数学教育学会 2021～22 年度学会課題 Study Group

Society 5.0に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み

報告書
補助資料集

2023年4月

数学教育学会

2021～22年度学会課題 Study Group

補助資料

数学教育学会2023年度春季年会

シンポジウム

Society 5.0に対応できる文理融合の学校数学
～計算を何に使うか～

白石和夫（文教大学教育学部）
shiraish@bunkyo.ac.jp

学会課題SG「Society 5.0に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み」は，文理融合の視点から学校数学の新たな体系を生み出すことを目指し研究してきた。
その鍵となるのが，計算の仕方を学ぶ教科から，計算の使い方を学ぶ教科への転換である。
検索語　文理融合，学校数学，Society 5.0，計算を何に使うか

1. 数学教育のアップデート

(1) 数学の時代

現代社会は「数学の時代」である。けれども，学校数学は時代の変化に追いついていない。

2030年代の学校数学はいかなるものとなるべきなのだろうか。

数学を学ぶことが新たなものを生み出す原動力とならなければならない。求められることは，数学を使える人を育てることである。数学は宝の山である。現実の問題を数学の問題に書き換えることができれば，数学のなかに解決策を見出すことができるかも知れない。

(2) 焦点は学力中間層

定型業務はコンピュータに委ねる時代となった。課題は，従来，定型業務を引き受けることで社会を支えてきた学力中位層に対する数学教育である。特に，数学を学ぶことから離れ，文系志望へと転じていた層への数学教育である。数学を学ぶ意義を認識させるものに変えることが不可欠である。

(3) 文理融合の数学教育

文系数学においても，物理的意味，幾何学的な意味を与えることで学びやすくなることが多い。文系数学を含むすべての数学を見通しのよいものに再構成し，学びやすく幅広いニーズに対応できる学校数学の体系化が必要である。

(4) 少ない道具立てで多くのことを学ぶ

学ぶべき数学は増大している。個別の内容として暗記する数学学習では多くのことを学べない。論理的思考力の育成を重視し，少ない道具立てで多くのことを学べる学校数学の体系を実現しなければならない。

学校数学や受験数学においてしか役にたたない仔細な知識を学ぶ無駄を省いて，重要な概念や重要な手法を重点的に学び，仕事に数学を使う人が育つ数学教育を実現しなければならない。

(5) 公式暗記から数学の使い方・作り方へ

計算力は電卓・コンピュータに頼る時代である。公式を覚えることはコンピュータにまかせ，数学学習の重点を，論理の組み立てなど，数学の使い方，数学の作り方に移すべき時が来た。

2. 取り組むべき課題

(1) 数理諸科学の基盤としての数学

学校数学の核となるべきものは，数理諸科学の基盤としての数学である。STEMの枠組みのなかで数学が言語として学ばれる体制を作らなければならない。

(2) コンピュータによる計算が前提の数学

もう一つの重要な柱は，数学の用いられ方が変化した時代への対応である。特に，数学を，コンピュータに計算させることを前提として学ぶものに改めることが不可欠である。

一方，数学教育においては，新しい内容の学

びはじめをコンピュータによる数値計算から始める教育手法が可能となる。そして，面倒な計算をコンピュータに委ねることで，論理構成と現実世界への応用に焦点化した教育が可能となる。コンピュータによる計算は，試行錯誤にも有効であり，探求心の育成が期待できる。

(3) 学ぶ意義のわかる学校数学

現行の学校数学には，高校数学Ⅱの複素数など，何のために学ぶのか，よくわからない内容が多い。以降の学年で学ぶ前提知識を前の学年で教えておこうとするカリキュラム設計が，学ぶ意義の理解できない内容を生んでいる。それらの学習時期を調整し，必要性が明らかになってから学ぶように変えたい。

そして，学ぶ意義を感じさせるために求められることは，ざっくりと全体像を把握してから細部を詰めていく学習方法への転換である。

(4) 数学のよさを実感させる

数学には直観でとらえられないものをとらえる力がある。厳密な論理展開で今まで見えなかったことが見えてくる。数学を学ぶ過程を通してこのことを実感させなければならない。

ただし，これは，裏からみると，直観的に明らかなことに対して理屈をこねまわしても数学のよさは理解されないということでもある。

(5) 細切れカリキュラムからの脱却

数学は体系的に整備された学問体系である。その良さを理解するためには，学年ごとに細かく目標を定める細切れカリキュラムからの脱却が必須である。さらに，Adaptive LearningやPBLなどの新たな教育技法を有効に機能するとするためにも細切れカリキュラムからの脱却が欠かせない。

