要求している。しかし国際単位系ではコンマ“,”とピリオド“.”のどちらかを小数点に使うことは各国の文化事情に応じて認めているが，混用すること(例えば，1,234.5)も，2 回以上使うこと（例えば 4.5.6 や 7,8,0 ）は厳禁としている。

〇小数
日本では，小数点はピリオド“.”であるが，国際単位系では，コンマ“,”も許されている。算数数学教育においても，多文化共生の観点が不可欠になってきている。

1.234m 567μ890n

のごとく，m：ミリ，μ：マイクロ，n：ナノ…が振られている。ただし1つだけ1回だけ使用である。
日本語では小数点以下は 1 桁刻みで，例えば，1.234 は「いちてんにさんよん…」と読むように習う。しかし一般社会では，数字の羅列で誤解が生じやすいため，いろいろな工夫がある。
コロナ禍に，体温を計測する機会が増えた。例えば，「36.4℃と表示しているのに，病院で『ろくどよんぷん』といっていた何故？」とある留学生から聞かれたことがあった。「ろくどよんぶ」と訂正しながら，配慮の必要性を痛感する。
為替レートにおいて，例えば，米国1.00ドル→日本136.46円を，しばしば米国1ドル→日本136円46銭と表記し読んでいる。基準を入れ替えて，日本100円→米国0.73ドル＝73セントである。これらは，数字の羅列は分かり難いからである。
陸上の短距離競技の日本記録は次の通りである。

100m	9.95 秒	山縣亮太	2021/06/06
200m	20.03 秒	末續慎吾	2003/06/07
400m	44.78 秒	高野　進	1991/06/16

テレビのニュースでは山縣のデータを紹介するときに，小数点を使う「きゅーてんきゅーごびょー」でなく，「きゅーびょーきゅーご」と，言っている。データが正しくつたえるのは当たり前であり，そして分かりやすく伝わることが重視される一例である。翻って，数学教育で，分かりやすさをどれほど重視してきたのだろうか，自省する。

［問題］　過去の記録9秒9と，現在，9 秒95のランナーとどっちが速いのか，考察せよ。

表計算ソフト Excel では，年月日を表すとき，西暦は 2023/4/1 のように区切りをスラッシュ“/”を2回用いるが，和暦はR5.3.31 とピリオド“.”を2回用いて，両者を区分している。

〇分数
文系のための「テータの科学」に扱いたい問題を幾つ提示しておく。

［問題］

「国旗及びに関する法律」は，次の様に分数を用いて定められている。

（本則）

寸法の割合	縦	横の三分の二
日章の位置	直径	縦の五分の三
	中心	旗の中心

（特例）

寸法の割合	縦	横の十分の七
日章の位置	直径	縦の五分の三
	中心	旗の中心から旗竿側に 横の長さの百分の一偏

これを読み取り，2種類の日の丸を描け。

［問題］　地球の公転365.2425日として，分数展開

$$365+\frac{x}{4}+\frac{y}{100}+\frac{z}{400}$$

して，閏年を定めている。

① 等式が成り立つように，1桁の整数x, y, z (-9 以上$+9$ 以下)を求めよ。
② 閏年の決め方を説明せよ。
③ EXCELの日付機能が内在しているバグ（閏年でないのに閏年としている）を説明せよ。
④ 地球の公転は精確には365.2422 日である。分数展開とのずれは何秒であるかもとめよ。

建築基準法施行令においては，道路の傾斜は八分の一をこえないこととだけ定められている。

バリアフリー法において，最低限の基準で勾配は 1/12以下であり，また，望ましい基準では，屋外の勾配は1/15以下を求めている。

ところで，勾配1/12のスロープは，車いすの自走の限界と言われる。かなり重労働であり，屋内でも勾配1/15が望ましいとされている。車いすで体験してみることが望ましい。

スロープが長いときは，75cm以下ごとに150cm以上の踊り場を設置することになっている。

［問題］

車道の勾配は百分率で12％以下と定められている。（水平距離 100m に対して，上がる高さは12ｍ以下）このとき，高さ10ｍの避難タワーにのぼるために，避難経路がスロープならば，少なくとも何m以上で設計しないといけないか。

医薬系の分野，特に，公衆衛生学では，割合と率と比を次の様に区分している。

〇割合 (proportion)

全体に占める部分の割合という意味で使われる。したがって，割合は百分率(0％～100％)で表わされる。小数第1位まで，例えば，12.3%のように，書くことが一般的である。ところで，家庭で，両親や祖父母，きょうだいの世話や介護などをしている子どもの割合を，厚生労働省と文部科学省が2021年4月に調査結果が公表したとき，中学生がおよそ 5.7% を分かり難いので，ＮＨＫは「ヤング

ケアラー中学生が約17人に1人」とキャプションをつけている。

○率（rate）

「対象としている量÷時間」，つまり，単位時間あたりに対象としている量がどの程度あるのかで定義されている。そのため，次元は「量の単位/時間」である。変化速度といえる。算数・数学では，円周率や百分率，倍率，確率…であり，時刻とともに変化するというイメージは湧かない。例外は，微分積分で扱われる平均変化率ぐらいしか思いつかない。

○比（ratio）

比は同質でも異質でも比べられる。比a:bと比の値a/bを数学では，神経質に区別している。

§10.　　四則演算

○和

単位が同一であるときのみ計算できる。単位を揃わないときは計算できない。

N個の数値データ　$\{a_n\}$　　の総和

$$\sum_{n=1}^{N} a_n$$

は，和の順序を変えても，不変である。

括弧を付けると，異なる計算の順序になる。

$N=3$　　2種類

$$(a_1+a_2)+a_3$$
$$a_1+(a_2+a_3)$$

注：並べる順番は$3!=6$　なので，計算の順序は2×6=12通りある。

$N=4$　5種類

$$\left((a_1+a_2)+a_3\right)+a_4$$
$$\left(a_1+(a_2+a_3)\right)+a_4$$
$$(a_1+a_2)+(a_3+a_4)$$
$$a_1+((a_2+a_3)+a_4)$$
$$a_1+(a_2+(a_3+a_4))$$

注：並べる順番は $4!=24$ なので，計算の順序は$5\times 24=120$通りある。

括弧　() {} [] は使い分けず，丸括弧だけを使用しても，曖昧さは生じない。カタラン数

$$\frac{(2N)!}{(N+1)\cdot N!}$$

で与えられる。文系のデータ科学であり，読み取ることができれば，証明にはこだわらない。

ところで，Excelを用いた計算では，

$$\sum_{n=1}^{60000}\frac{1}{n}=11.5793238394159$$
$$\sum_{n=1}^{60000}\frac{1}{N-n}=11.5793238394160$$

と異なることに注意しおく。

◆クレペリン検査

適性検査としてクレペリンテストがある。テスト用紙には1行ごと116個の自然数がランダムに並ぶ。1分間で隣り合う2つの数の和を計算した結果の下1桁を書き込む。1分間経てば，次の行へ移る。この作業を15セット15分行い前半が終了する。休憩インターバル5分間をとる。前半と同様に後半をやる。

人は単純な作業を続けて行うときの変化する効率を可視化するものである。1桁の足し算ができれば利用できるので，就職試験の適性検査としてしばしば用いられる。学習者の関心を引き，データマインドを喚起する話題だと思われる。

[問題]