3. 数学科の構成

(1) データの数学

新時代の数学カリキュラムを考える上での第一のキーワードは,「データの数学」である。データを読み解くために数学が欠かせない。

(2) 数と計算

足し算や引き算では十進位取り記数法を教えるために筆算類似の指導が求められるかもしれない。しかし，掛け算や割り算は素朴なアルゴリズムで実行可能であり，実際の計算様式は個々人で異なってよい。そして，それは効率よく計算できるものである必要はない。

さらに，小学校で負数までを扱い，経験を積むことで，中学校での指導の重点を負数を掛けることの意味の指導に重点化できる。

(3) 代数（関数と方程式）

方程式の代数的解法を学ぶのはグラフや数値計算によっておよその解決が可能となった後で十分である。優先して学ぶべきことは，自然界の法則にもとづいて数式に表す技能である。

(4) 数値の表し方（対数）

すべての正の数を1×10^xの形に表せば数値の相対的な比較が容易になる。対数は，多くの数理科学において重要な役割を果たしている。特に，対数グラフによる表現が重要である。

(5) 幾何学

我々は3DグラフィックスやGPSなど, 幾何学の恩恵のなかで生活している。しかし，ここで用いられる幾何学は初等幾何ではなく，座標幾何である。

拡大・縮小で平面内のどの2点間の距離も同じ割合で伸縮することを前提とすれば，三角比を利用する計量が可能になる。さらに，三平方の定理を学べば，座標幾何を学ぶ基盤が確立する。三角比は, 直交座標と極座標を結びつける。

我々は3次元空間を2次元に射影して暮らしている。3次元空間における直観の育成とともに射影の数学を学ばせることも必要である。

解析幾何が探究の道具として有用である一方で，初等幾何は学んだ事実を直観的に把握するのに役立つ。両者を並行して学び，双方の利点が生かされるカリキュラムを作りたい。

(6) 線形代数（ベクトルと行列）

近代的な統計学は，線形代数と微積分の基礎の上に成立している。統計学を学ぶ上で，微積

分と線形代数を学ぶことが欠かせない。

面倒な計算はコンピュータにまかせ，連立一次方程式や一次変換を何に役立てるかを学ぶことが線形代数の学習の出発点である。

ベクトルや行列を記述の手段として利用することで幾何学を見通しよく展開することができる。行列の積は回転や裏返しなどの変換の合成を意味する。幾何学を学ぶことを通してベクトルや行列の利用に習熟することができる。

通常の線形代数の枠組みから外れるために見落としがちなのがΣ記法である。線形写像としてのΣの使用に習熟しなければ，たとえば，

分散 ＝ 2乗した数値の平均－平均の2乗

といった公式の理解が進まない。

(7) 数列と離散数学

離散的な関数としての数列の概念を早期に学ばせる必要があるだろう。

そして,漸化式の役割が変化した時代である。漸化式で問題を表現する技能を習得させることが必要である。漸化式で定義された数列はコンピュータで計算できる。だから，一般項が求まらなくても漸化式で表すことに価値がある。

数列の漸化式の先にあるのは，再帰的な問題解決の手法である。コンピュータによる計算力を生かすためには再帰的問題解決の手法を身に付けなければならない。

(8) 微分・微分方程式

微分は，関数を多項式で近似するとき高次の項を無視して一次近似を考えることである。

微分方程式は，離散化して近似することで数値計算が可能である。だから，微分方程式を立てること自体に価値がある。問題を微分方程式で表現することは広範な数理科学において基本的な手法である。そして，2階線形微分方程式を学ぶことが複素数導入の端緒になる。

(9) 積分（区分求積）

微分方程式も含め，不定積分の求積は数式処理（コンピュータ代数）に頼ることができる。積分を学ぶ目的は，原始関数（不定積分）の計算に習熟することではない。

積分が使われる場面では，和，すなわち，区分求積の意味での積分の理解が不可欠である。たとえば，統計学では，確率変数の期待値や分散が該当する。物理学に現れる積分の多くは区分求積の意味でないと理解できない。