① 足し算の十々表（0～9）をつくり，答えが1桁の場合と2桁の場合の割合（%）を求めよ。
② 前問において，下1桁の0～9における出現する割合（%）を求めよ。
③ 自然数の範囲を絞り込めば計算の種類は減る。問①と問②における割合は変化する。数値データを用いて，クレペリン検査では自然数の範囲を3～9としている理由を考察せよ。

○差

計算ができるのは和と同一である。歴史的には，2つの量 x, y の違い，「大から小を引く」

$$x \sim y = \max(x, y) - \min(x, y)$$

数 x が絶対値 $|x|$ と符号 $\operatorname{sgn}(x)$ で構成されていることを理解していることが前提とできれば，

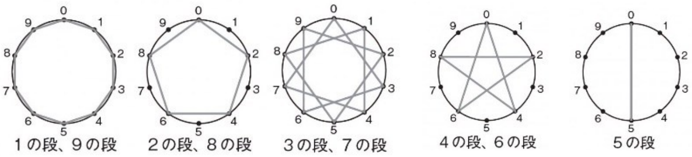
$$|x - y| = \operatorname{abs}(x - y)$$

しかし多くの学習者にとって絶対値は難しい概念である。数直線が理解の補助となる。大小にかかわりなく，$x - y$ を使う場合，状態（始）yから状態（終）xに達するまでの変化量である。

○積

掛け算　$x \times y = x \cdot y = xy$　は，単位に関係なく計算ができる。また，1本 450mL の醤油のペットボトルが5本あるとき，450mL／本×5本＝2250mL　と計算する。縦 40m，横 50mの長方形の土地の面積は，$40\mathrm{m} \times 50\mathrm{m} = 2000\mathrm{m}^2$ である。ところで，2000 円の消費税は 10% というときは，2000円×10%＝200円 で，%が消える。また，縦6人，横5人と並んだときの人数は，6人×5人＝30人　と変わらない。長方形の面積と外周の長さを求める問題で混乱が生じる原因である。

掛け算の「九々」の表を作成するとき，1桁の数から0を外し，ゼロの段が欠落している。零0の段を必ず追加して，「十々」に拡張しておくべきであると強調したい。その理由を理解するために，円に内接する正10角形を描き，頂点に0～9を時計回りに振り，各段の1桁目の値を線分で結び図形を描く図がよく知られているが，0と線を結ぶから完成する体験が貴重である。



次の問題はディスカリキュラのチェック問題の一例である。文字の大きさ，左右の並び，演算を正確に読み取る力が試しているのである。

[問題]

次から，計算ができる数式を選び，$x = 3$ を代入したときの値を求めよ。

① 2^x ② $2x$ ③ $2\cdot x$ ④ $x2$ ⑤ $x\cdot 2$ ⑥ $x*2$ ⑦ $2*x$ ⑧ x^2
⑨ x_2 ⑩ ${}^2x$ ⑪ ${}_2x$ ⑫ $x-2$ ⑬ $2/x$ ⑭ $2\sim x$ ⑮ $2-x$ ⑯ $x/2$

掛け算の順序に関して，伊藤隆は，各国における長方形の面積の公式が「長辺×短辺」「短辺×長辺」「縦×横」「横×縦」のどれであるか，興味ある調査研究をしている。斜めに置かれた長方形において，どうするのか，平行四辺形の面積の公式，「底辺×高さ」とのねじれをどう扱うべきか，「データの科学」の観点で極めて大事な問題である。

括弧と積の関係を教科書では言及していないが，電卓の設計思想に影響を与えていている。インターネットで話題となっている例である。

$$6\div 3(7-5)=1 \quad \text{or} \quad 4$$

という混乱が生じている。

○商

割り算の計算は，

$$x\div y= \text{商}\,p\ \text{あまり}\,r$$

であり，商とあまりの対である。

筆算を中心とした数学教育では，あまりを考える／考えないとの単純に区分することは価値があったが，電卓が使える時代である。意識しないとあまりを忘れがちである。電卓は正確な値ではなく近似値であるとの強調が重要である。

［問題］ 次の割り算で正・誤を考えよ。

① $23\div 6=$ 商 4 あまり -1
② $23\div 6=$ 商 $3.8\dot{3}$ あまり 0
③ $23\div 6=$ 商 3.8 あまり 0.2
④ $23\div 6=$ 商 3.83 あまり 0.02
⑤ $23\div 6=$ 商 3 あまり 5
⑥ $23\div 6=$ 商 2 あまり 11

積の逆算と位置付け，基本公式

$$x=py+r$$

を定義だとすれば，すべて正しい。

整数の割り算のとき，あまりに条件 $0\le r<y$ が追加すれば，⑤のみとなる。簡易電卓だと，③や④の商を得る。関数電卓を使えば，循環小数②を得る。正負の符号がついても，電卓は答えをくれるが，あまりに対する条件を $0\le r<|y|$ と修正してみる。

［問題］ 次の割り算で正・誤を考えよ。

① $23\div(-6)=$ 商 -4 あまり -1
② $23\div(-6)=$ 商 -3 あまり 5
③ $23\div(-6)=$ 商 $-3.8\dot{3}$ あまり 0
④ $(-23)\div(-6)=$ 商 4 あまり 1

⑤　$(-23) \div (-6) =$ 商 3 あまり -5

⑥　$(-23) \div (-6) =$ 商 $3.8\dot{3}$ あまり 0

⑦　$(-23) \div 6 =$ 商 -4 あまり 1

⑧　$(-23) \div 6 =$ 商 -3 あまり -5

⑨　$(-23) \div 6 =$ 商 $-3.8\dot{3}$ あまり 0

あまりの絶対値をできるだけ小さくしたいときは，$|r| \leq \frac{|y|}{2}$ とすることは可能である。

§11.　分数・百分率

割り算の答えをそのまま分数で表わす。

$$x \div y = \frac{x}{y}$$

ｙを基準とした１に対するｘの倍数を求めている。

分数の小数展開（電卓）を

$$\frac{1}{10} \quad \frac{1}{100} \quad \frac{1}{1\,000} \quad \cdots \quad \frac{1}{1\,000\,000\,000}$$

を用いて表示することになれたい。

百分率は分母が 100 の分数として表したものである。

$$p\,\% = \frac{p}{100} = \frac{10p}{1000} = 10p\,‰$$

国際単位系の趣旨の観点で，分母が 1000 の分数として表す千分率（‰：パーミル）にするべきかもしれない。しかしすでに，百分率（%：パーセント）の方が定着し，変更は難しいであろう。

条件Ａが 40% あり，条件Ｂが 30% あるとする。条件ＡとＢは排反とする。このとき，条件Ａまたは条件Ｂを満たすのは

$$40\% + 30\% = 70\%$$

と計算できる。しかし条件Ａと条件Ｂの差は

$$40\% - 30\% = 10 \text{ ポイント}$$

のように%ではなくポイントに変わるが，これらの内容は学習指導要領で全く扱われていない。

パーセントは上位 20%も中位 20%も下位 20%も同じ表現である。これに対して，よく似た用語パーセンタイルは，データを昇順にソートしたとき，最小値を 0，最大値を 100 として，100 等分して順位づけした値である。例えば，第一四分位数は 25 パーセンタイル，中央値は 50 パーセンタイル，第三四分位数は 75 パーセンタイルである。つまりパーセントは幅（割合），パーセンタイルは順位である。意識的に使い分ける必要がある。

千分率も導入すべきと考える。子どもにとって，$1000\text{mm} = 1\text{m}$　$1000\text{m} = 1\text{km}$　のように，1000 ごとに単位が変わることに慣れている。身近にある野球の打率（割分厘）も好例である。鉄道の勾配は，1km 進んで高低が何 m 変化するかを線路わきにたつ標識を探してみる事も。環境教育において，水質汚染や大気汚染にでてくる濃度が体系的に取り扱えるからである。

百万分率

$$q\ \text{ppm} = \frac{q}{1000}‰$$

十億分率

$$r\ \text{ppb} = \frac{r}{1000}\text{ppm}$$

分数とし理解，小数でないことが実用上重要である。

§12.　有効数字

有意な数値データが与えられたとする。

例えば，身長を10cm単位で計測したら170㎝でだった。1㎝単位で計測し直したら171㎝であり，1mm 単位でもう1回計測したら，170.8㎝ であった。有効数字はそれぞれ2，3，4桁である。単位を取り換えて，0.001708km と表しても有効数字は変わらない。末位以下に 0 を加えても，値に影響を与えず無意味である。有効数字に算入してはならない。計測単位未満は四捨五入しているものとする。

これらを一般化して，高位の最初の0以外の1桁の整数から有意な末位までを数える。

問題　円周率πの近似値を数直線上に表わせ。

$$3.14,\quad \sqrt{10},\quad \frac{22}{7},\quad 3.16$$

§13.　近似値

真の値 A（基準値)として，測定値 a が近似値である。差は $\varDelta a = a - A$ である。差の絶対値が誤差 $\left|\varDelta a\right|$ である。値Aの大きさで補正したのが相対誤差

$$\left|\frac{\varDelta a}{A}\right| \fallingdotseq \left|\frac{\varDelta a}{a}\right|$$

である。精度は

$$1 - \left|\frac{\varDelta a}{A}\right|$$

四則演算が近似値に与える影響は，

$$\min(\left|\frac{\varDelta a}{a}\right| \cdot \left|\frac{\varDelta b}{b}\right|) \leq \left|\frac{\varDelta(a+b)}{a+b}\right| \leq \max(\left|\frac{\varDelta a}{a}\right| \cdot \left|\frac{\varDelta b}{b}\right|)$$

$$\left|\frac{\varDelta(ab)}{ab}\right| \leq \left|\frac{\varDelta a}{a}\right| + \left|\frac{\varDelta b}{b}\right|$$

§14.　四捨五入

4捨5入を求める桁の次の位の数字が 4 以下ならそれを切り捨て，5 以上ならば切り上げて1つ上の位に1を加えればよい。したがって，小学生のとき，算数で習えば十分であると思われがち。数学では，小数点以下を 4 捨 5 入するとき，0.5 を加え切り捨てで求まるアルゴリズムを学び，ガウスの記号を用いて，x の4捨5入は

$$[x + 0.5]$$

ができれば，なお素晴らしいと軽く扱ってきた。

しかし実際のデータに適用したとき，端数が 0.5 のとき常に増える方向に丸められるため，正のバイアスが発生してしまうのである。このため，JIS 規格で，詳しく規定されている。しかしそれでも万全でない。

気象庁は，気温データにおいて，プラスの温度の場合は小数1位までを通常の4捨5入だが，マイナスの温度の場合は5捨6入を提示している。

また，医療費で，患者の負担を計算するとき，10円未満を四捨五入する建前である。患者は3割負担として，医療費1350円のとき，患者の支払いは405円だが四捨五入すると410円になる。一方，

医療機関は945円だが四捨五入すると950円となる。患者と医療機関の合計は1360円となり，数値が合わない。そこで，患者は５捨６入，医療側が４捨五入としている。

○　０捨１入

数学の定義では，「切上げ」は　$x-[x]>0\ \Rightarrow x+1$　である。これでは計測していない桁のノイズの影響を受けてしまう危険性がある。

そこで４捨５入に倣い，求める桁の次の位の数字が 0 以下ならそれを切り捨て，1 以上ならば切り上げて１つ上の位に１を加える方法である。ｘの０捨１入は

$$[x+0.9]$$

○　２捨３入（７捨８入）

気象予報士の過去問として，最大３時間降水量を図から読み取り，５mm 刻みで答えさせる問題であった。降水量の時系列図にはグラフの目盛が 2 ごと引かれていて，降水量が読み取れる。ただし，降水量は 1 mm 未満を切り捨てることになっている。グラフから

$$15+21+12=48$$

切り捨てた部分を積算すると

$$16+22+13=51$$

この結果を丸めて，正解 50mm が求まる。

○　９捨

小数点以下を「切り捨て」Gauss 記号$[x]$と一致する。数学と相性がいい。

§15.　　比例

実験や観測においてｘのデータが $\{x_n\}_{n=1,\cdots,N}$ のとき，それぞれに対応するｙの値が $\{y_n\}_{n=1,\cdots,N}$ とだったとする。このとき，

$$x_n : x_{n+1} = y_n : y_{n+1} \quad \text{あるいは} \qquad x_n : x_{n+1} = \frac{1}{y_n} : \frac{1}{y_{n+1}}$$

が成り立つならば，ｘとｙは比例関係

$$y \propto x$$

にあるといえる。この記号を数学教育は使っていないが，比例定数をこの段階を意識に上らせないですむので，ディスカリキュラスにとっては有益だろう。また，反転して

$$x \propto y$$

も成り立つ。統計の相関関係とも関連づけるためにも

$$(y-q) \propto (x-p)$$

を扱いたい。ここで　p,qは，データの値の目安（基準）となる重要な値である。一方で，x,yが十分に大きい値の場合，近似的に $y \propto x$ と理解できることも大事である。

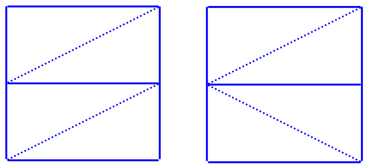
§16.　　図形の合同と相似（補足）

二つの図形が互いに合同であるとは，一方が他方に等長変換（平行，回転および対称移動の組み合わせ）で移るとき，かつそのときに限る。さらに，拡大・縮小を付加すると，相似が定義される。三角形以外の相似が大事である。

［問題］　半径の大きさが異なる円は相似である。相似の中心を作図せよ。

［問題］　互いに合同でない放物線は相似である。相似の中心を作図せよ。

［問題］　表が赤，裏が青の折り紙を４枚の合同な三角形に切ったとき，左と右の違いを説明せよ。



　数学が得意でない学習者にとって，合同とは「同じで（重なり）合う」と思い込んでいる。合同であっても，右型と左型と区分して扱うことを，実用の世界では要求している。

　例えば，ワンルームマンション，ホテル，介護施設などのような同じ広さの間取りが繰り返す場合，…左右左右…と交互に鏡像となっている。

§17.　　データサイエンスの観点の図形教育

　与えられた三角形 $\triangle aBC$ の基礎データを順に計測する。

$\left(\angle a, AB \angle b, BC \angle c, CA\right)$現物に合わせなくてはならず，どうしても混在する。右回転か左回転かをあいまいにすると，大きなトラブルを招く原因となる。

　面積はチェックサム的，パリティチェック的な役割を果たす。

$\left(\text{回転の向き角度} \angle a, \angle b, \angle c, \text{辺の長さ } AB, BC, CA, \text{面積}\right)$長であることは無駄ではない。「どのぐらいデータが欠損しても，復元できるか？」という問題意識が実用数学の立場では重要である。