原始関数が求まらない関数でも定積分はコンピュータを使って近似計算できる。この計算も区分求積を知らなければ理解できない。

(10) 関数の近似

多項式で近似するテーラー展開，基本周波数とその倍数の周波数の正弦・余弦の和で近似するフーリエ級数など，解析学の手法は現代社会を支えている。無限級数に関する詳細な議論を避け，近似できたとしてその係数を求めることは現行の高校数学程度で実行可能である。

(11) 統計

統計分野の課題は暗記科目からの脱却である。コンピュータによる計算が前提の数学であれば，2項分布を正規分布で近似する必要はない。正規分布による区間推定の公式は不要である。

(12) 数学学習の基礎

数学学習において，基礎体力に相当するものは，計算力，論理的推論能力，アルゴリズム記述力である。これら基礎力の育成が欠かせない。

計算技能として何が重要であるか，煮詰めておく必要がある。たとえば，最小2乗法を適用するために，平方完成の技法は必須である。最小2乗法は，回帰直線の公式その他多くの公式を導くのに有用な手法である。

論理については，論理それ自体の指導系統の確立も必要である。たとえば，数学的帰納法が正しく適用できるためには論理の枠組みの理解が欠かせない。その前提として，方程式を条件命題として捉え，その真理集合を議論の対象とする学び方への転換が必要である。

そして，アルゴリズム記述能力の指導系統の確立も重要な課題である。コンピュータを用いて計算する技能は，数学を学ぶ上で欠かせない技能である。

Society5.0 に対応できる文理融合の学校数学

～小学校における計算について

東京福祉大学　　丹　洋一
ytan@mwnet.jp

概要：
□初等教育の段階であっても，計算方法を学び習熟させるだけの学習から，実際に使えるようになることが求められている。今までの本学会の研究成果を含め，そのための教育内容を挙げる。子どもが現実の問題に応用できる内容として，剰余系につながる学習，EXCEL による文字式の理解，座標と負の数の利用とプログラミング，EXCEL を利用して現実の問題に利用すること等である。子どもたちが十分親しみ理解出来て，利用できる教材の利用を目指した。

検索語：Society5.0,算数,

1.　はじめに

Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学～計算を何に使うか～というテーマに対して，初等教育段階における内容について考察する。計算方法に習熟するだけの学習内容から，数学を使えるようになることが求められている。ツールとしてコンピュータを使えるようになるためにも，どのように使っていくかを経験させていくことが重要と考える。そのための学習内容をいくつか挙げていく。

2.　具体的な活用例について

(1) 剰余系の学習につなげていくこと

①10 進位取り記数法

・十進位取り記数法では各位で，0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 が繰り返すことを学ぶ。

（例）教具として，手作りのカウンターを作る。このカウンターを数唱にも使い，10 より大きな数の理解につなげていく。

②自然数は，積と被乗数より小さい数の和で表せること

・九九の学習の後，自然数は，積と被乗数より小さい数の和で表せることを扱う。その後にわり算を学習する。

（例）4×5＋3＝23 だから 23÷4＝5 あまり 3 と計算できることを学ばせる。これが剰余系の学習にもつながる。(現行の確かめ算ではない。)

③時刻についての学習

・時刻と時間についての学習を，剰余系の観点から学習する。デジタル時計にも対応できるようにする。指導の順序として，

・剰余系の例として，時刻が繰り返すということを学ぶ。

（日時計の製作によって，時刻が地球の自転によって決まることを前もって学ぶことが望ましい。）

・計算は剰余系で行う。

（学習例）

・8：40 の 30 分後は何時何分か。

8:40+0:30=8:70=9:10

・9：50 に出発し 10：10 に着いた。かかった時間は何分か。

10:10-9:50=1:10-0:50=0:70-0:50=0:20

・30 分歩いて，11：10 に着いた。出発した時刻は何時何分か。

11:10-0:30=10:70-0:30=10:40

・店にいた時間は 30 分，公園にいた時間は 40 分，合わせて何時間何分か。

0:30+0:40=0:70=1:10

・8 時 30 分の 5 時間 40 分後の時刻

AM8：30＋5:40＝AM13:70=PM1:70＝PM2:10

④曜日についての活用

2022 年		10 月				
日	月	火	水	木	金	土
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

例題）・10 月 1 日が土曜日のとき，10 月 19 日は何曜日か。

余り 1＝土，2＝日，3＝月，4＝火，5＝水，6＝木，0＝金

19÷7＝2 余り 5

19≡5 なので，水曜日

(2) Excel の使用によって，文字式を使えるものにする。[2]

・□・△とかの半具体物を途中で用いるのでなく，具体物（絵）の次の段階では，文字をはじめから用いる。（今まで，具体物＝＞半具体物＝＞文字という順序を踏んで指導していたのを，半具体物は省略する。）

2	3	540
150円のプリンをA1個、80円のまんじゅうをB1個買ったときの合計の代金		
1	1	230
2	3	540
3	5	850

また，2 種類以上の変数も扱う。

・EXCEL 等による，左辺の変数に数値を代入する活動を入れることによって，簡単な方程式の意味について理解を強化する。1 段階の逆算で解を求められる問題だけでなく扱う。

x	2x+3	=	29	
チョコレートが2箱と3個あります。1箱に何個入っているでしょうか？				
	[左辺]	(比較)	[右辺]	
10	23	＜	29	
11	25	＜	29	
12	27	＜	29	
13	29	＜	30	
14	31	＝	31	○
15	33	＞	32	

・EXCEL 等による活動で，変数に文字列も扱う。

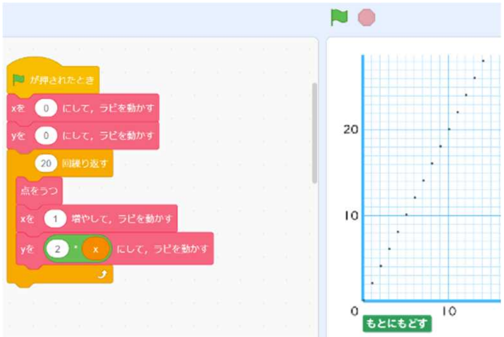
(3) 座標と負の数の学習によって，グラフや移動について学ぶこと

①座標

・低学年から直交座標について扱う。

・はじめから関数のグラフは連続線であることを前提とするのでなく，点の集合が線になることを，プログラミングを使って理解させる。

大量な計算を必要とする作業が，プログラミングによって，手軽に利用できる。



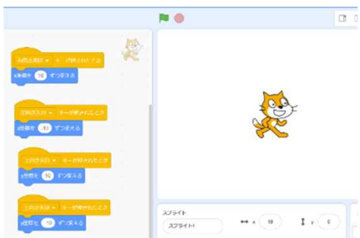
（大日本図書のサイトのコードを利用）

②物体の動き

・高学年から負の数を導入することによって，プログラミングでグラフィックを利用することにつなげていく。

（例）Scratch を用いて，キー入力に応じてキャラクター移動をするプログラムを作る

そのためには，「左への移動が x 座標が負の数ずつ変化すること，右への移動が x 座標が正の数ずつ変化することであることを学ぶ。同様に，上への移動が y 座標が正の数ずつ変化すること，下移動が y 座標が負の数ずつ変化することであること」を学ぶ。



(3) 図形の面積の公式を EXCEL に入力して実際の問題解決に利用すること

現在の面積の学習では，図形の公式を作ることと単純な計算練習が中心になっている。

面積の公式を Excel に入力することによって，現実の不定形の面積を求めることに利用できるようになる。

（例）東京ディズニーリゾートラインの内側の面積を台形の公式で近似する。

図形を平行線で区切り台形に分けていく。

台形の公式が三角形の面積の公式を含むことを知り，統一して Excel に式を入力する。

Excel のセルに，上底・下底・高さを入力すると，面積を計算するように，台形の公式を入力する。セルをコピーして，多くの計算を簡単にすますことができる。合計を計算してから，最後に単位換算で，実際の面積を計算する。

東京ディズニーリゾートの面積					
番号	上底	下底	高さ	面積	
1	0	2.8	0.5	0.7	
2	2.8	6.5	1	4.65	
3	0	2.7	0.4	0.54	
4	9.2	12.5	1	10.85	
5	12.5	14.1	1	13.3	
6	14.1	15.5	1	14.8	
7	15.5	16.6	1	16.05	
8	16.6	16.3	1	16.45	
9	16.3	15.3	1	15.8	
10	15.3	14.3	1	14.8	
11	14.3	13.9	1	14.1	
12	13.9	14.2	1	14.05	
13	14.2	12.7	1	13.45	
14	12.7	11.1	1	11.9	
15	11.1	11.6	1	11.35	
16	11.6	11.7	1	11.65	
17	11.7	10.3	1	11	
18	10.3	6.5	1	8.4	
19	6.5	1.8	1	4.15	
20	1.8	0	0.2	0.18	
			合計	208.17	㎠
			実際の面積	1445625	㎡