§18.　　データの順序と演算

　家具や電化製品を買うとき，サイズが

横幅W×奥行Ｄ×高さＨ

と記載されている。数学の座標系（右手系）の順序と対応している。

　ところが，測量においては，

緯度×経度×高度

の左手系である。

　四角形の面積の公式において，

長方形＝縦×横

平行四辺形＝底辺×高さ

と，数学教育の内部にも，左右のねじれ現象を持つ。放置していていいのだろうか。

　ところで，日本では，明 38（1905）年に文部省は「縦×横」を導入し，現在は，ほぼ完全に定着してしまった。ただし，藤澤利喜太郎は，明 40（1907）年刊の算術教科書で「横ヲ表ス数ト縦ヲ表ス数トノ積」と記述し「横×縦」を主張している。太平洋戦争後，彌永昌吉らが編集した昭 28（1953）年の東京書籍発行「新しい算数」では「横×縦」を採用していた。3年後，「縦×横」に変更となるものの，東京書籍の教科書では

長方形の面積＝たて×よこ＝よこ×たて

との記述を続けている。

　なぜ，「短×長」でなく「長×短」が世界の主流なのであろうか。それは，筆算の観点で，計算が楽だからである。例えば，123×4 と 4×123 を対比すれば，納得できるであろう。

では，なぜ「長×短」を日本で忌避したのであろうか。寺子屋における珠算教育が蔓延している中で，明治の学制において洋算を導入するにあたり，和算の欠陥をあげつらい，九々の意義を教育的ではなく数学的に教えることを強調し全九々を採用したからだと筆者は推論する。計算が簡単か複雑かは検討しなかったのであろう。

寺子屋での掛け算の九々は「小×大」の半九々であった。残りの半九々「大×小」も無駄にしないのは，とても日本らしい。それらを割り算の九々（八算）に当てていた。例えば，1÷2=0.5 を二一天作五，1÷3=0.3…0.1 を三一三十一，2÷3=0.6…0.2 を三二六十二，このように呪文を繰り返し諳誦し覚えていた。その結果，割り算はできて，日常生活に役立ったのである。意味は分からなくても，「読書百遍意自ずから通ず」が往時の教育観であったのだろう。

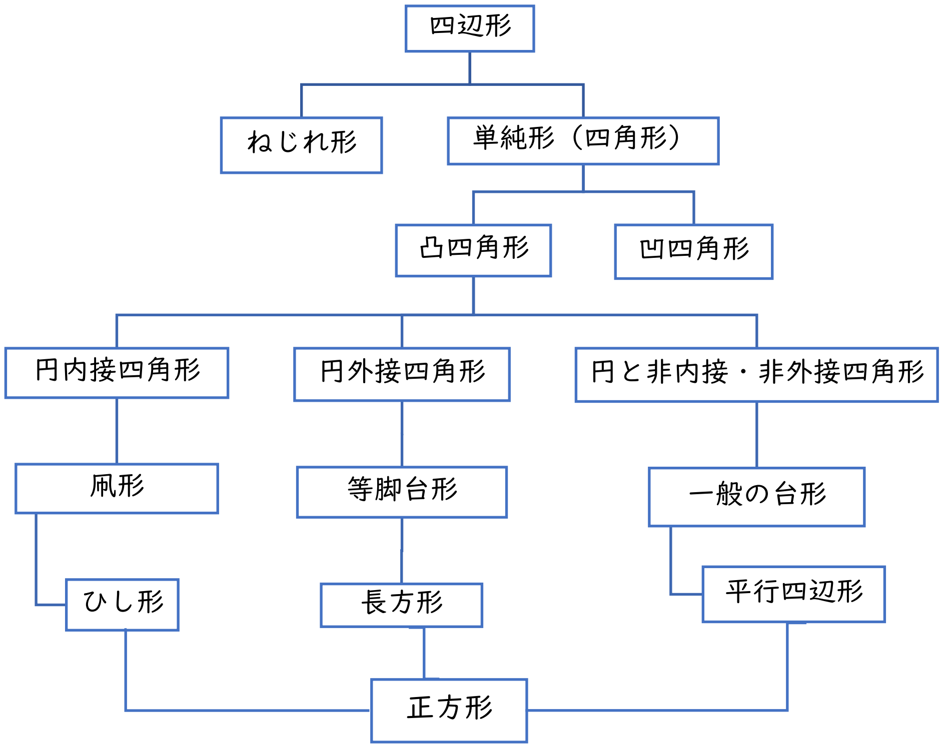
§19.　三角形から四角形へ

三角形 ABC が定める平面において 3 本の辺の延長線上にない一点 D をとる。そして頂点 A, B, C, D を AB, BC, CD, DA の順に結び図形を描く。3種類の4辺形が産まれる。

凸四角形　正方形　ひし形　長方形　平行四辺形　台形　凧形　円内接形　円外接形

凹四角形　ブーメラン形　矢じり形　くさび形　（名称が定まっていない）

ねじれ形　対頂角として1点を共有する2つの三角形



頂点 A, B, C, D を結ぶ順を変えると，6 種類　ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB ある。形状は３種類に加えて，それぞれ右回り，左回りがある。

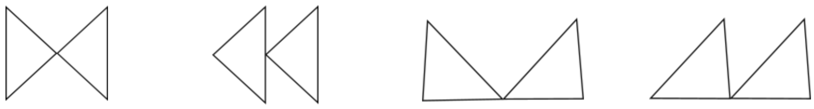
三角形の合同条件や相似条件を，そのまま四角形へ拡張できるかを考察することは有意義である。$(\text{角度}\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \text{長さ } AB, BC, CD, DA)$が欠損して復元できるか，復元できないか，必要な情報とは何か，さまざまな仮説を立て，検証することは，グループワーク・協働作業に適している。

例えば，三角形では，3 辺が分かれば一意に定まる。これに対して，四角形では，4 辺が分かっても一意に定まらない。3辺と2角，2辺と3角は一意に定まるが，4辺と1角では1つに絞り込めない。

対角線が分かれば解決する。これが耐震補強で筋交いの重要性を示す。四角形を三角形に分割して問題解決する過程の有用性を意味している。

四角形の重心の問題ために，力学の初歩である力のモーメントを，内分比・外分比・逆比と関連付けると，次の問題が簡明に示すことができる。

［問題］２つの合同な三角形の並び方を変えると重心の位置が移動する。それぞれ重心を図示せよ。



［問題］　凸四角形において，対角線で三角形に２つに分割し，それぞれの重心を求める。2 つの重心を結んだ直線ℓ_1を得る。もう一本の対角線で分割して，同様の操作を行い，直線ℓ_2を得る。ℓ_1とℓ_2の交点が四角形の重心となる。この方法で作図せよ。

［問題］　凹四角形も同様に求まり，四角形の外に重心がある。工作をせよ。

凹三角形も凸三角形も，内角や外角も，角度の向き(符号)を導入すれば定義できる。共通して成り立つ公式があり，前問のような面白い性質をもつ。しかし日本の数学教育で，四角形の分類に含めていないのは残念である。

§20.　平面から立体へ

２次元に留まっていて安住してはならない。

第４点を立体に配置された三角錐（四面体）の頂点が底面に射影されたものと解釈することが，地震防災で使われている。頂点は地震の「震源」であり，観測点三か所で定義される平面へ射影されて点が「震央」にあたる。

［問題］

光の三原色は赤・緑・青であり，印刷の三原色はシアン（赤の補色），マゼンタ（緑の補色），イエロー（青の補色）である。これらの６色を用いて，六面体の面を塗り分けて，美術としてふさわしい教具を作れ。何通りの塗り分け方があるかを考えよ。