この経験を，環境問題など実際の問題に生かせるようにする。今までも

・死海の面積の変化

・南極上空のオゾンホールの面積の変化

等の実践がなされている。[3]今後は，指導者が指示しなくても，子ども自らが，ツールとして PC を活用できるようになることを目指していく。

3. まとめ

今まで計算方法を学び，そのことに習熟することに，小学校では重心が置かれていた。今後は，初等教育段階であっても，生活や社会の問題に対応できる学校数学の教育内容が行われていくことが望ましい。その際に，現実に置かれている子どもの環境を無視しての教育はあり得ない。正負の数であれ，デジタル時計であれ，ICT 機器・プログラミングであれ，小学校の子どもが現段階でも十分親しみ，もっと深く学び得るものである。試行錯誤と問題解決の経験を十分に積ませることが今後の学校教育に求められている。

最後に，本学会は創立以来，現場の教員と共に研究を進めてきた。亡き横地清先生(1968 年[4])が言われた「“数学教育の担い手は，まず，現場の先生なのだ。・・・・・“誰か別の人に製品を作ってもらって，その製品を声高に売り歩くのではなくて，自分たちで製品を作り，それを広げていくのだ”と考えて，嵐の源に立っている人たちこそ，一番重要ではあるまいか。」という言葉を現場を離れた今でも心に置いて，現場の先生との連携を深めていきたいと強く思う。

参考・引用文献

[1]守屋誠司編，小学校指導法算数改定第 2 版，玉川大学出版部，2019 年.

[2]渡邉　伸樹,代数の体系化をめざしてーその1ー小学校 1 年生における文字の Excel による指導,数学教育学会誌,Vol.43　1-2　号,pp.25-34,2002

[3]渡邉　伸樹,代数の体系化をめざしてーそのⅡー小学校 5 年生へのエクセルによる不定形の求積の指導,数学教育学会誌,Vol.43　3-4　号,pp.5-15,2002

[4]横地清,現場の教育を大切に，数学教育学会誌,Vol.9,pp.1-3,1968 年

数学教育学会春季年会シンポジウム

Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学～計算を何に使うか～

一人一台端末時代における数学の授業の在り方に関する一考察

大田区立志茂田中学校　　　　　高山琢磨

概要：一人一台端末の普及がほぼ完了し，学校教育は今まさに大きく変革を求められている。PBL，STEM をどう実現するかは喫緊の課題といえよう。本稿では文理融合の学校数学において「計算を何に使うか」に関して，現実社会の事象（ガソリン価格の国際比較）において計算の有用性を実感できる教材，整数の性質をエクセル，プログラミングを用いて考察することの面白さを実感することのできる教材，インターネットからデータを取り出し加工，分析することで問題を解する喜びを実感できる教材の提案を行い，今後の授業の在り方についての考察を行う。

検索語：資料の活用，ハーシャッド数，ガソリン価格の比較

1. 比を活用してて現実の問題を考察する活動

> 米国と日本のガソリン価格はどちらが高いのでしょうか。また，その背景にはどのような社会問題があるのでしょうか。

現実の問題を数学を用いて解決することで，数学の有用性に気づき，より深く考察するようになることがこの課題の狙いである。

中学校第一学年では比例式の計算を学習する。また，第三学年では，相似の計算において $a:b=c:d$ ならば，$a:c=b:d$ であることも学習する。また，連比については入試問題等においてわずかに触れることはあるが，カリキュラム上は学習することはない。しかしながら，連比は日常の世界の問題解決においては大切な概念である。

ここで紹介するのは，日米のガソリン価格の比較を題材とする教材である。

> 2022 年 9 月のある日のガソリンの価格は日本では 1 リットル 175 円，米国では 1 ガロン 6 ドル 15 セントでした。どちらが高いのでしょうか。

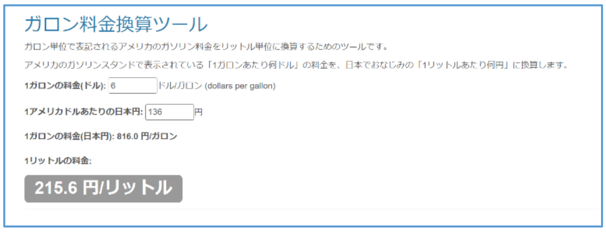
(1) 米国のガソリンの価格は，1 ガロン 6 ドル 15 セント，よって為替レートを 1 ドル 138.5 円とすると，1 ガロン 6.15×138.5＝851.8 円

1 ガロン 4.545L であるから，1 L のガソリンを x 円とすると，

851.8：x＝4.545：1 より

x＝851.8÷4.545＝187.4 円/L

となる。しかし，インターネット上のガロン料金換算ツールというサイトを使って調べてみると結果が異なる。



再度インターネットで調べてみると，「1 ガロンはアメリカでは約 3.785 リットル (3.78541178…) ですが英国・カナダなどでは約 4.546 リットルとなっています。」と示されている。

その値を使用して再度計算しなおしてみると

851.8÷3.785＝225.04 円/L

となり，先ほどサイトで調べた値により近い価格になることがわかる。従って，日本よりアメリカのほうがガソリンの価格が高いことがわかる。

さらに，生徒には次の 3 つの問題について考えてみるように促す。

①「アメリカで 1 ガロン x ドル，1 ドル y 円のとき，1L のガソリンの値段は何円ですか」

②「なぜ，アメリカのガソリン価格が日本より高くなったのか，原因を調べてみましょう。」
③「ウクライナ侵攻の影響で原油価格が高騰を続ける中，イギリスでは家庭用乗用車のガソリンを満タンにするための費用が 100 ポンド，日本円で 1 万 7000 円近くに達しました。これは，BBC などがイギリスの自動車団体の試算として報じているものです。」この記事について検証しましょう。

1.2. プログラミングによる考察

「アメリカで 1 ガロン x 円，為替レートが 1 ドル y 円のとき, 1L あたり何円かを求めるプログラムを Scratch あるいは，Basic を用いて作りましょう。」（図 1）

```
10 input "a=",a
20 input "b=",b
30 c=a*b/3.785
40 print c
60 end
```