［問題］　（図画工作と関連付け）

(1) 光の三原色だけを用いて，立方体（正六面体）の面を塗り分け方は何通りあるか。

(2) 正４面体の１面を貼りあわせるとできる双三角錐(二重四面体：6 面体の一種）は，光の三原色だけで塗り分け方は何通りあるか。

(3) 6 面体の一種である五角錐は何色で塗り分けができるか。

［問題］サイコロと文化史

(1) 身近にあるのがサイコロである。向かい合う面の和はすべて７であるが，雄のサイコロと雌のサイコロがあることは知られている。雄は左回り，雌は右回り。展開図にサイコロの目を描け。

(2) 和船の船大工は「天一，地六，表三合（見合）せ，艫四合わ（幸）せ，櫓櫂五と五と（ごとごと），中に二（荷）どっさり」と雌雄のサイコロを並べて船霊様に納めたという。この言葉を図

解せよ。

(3) 集落の境（結界）にしめ縄・道切り（辻切り）を掛けた。疫病・やくざ・バクチが村に入らないように，稲わらで作った酒徳利やタコやサイコロが下がっている。サイコロの目は，向かい合う面の和がどの面も 7 にならないようにあえて記入されている。具体的な目を例示せよ。

§21.　データサイエンスの重要性（サリドマイド事件）

1950 年代末から 60 年代初めに，全世界で販売された薬害である。妊娠初期に服用すると，胎児の主に手／足に重い奇形を起こす。もっとも典型的な症例は，肩から直接手が出ているあざらし肢症である。全世界で最大 1 万人が被害を受け，日本では死産を含めると約千人の胎児に被害があったと推定されている。

サリドマイド薬剤は，1957 年，ドイツで開発され，世界各国で販売された。日本国内では，1958 年，催眠鎮静剤「イソミン」，1960 年，胃腸薬「プロバン M」として，販売されたのである。妊娠中の女性に対して，「つわり」を軽減する効果的な薬として一般に広まった。その一方で，重い奇形の赤ちゃんが生まれだした。1961 年，ドイツのレンツ博士が，疫学調査研究から，その原因としてサリドマイド薬剤を推定し，いわゆる「レンツ警告」を発表した。

しかし実証的でないため，その信頼性に疑念をもたれ，日本では薬剤の出荷は継続された。世界動向から，1962 年，出荷を停止したものの，販売の継続が黙認される。1963 年，回収に踏み切ったけれど，その間，意思決定のために，全国規模の疫学調査を国も製薬メーカーともに行わなかった。しかし徹底した回収はなされず，販売停止後も被害が起き続け，もし回収が完遂していたら，被害が半減できたと推定されている。1974 年，日本では被害者と和解がされ，最終的に，1981 年，被害者 309 人が認定された。データサイエンスを標榜するとき，忘れてはならない薬害である。

○　サリドマイドの再評価

1965 年，ハンセン病の皮膚病へ効果が判明し，まず，同病の患者が多いブラジルでは販売が再開された。日本でのハンセン病の発症事例は日系ブラジル人が多いことからも推測される。1989 年，がん患者に対する効果も発見される。1998 年，米国はハンセン病の薬として承認した。1999 年，多発性骨髄腫への効果が判明した。ハンセン病，エイズ，免疫不全症候群などの治療薬になることが次々明らかとなり，2008 年，日本も承認し，サレドカプセルとして発売されている。きわめて注意すべきは，ブラジルで，再開後，処方管理が不十分であったため 120 人のサリドマイド薬害が出たことは他山の石とすべきである。

○　キラリティー（対掌性）

分子式が同じでも，原子の結合の仕方によって別の物質になる。これが異性体である。

(1) 平面的に構造式を描いたとき，すでに原子の結合が異なる

(2) 平面的に構造式は同じだが，立体的に考えると別物になる

2－1　鏡像異性体

2－2　非鏡像異性体

右手と左手は鏡に写すと，実像と鏡像は重なり合うけれど，実像同士，鏡像同士は互いに重なり合わない。掌（手のひら）に由来する「キラリティー（対掌性）」という用語を使う。キラリティーを持った物質を「キラル」と表現する。キラルな分子や結晶は，その構造は，時計回りならば R 配置（R：ラテン語「右」rectus），反時計回りならば S 配置（S：ラテン語「左」sinister）と区分される。

分子の場合，原子番号の大きい順にたどって，右左を区分する。
合同や相似より詳しい分類が必要であることを示唆する事例である

○　鏡像異性体
化学的性質・物理的性質が同じであるのにも関わらわず，生理活性が異なる異性体である。それが原因となって，薬害を起こすのである。
1979 年，ドイツの Blaschke 教授らは，サリドマイドの鏡像異性体を分離することに成功した。その上で，動物実験を行うことで，
サリドマイドＲ鏡像異性体　人体に有益（良薬）
サリドマイドＳ鏡像異性体　人体に有害（毒薬）
を突き止めた。医薬品開発における鏡像異性体の薬効の差異を認識させるさきがけとなった実験であった。新薬開発において，キラリティーの存在が重要であることが判明されたのである。この結果，サリドマイドＲ鏡像異性体のみを医薬品に用いれば，薬害を回避できると推測されていた。

○　サリドマイドのパラドックス
キラルな分子は，異性体Ｒは右回転に偏光し，異性体Ｓは左回転に偏光する。右と左が混合していると相殺して旋光性が減少する。また，ラセミ化 とはある化学物質がキラリティーを持っているとき，量が多い方の異性体がもう一方の鏡像異性体に変わる化学反応である。
1990 年代になって，サリドマイドの鏡像異性体は容易にラセミ化することが分かったのである。つまり，右が左になり，左が右になり，平衡混合物に変化することが分かったのである。要するに，安全なサリドマイドＲを用いても体内でラセミ化し，サリドマイドＳができて，薬害が起こる可能性ある。これは，Blaschke の結果と矛盾し「サリドマイドのパラドックス」と呼ばれた。

○パラドックスに対する仮設と実証
2018 年，柴田は次の仮説を立て検証した。
サリドマイドＲのみの場合，ラセミ化してサリドマイドＳが生じる。できたサリドマイドＳはサリドマイドＲとの１：１の二量体サリドマイド（ラセミ体）をただちにつくる。ラミセ体は構造的に安定的であり，難水溶性である。また，サリドマイドＳはほぼ残存せず，体内に吸収される可能性は極めて低い。また，サリドマイドＳのみの場合，同様に，ラセミ化してサリドマイドＲが生じて，サリドマイドＳとラセミ体をつくる。ラセミ化していないサリドマイドＳが吸収され薬害が起こしたと解釈できる。これを実証して見せた。
たとえ，安全なサリドマイドＲを用いても体内でラセミ化するため，薬害は回避できない。現在，サレドカプセルは混合物「ラセミ体」で発売されている。このため，厳格な処方管理がなされている。

§22.　まとめ
数学教育を藤田貞資が区分した 3 種類「用の用」「無用の用」「無用の無用」に，さらに「用の無用」を加えるべきだと主張する。
「用の用」とは，有益性が誰もが分かり納得して学ぶ数学。
「無用の用」とは，直接的に役に立ってことが分からなくても学んでおけば役に立っている数学。
「無用の無用」とは，特定の問題に限ってのみ役に立つ，例えば，入試数学。
「用の無用」とは，実用上よく使うのに，数学教育では無視・軽視している数学。