図 1　Basic によるオンラインプログラミング

2. 整数のある性質についての考察する活動

タブレット上の汎用性のあるアプリケーションを，生徒自身が選択し活用できる能力をいかにして育成していくのかが，これからの課題である。

（1）2023 はハーシャッド数である。

2+2+0+3=7 が 2023 の約数である。

2023=7×17×17

このようにある数の各位の数の和が元の数の約数になっているとき，その数をハーシャッド数という。2022～2025 は連続ハーシャッド数である。

（問題 1）それ以外に連続するハーシャッド数はあるかタブレットを用いて調べてみましょう。

Scratch, エクセル等どれが適しているかを選択することが大切である。

・4 桁の自然数の約数を見出すのは Scratch 等のプログラミングが適している（図 2）。

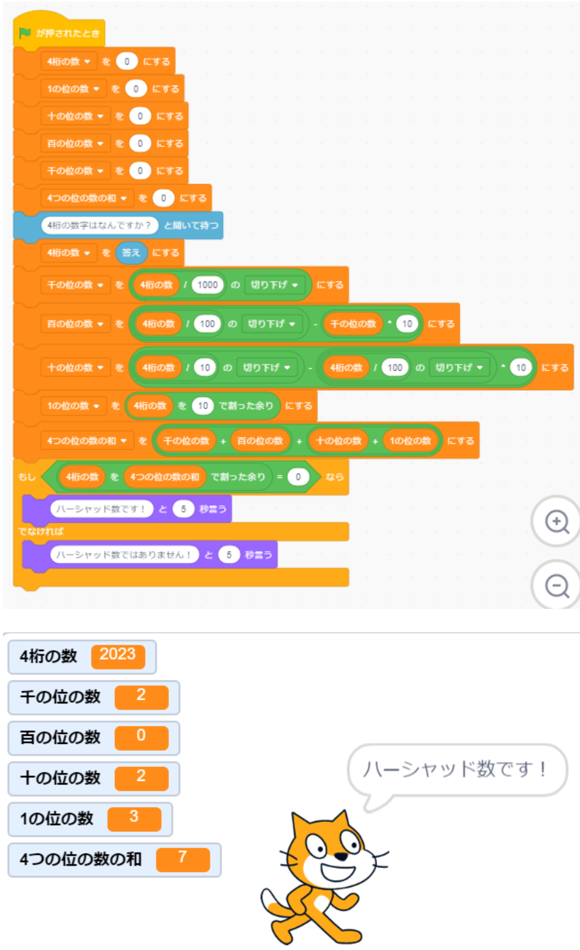


図 2　Scratch によるプログラミング

・調べたいことがらの式がわかっている場合はエクセルが適している（図 3）。

56	2000	0	0	0	2	2	0	1
57	2022	2	2	0	2	6	0	1
58	2023	3	2	0	2	7	0	1
59	2024	4	2	0	2	8	0	1
60	2119	9	1	1	2	13	0	1
61	2159	9	5	1	2	17	0	1
62	2175	5	7	1	2	15	0	1
63	2240	0	4	2	2	8	0	1
64	2312	2	1	3	2	8	0	1
65	2352	2	5	3	2	12	0	1

図 3　エクセルによる表計算

2022 は 6 の倍数であることを数学的に以下のように考察する

10≡4（mod6）100≡40≡16≡4　1000≡40≡4 であるから 2022≡8+8+8≡24≡0（mod 6）

さらに，1014～1017 は 4 連続ハーシャッド数，3030～3037 は 4 連続ハーシャッド数であることを見出す。

（2）今年の 1 月 1 日に 2023 は「各桁の和×各桁の 2 乗の和の 2 乗」となっていることが

American Mathematics Society の HP に紹介され話題となった。すなわち，

2023＝（2＋0＋2＋3）（2^2＋0^2＋2^2＋3^2）^{2}

＝6×17×17

（問題 2）次にこの性質を満たす年を Scratch で計算してみましょう。

エクセルで計算すると 2400 であり，その後は 4 桁の数はないことがわかる（図 4）。

（2＋4＋0＋0）（2^2＋4^4＋0＋0）^{2}＝6×20×20

10306	0121	1	2	1	0	4	36	144	-23
10307	0020	0	2	0	0	2	16	32	-12
10308	5101	1	0	1	5	7	729	5103	-2
10309	0001	1	0	0	0	1	1	1	0
10310	2023	3	2	0	2	7	289	2023	0
10311	2400	0	0	4	2	6	400	2400	0
10312	0011	1	1	0	0	2	4	8	3
10313	5110	0	1	1	5	7	729	5103	7
10314	0010	0	1	0	0	1	1	1	9

図 4　エクセルによる表計算

（3）2400 はハーシャッド数であり，（2）の性質を満たすただ一つの 4 桁の整数である。

3．箱ひげ図を利用して考察する活動

近年，メジャーリーグでは，打球速度が打者の評価が一つの指標となっているといわれる。この指標が導入されて，打者の打球速度は変化したのだろうか。

一人一台端末が導入され，統計領域の学習においてはデータ分析が行える環境が整ったと言える。メジャーリーグの公式 HP から CSV データを取り出し，箱ひげ図を用いてデータを分析する活動を紹介する。