〇「用の無用」の事例

例1. データサイエンスを志向するには「等式＝から近似≒へ」のパラダイムシフトが不可避。

「概数」は小学4年,「近似値」は中学3年で学び,「≒」は高校の微積分の解説の中で。

例2. 合計特殊出生率

n 歳の女性の総数を $f(n)$ とし，n 歳の女性が産んだ子どもの総数を $g(n)$ とすると，次の和で定義されている。

$$\sum_{n=15}^{49} \frac{g(n)}{f(n)}$$

厚生労働省は，一人の女性が一生の間に産む子どもの数とみなして発表している（平成27年度以降）が，なぜみなせるのか理由を説明せよ。

婚姻適齢を民法第731条

「婚姻は，18歳にならなければ，することができない。」

と改正（令和４年）されたことを受け，未成年の15歳～17歳の出産をどう取り扱うのか。また，不妊治療や生殖補助医療が保険適用（令和４年）になったように，50 歳以上の超高齢出産も無視できなくなりつつある。参考までに，令和 3 年度の厚生労働省のデータによれば，母の年齢別の出産件数は，次の通りである。

14歳以下　32人	15～19歳　5 510人	20～24歳　59 896人
25～29歳　210 433人	30～34歳　292 439人	35～39歳　193 177人
40～44歳　48 517人	45～49歳　1 597人	50歳以上　20人

データの科学となると，少子化や不妊は統計処理だけに留まらない重大課題である。

例3. 数学語と公用語の異同

◆「以上」「以下」「未満」

「以上」と「以下」とは，付属する数字などを含むけれど，「未満」はそれを含まない。「公用文の作成」において，説明をつけ加えている。

改めて，算数・数学の学習指導要領をみると，新出する［用語・記号］をまとめ，提示している。記号「＞　＜」は小学校 2 年で導入し，数の大小関係を不等号「＞」,「＜」を用いて簡潔に表現できることを指導すると述べているが，読み方に指示がない。

用語「以上　以下　未満」は小学校4年で導入し,「５以下」は５と同じか，それより小さい数を表す一方,「５未満」は５を含まず５より小さい数を表すことと，わざわざ具体的に例示している。

記号「≦　≧」は中学校 1 年になってから導入している。数量の関係や法則などを，文字を用いた式に表すことができることを理解し，式を用いて表したり読み取ったりすることをもとめ，大小関係を，不等式を用いて表すことを取り扱っている。

しかし学習指導要領の文章は，必ずしも公用文に準拠していない。数式・記号（不等号など）の読み方を具体的に提示していない点に原因があると筆者は考える。

Excelでは，不等号≧を＞＝と組合せで入力するルールである。ただし，順序を交換した＝＞は不可である。ちなみに≠も＞＜で入力することになっているのは統一的である。

ところで，＞に既存の語句から「超越」または新造語「過満」を用語としたら便利だろう。合わせて，≠に「等しいにあらず」から新造語「非等号」を推奨したい。

	ＪＩＳ漢字字典 日本規格協会 2002	句読点，記号・符号活用辞典 小学館 2007	算数・数学用語辞典 東京堂出版 2010	学習指導要領（本文中の用例等）
＜	不等号（より小）	小なり より小さい	例示「1＜2」は「1小なり2」	より小さい 未満
＞	不等号（より大）	大なり より大きい	例示「2＞1」は「2大なり1」	より大きい
≦	より小さいか又は等しい	小なりイコール		同じか，それより小さい 以下
≧	より大きいか又は等しい	大なりイコール	例示「Ｘ≧3」は「Ｘ大なりイコール3」	等しいか，より大きい 以上

◆ Ａ，Ｂ，Ｃ及びＤ

等しく扱うべき三つ以上の物事を結び付けたり，同時に取り上げたりする。最後のつながり部分にのみ「及び」を用い，他は「,」とする。

$x^3-4x=0$　の解は　$x=-1, x=0$ 及び $x=1$

◆ Ａ及びＢ並びにＣ及びＤ

３つ以上の物事を結び付けるなどの際に，結び付きの強さに段階がある場合，１段階目の結び付きには「及び」を，２段階目の結び付きには「並びに」を使う。「及び」を用いていない文に「並びは」は現れない。

$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-3 \end{cases}$　の解は　$x=3$ 及び $y=-1$ 並びに $x=-1$　及び $y=3$

◆ Ａ若しくはＢ又はＣ若しくはＤ

複数の物事のうち，いずれか一つを選ぶことを表す場合に，「か」という意味で用い，「又は」を用いていない文に「若しくは」は現れない。それぞれ同格の三つ以上の物事の中から一つを選ぶ場合は，最後に示す物事の前にだけ「又は」を用い，他は「,」とする。

三つ以上の物事から一つを選ぶ際に，結び付きの強さに段階がある場合，１段階目の結び付きには「若しくは」を，２段階目の結び付きには「又は」を使うことになっている。ところで，数学の答案で

$$(xy-2x-3y+6)(xy-x+y-1)=0$$

$\Longrightarrow$　$x=3$　もしくは　$y=2$　または　$x=-1$　もしくは　$y=1$

と丁寧に書くことはまれである。むしろ略記　$x=3,-1, y=1,2$　が横行している。

○ 場合・とき

前提となる条件が二つある場合には，大きい条件を「場合」で，小さい条件を「とき」と使い分けが，公用文では求められているが，それほど，厳格に使い分けていないことを自戒する。

§23　付録

Society5.0 の旗振りしている内閣府は，内閣官房を助けて行政各部署との総合調整を行う機関である。ところで，内閣官房が主導した「ワクチン接種記録システム」は誤登録など品質に大きい問題があった。コロナワクチンは 8 億 8200 万回分を契約しながら，首相官邸によれば接種は 3 億 8320 万回（令和５年３月 31 日）に過ぎない。廃棄・キャンセルが 30%以上にのぼり，今後さらに増えるものと見込まれている。この様な状況はデータマインドと解離した失政策であり，筆者は多くの数学教育に携わった者とともに，何を教授してきたのか，猛省している。

自分の体験から学べると信じている愚か者がいるが，歴史や他人の経験から学ぶことが重要である。

○　老子　「無用之用」三十輻共一轂。当其無，有車之用。埏埴以為器。当其無，有器之用。鑿戸牖以為室。当其無，有室之用。故有之以為利，無之以為用。
　末句の読み下し，「有の以て利を為すには，無の以て用を為せばなり」

○　荘子　「人皆知有用之用，而莫知無用之用也」
　読み下し。「人みな有用の用を知り，無用の用を知るなきなり」
　解釈。身の回りに有るのが当たり前すぎて，役立っていることに気づかないのだろう。

○　荻生徂徠　「数学亦不佞　未之学　然観於今数学者流　設種種奇功　以誇其精微　其実無用於世」
　読み下し。「数学もまた不安である。（私は）いまだこれを学ばず。しかるに今の数学者の流れを観ると，種々の奇功を設け，以てその精微を誇り，その実は世において用無し。」

○　藤田貞資　（誤字を訂正，句読点を追加）

今ノ算数ニ「用ノ用」アリ。「無用ノ用」アリ。「無用ノ無用」アリ。

「用ノ用」ハ貿買貰貸斗斛丈尺城郭天官時日其他，人事ニ益アルモノ総テ是ナリ。…「無用ノ用」ハ，題術及異形ノ適等，無極ノ術ノ類，是ナリ。此レ人事ノ急ニアラズト雖ドモ，講習スレバ有用ノ佐助トナル。…

「無用ノ無用」ハ近時ノ算書ヲ見ルニ，題中ニ，点線相混シ手立相入ル。是レ数ニ迷テ理ニ闇ク，実ヲ弃テ虚ニ走リ，己レノ奇巧ヲアラハシ，人ニ誇ラント欲スルノ具ニ〆，実ニ，世ノ長物ナリ。

［引用文献］

（１）　伊藤隆　長方形の面積の公式における「縦×横」の変遷と多様性について　群馬大教育学部紀要　自然科学編　57 巻 5―14 頁 2009 年
（２）　Mori, T. et al. Scientific Reports, 8, 1294 (2018); 名古屋工業大学プレスリリース/サリドマイドの催奇形性問題を分子レベルで解明－40 年間の謎に終止符－（2018 年 2 月 20 日）.
（３）　和算―江戸の数学文化（中公選書 114）　小川 束　2021/01/07
（４）　上野健爾　和算から洋算へ　静脩 2004, 41(1): 4-7
（５）　藤田貞資　（1734～1807）　精要算法　序　凡例（1781）
（６）　荻生徂徠　（1666～1728）　学則　付録
（７）新しい「公用文作成の要領」に向けて（報告）　令和３年３月 12 日　文化審議会国語分科会

高等学校段階での数学の普遍教育　（誤記修正）

船倉武夫

2030 年に学習指導要領が行われると思われる。そのときの社会環境

ア）ＡＩやチャット GPT がさらに進展

イ）世界は人口爆発、日本を含む東アジアは少子化の加速

ウ）偏差値が無意味化（高校・大学の統廃合が加速）

エ）競争（入試）を前提とできない

⇒　教科「数学」は重用される一方で変容が切迫

ア）「学ぶべき数学」精選（残すもの、消すもの、加えるもの）

イ）数学教員は学習者のナビゲーターまたはサポーター

ウ）数学力評価の観点・方法・基準を「皆違って皆いい」質の変換

エ）数学嫌い病の診断、治療法、リハビリ及び復帰を直視

概略をメモしておく。

A）　気づき

直観　直接に対象をとらえて認知

直感　推理・考察でなく感覚で把握

直勘　ピンと発見する第六勘

B）　論証

理解　必要なとき使える

諦観　詳しくは分からなくても信じる

納得　信頼して鑑賞

伝達　第三者へ説明

説得　第三者が納得してくれる

C）　数学作文の流れ

問（設問の理解・解析）

法（解答の方針を提示）

術（解答のテクニック）

解（計算の流れを記述）

答（結果を具体的に明示）

適（設問との関連性）

D）　図解（チャート）

定式（単位を明記）

数式（計算できる式）

計算（様々な具体的な計算）

解釈（答えに単位を付ける）

適用（元の問題に合わせる）

E）　数と式

連立方程式は 2 元を筆算で扱う。表計算と関連付ける。3 元は関数電卓を使用。

行列表現を導入するが、行列式や固有値などは扱わない。

2 次方程式の解の公式はアルゴリズムの一例。3 次は立方のみを扱う。

F)　不等式

数直線・区間・集合記号とあわせて扱う。

G)　関数

陽関数・陰関数　2 変数関数を扱う

関数同士の四則演算　スカラー積の関係　（複雑にならない範囲）

合成関数　偶関数・奇関数　逆関数　分数関数・逆数関数

H)　関数の追加

絶対値関数	$\mathrm{abs}(x)=\lvert x\rvert$	符号関数	$\mathrm{sgn}(x)=\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$

I)　横軸・縦軸（対数グラフに向けた練習）

$y=ax+b$	×が大きい場合	$y=a+bx$	×が小さい場合
$y-q=a(x-p)$	基準点(p,q)	$ax+by=c$	直交関係 平行
$\dfrac{1}{y}=ax+b$	横軸x　縦軸$\frac{1}{y}$	$\dfrac{1}{y}=\dfrac{a}{x}+b$	横軸$\frac{1}{x}$　縦軸$\frac{1}{y}$
$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	切片	$x=ay+b$	直線$y=x$で対称

J)　指数関数

平方根　$\mathrm{sqrt}(x)=\sqrt{x}$　は合成まで含めて不可欠。

ネイピアの数（金融教育として導入）　72 法側（下記）

exp の積極的導入　$\exp(1)=e$　　$y=A^x=\exp(ax)$

$f(x+y)=f(x)f(y)$ で特徴づける。

指数法則や立方根 $\sqrt[3]{x}$ は扱わない。

K)　対数関数

常用対数　$\log(x)$　自然対数　$\ln(x)$　一般対数　$\log(a,x)$　$\log_a(x)$

$f(xy)=f(x)+f(y)$ で特徴づける。

L)　関数方程式論（初歩）

初期値

一般解　特別解　特異解

M)　統計は表計算ソフトを利用

総和　平均　偏差　分散　相関係数　最小二乗法　ABC 分析　分割表

N)　三角比

三角定規（JIS 規格の理解）　四角形（凸角形・凹角形）を三角形に分解

相似比　縮小　拡大　関数電卓の使用を前提とした計量

三角関数（6 種類）　逆三角関数　60 分法（度分秒）

$$\sin x=\frac{1}{\sin x}=\mathrm{cosec}\,x \qquad \arcsin x=\sin^{-1}x$$

ラジアンや加法公式は扱わない。

O)　ベクトル

立体（３次元、座標）　右手系・左手系　有用性（建築　防災）等高線

投影法（図法）は必須としたい。（物指・三角定規・コンパスの使用）

抽象的なベクトルは扱わない。展開図は扱わない。

P)　微分と積分

$$\varDelta f(x) \fallingdotseq f'(x)\varDelta x \qquad \text{変化量≒速度×時間}$$

量 y　速度 y'　加速度 y''　微分係数 $f'(x)$　　$a \fallingdotseq b \implies f(a) \fallingdotseq f(b)$ を疑う力

関数グラフの読み取り　増減　接線　変曲　凹凸　曲率　PC 利用

微分積分の計算は扱わない。極限操作は扱わない。

Q)　離散数学

初等整数論　　順列　組合せ

数列　部分列　漸化式　有限数列の和　増加列　減少列　階差数列

等差数列　調和数列　等比数列　半減　倍増

複雑な数列や級数は扱わない。

◆　参考

● 　崩壊は A→B と変化するが、総量 A+B は不変である。薬学の 1 次 2 次 3 次反応

等比数列　$y = 100/2^x$　半減期が一定

A	100	50	25	12.5	6.25	3.125	1.5625	0.78125
B	0	50	75	87.5	93.75	96.875	98.4375	99.21875
半減期		1	1	1	1	1	1	1

等差数列　$y = 100 - x$　半減期が減衰

A	100	50	25	12.5	6.25	3.125	1.5625	0.78125
半減期		1	0.5	0.25	0.13	0.06	0.03	0.02

反比例　$y = 100/(x+1)$　半減期が増大

A	100	50	25	12.5	6.25	3.125	1.5625	0.78125
半減期	0	1	2	4	8	16	32	64

● 　ネイピアの数

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

よりも、はさみうちの原理

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

の方が単調増加列・単調減少列で納得しやすい。両辺の平均をとって

$$e \fallingdotseq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

は、近似の加速となる好教材であろう。

$$2\cosh x = e^x + e^{-x} \fallingdotseq 2 + x^2$$

を、関数グラフのアプリを用いて描き、例えば、$x = 1/4$ を代入して、$E = \sqrt{\sqrt{e}}$ と置けば

$$E + \frac{1}{E} \fallingdotseq \frac{33}{16}$$

関数電卓があれば後は簡単である

● 地方活性化（端数は切捨て処理）

A 村→B 町　30%流出　B 町→A 村　5%流出　と仮定すると、人口動態はどうなるか。10 年経つ前に人口は安定化する。A と B の初期値や百分率を変更して考察せよ。

A→B	15	11	8	7	6	5	5	4	4
A	50	37	29	24	20	18	17	16	16
B	50	63	71	76	80	82	83	84	84
B→A	2	3	3	3	4	4	4	4	4

● 服薬した後の血中濃度

医師から処方された薬を毎日 1 回２錠飲み、その薬の半減期が 24 時間である。

問 1. もし飲み忘れたとき、翌日、いつもの通り 1 錠ならばどうなるか。

問 2. もし飲み忘れたとき、翌日、２錠にしたらどうなるのか。

問 3. 毎日は面倒くさいので 2 日おきに 4 錠飲むとどうなるか。

問 4. 朝夕 2 回、1 錠ずつ飲むように分けて飲むとすればどうかなるか。

血中濃度	100	150	175	187.5	193.75	196.875
第 1 日	100	50	25	12.5	6.25	3.125
第 2 日		100	50	25	12.5	6.25
第 3 日			100	50	25	12.5
第 4 日				100	50	25
第 5 日					100	50
第 6 日						100

● 体内被ばく

物理的半減期 T_1 として、代謝により生物学的半減期 T_2 が相乗する。両方を合わせた生体内の実効半減期 T は、次の式で求まる。

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}$$

ヨウ素 131 は、放射能汚染の原因となる。その物理的半減期:8 日、生物学的半減期:120 日として、実効半減期を求めよ。

● 72 の法則

金融の世界では、資産を運用して、「投資元本＋運用益」が元本の 2 倍（倍増）になるのはいつか、重要である。「単利」で資産運用した場合、

運用年利回り（%）×運用期間（年）= 100

を「100 の法則」と呼ぶそうである。「複利」で資産運用した場合、近似計算の公式

運用年利回り（%）×運用期間（年）≒ 72

をイタリアの数学者パチョーリが 15 世紀に出版した。ところで、利息制限法で元本 10 万円未満 20%、10～100 万円 18%、100 万円以上 15%に対して期間をもとめよ。

2023年04月12日

数学教育学会 学会課題 Study Group

Society 5.0に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み

未解決の課題と展望
2023年4月

白石和夫（課題SG代表）
shiraish@bunkyo.ac.jp

新たな課題SGに活動を引き継ぐにあたり，未解決の課題を述べる。

数学の使い方を軸にする数学科カリキュラムの再構成

数学科カリキュラムを数学の使い方を軸に再構成することが避けて通れない課題である。

たとえば，対数を学ぶとは何を学ぶことなのだろうか。対数方程式の解き方を学ぶことではないだろう。対数という数理の眼鏡を通すことで現象から本質を取り出す経験を積むことが対数を学ぶ意義なのではなかろうか。対数を指数関数の逆関数として教えるのは数学教育現代化の負の遺産である。対数の存在意義が伝わるような教材開発が望まれる。

学ぶ人の観点から自然な流れを作る

数学の論理展開は数学科カリキュラムのもう一つの軸である。最も重要な視点は，考える人が育つ数学科カリキュラムを作ることである。自然な流れを作るために，人はどのように数学を学んでいくのか，知ることが課題となる。

考える人を育てるためにも，数学の論理展開をProblem-based Learningの手法によるものに改めていくことが必要である。さらに，数学の論理展開それ自体に学習者の個性が尊重されなければならない。個に応じて最適な学び方が選べる数学科カリキュラムの構築が課題である。

精選を進めて必要な数学がより早く学べる体制を

新たに学ばせたい数学はたくさんある。たとえば，多変数関数の微分法（偏微分），離散数学，etc.。しかし，新たな内容の追加を考える前に，内容の精選を進めておく必要がある。

カリキュラム改定は実践を重ね，地道に進むのが王道であるが，数学教育を取り巻く環境の変化はそれを待ってはくれない。削除したり後回しにしたりすべき内容の特定を進め，現代社会に対応するために必要な数学をより早く学べる体制を作る方策を見出していかなければならない。

教員の意識改革

「数学の時代となったのだから数学を頑張って教えよう」では，時代の要請に応えられない。

現状では，現行カリキュラムをどう教えるか考えることがほぼ唯一の研究課題である。そして，そこで得られた成果に基づいて次を考えることがカリキュラム研究であった。しかし，数学の何が求められているのか，数学を学ぶことを通して何を学ぶ必要があるのか，問い直す視点が不可欠である。

世の中は大きく変わっている。過去からの延長で未来を論じることができない時代である。研修そのものの在り方が変わるような意識改革を実現しなければならない。特に，現代社会で数学がどう使われているのか，要点を理解するための取り組みが求められる。たとえば，微積分や線形代数はどういう視点で学べばいいのか，機械学習や深層学習の数学的原理をどう理解したらいいのだろうかなど。

いまだに形式陶冶論が根強く残っている。だけれども，数学を学ばせる根拠を形式陶冶論に頼る理由も見えてきた。数学を学び，その美しさに魅せられて教員となった人たちが数学教育を支えている。その構造が形式陶冶論の背後にあることを見逃してはならないだろう。

文理の対立から文理融合へ

理工系の数学は我々が住む3次元空間を直接の考察対象としている。理系数学は幾何学が主軸である。たとえば，3次元空間での現象を記述するためにベクトルの外積や，様々な波動現象を調べるために三角関数の加法定理やその誘導公式が重要な役割を果たしている。

一方，文系数学は多次元の空間を対象としている。2次元や3次元のベクトルを詳細に学ぶ必要性に乏しいが，多変数関数の微積分（偏微分と重積分）は必須である。また，振動する現象を捉えるために正弦・余弦の関数が必要とされるが，重要なのは，それらの微分である。正弦関数の導関数が余弦関数となることを証明しようとすると加法定理が必須だけれども，数値計算などを通して直観的に認めることで乗り切ることも不可能ではないだろう。

文理融合の学校数学の実現までには，まだ，多くの試行錯誤が必要である。この分野の研究の活性化を図らなければならない。

教員養成・教員研修を進めるにあたって

中・高等学校の数学科教員の多くは理系出身である。文系科目における数学の役割の重要度が高まっていることへの理解を深める機会の創出が求められる。

次期SGは，教員養成・教員研修に本格的に取り組むことになる。今後に向けて，2017年の冬季研究会で紹介した 新しい算数研究 2017 No.562 11月号(p.37)に掲載された小林廉氏の論説「オランダにおける数学教育改革の欠点から学ぶ」からの引用を，再度，提示して本報告書を閉めたい。

> Gravemeijier他（オランダ）は，Daro（米）の言葉を引用した：
>
> 米国の教師は与えられた課題について「児童たちがこの課題に取り組む際に学習することになる数学は何か」ではなく「児童たちがこの課題の答えを得るようにするためにはどのように教えればよいか」を自問する。

本報告書は，令和 4 年度～令和 6 年度科学研究費　基盤研究(C)（一般）（課題番号　22K02530 研究代表者　守屋誠司）による研究を含む。

数学教育学会　2021～2022 年度　課題 Study Group
「Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み」報告書

編　集　課題 SG 代表　白石和夫
発行日　2023 年 4 月 23 日
発行所　一般社団法人　数学教育学会
住　所　〒112-0012　東京都文京区大塚 1-4-15　アトラスタワー茗荷谷 105 (株)甲文堂内