「メジャーリーグの打球速度のデータを箱ひげ図を用いて分析してみましょう。」（図 5，図 6）

BATTERS / POSITION / TEAM / 2022 / MINIMUM BBE (100) / Update / Download CSV

						Exit Velocity (MPH)				Distance (ft)			Hard Hit			Barrels		
Rk.	Player	Team	BBE	LA (°)	SwSp%	Max	Avg	FB/LD	GB	Max	Avg	Avg HR	95 MPH+	%	% Swing	#	Brls/BBE %	Brls/PA %
1	Judge, Aaron		400	15.0	39.0	118.4	95.9	100.3	89.2	465	206	412	247	61.8	19.9	106	26.5	15.2
2	Alvarez, Yordan		371	12.3	40.7	117.4	95.2	98.1	91.7	469	196	405	222	59.8	23.7	78	21.0	13.9
3	Trout, Mike		300	24.6	37.7	114.4	91.6	94.8	86.7	490	219	409	153	51.0	16.7	59	19.7	11.8
4	Schwarber, Kyle		379	19.2	35.4	114.8	93.3	99.3	87.0	468	200	412	206	54.4	17.6	76	20.1	11.4
5	Stanton, Giancarlo		264	10.8	26.9	119.8	95.0	98.4	94.4	457	163	402	138	52.3	17.4	51	19.3	11.3
6	Ohtani, Shohei		428	12.1	35.0	119.1	92.9	97.3	88.4	462	178	408	213	49.8	17.0	72	16.8	10.8
7	Chisholm Jr., Jazz		150	15.5	37.3	109.6	90.4	95.5	84.3	425	183	398	70	46.7	15.6	25	16.7	10.4
8	Riley, Austin		451	12.9	37.7	115.9	92.5	97.7	87.2	441	183	411	229	50.8	16.8	71	15.7	10.2
9	Jiménez, Eloy		224	7.4	31.7	113.4	92.8	97.6	89.6	450	160	409	123	54.9	21.0	33	14.7	10.1
10	Mountcastle, Ryan		408	15.9	39.5	112.0	91.3	94.3	88.1	437	188	407	189	46.3	14.4	61	15.0	10.0
11	Pederson, Joc		284	14.8	34.2	112.8	93.2	96.4	90.5	441	192	407	148	52.1	19.1	43	15.1	9.9
12	Hernández, Teoscar		347	11.6	36.3	114.1	92.6	98.3	87.0	464	173	410	185	53.3	18.2	52	15.0	9.7
13	Buxton, Byron		225	21.4	34.2	113.5	92.9	97.4	88.3	469	194	410	113	50.2	15.8	37	16.4	9.7

図 5　MLB 選手の打撃データ

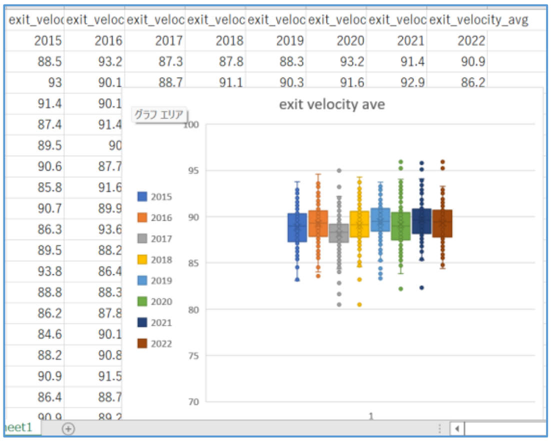


図 6　打球速度データの箱ひげ図（1）

「もう少し，違いを明確にするためどうすればよいでしょうか。」

「前半の 4 年と後半の 4 年での変化を見てましょう。」（図 7）

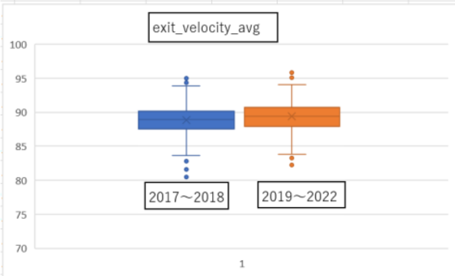


図 7　打撃速度データの箱ひげ図（2）

4．まとめ

一人一台端末における数学教育，特に計算の在り方について授業例をあげて考察を行った。

・現実の事象の複雑な計算を要する問題において，タブレットが重要になる。

・インターネットとエクセルを各自が用いることで，生データを自由に取り出し加工し考察することが可能となった。

・Scratch や Python 等のプログラミングを活用して，数学の世界，現実事象の問題などを解決することが可能となった。その際，アルゴリズムを考察することで，数学的思考が涵養されることが期待できる。

引用・参考文献

[1]ガロン料金換算ツール - Z4 ツール，http://z4.azurewebsites.net/Travel/GallonToLiter,（2023 年 2 月 1 日確認済み）

[2]The Official Site of Major League Baseball | MLB.com，https://www.mlb.com/stats/（2023 年 2 月 1 日確認済み）

2023年度数学教育学会　春季年会予稿集

symposium: 2030年代の数学教育を考える

― 慣性系に乗って　NEW CURRICULUM ―

教員退職者、KMI　　河合　博一

E-mail : m-owlwise@asa.email.ne.jp

概要：２０２５年から新テストに「情報」「公共」が加わり従来の科目も時間が１０分伸びている。かなり大幅な変革が行われている。それらはコンピューターを使うこととプログラミングができることを考えている。その根底には、２０３０年代は知識社会であると考えられるからである。社会の変容も早くwebでは4Gから5Gへと急速に進んでいる。それらに伴い社会はSociety 5.0 へと舵を切っている。特に次世代を予想して「数理資本主義」を経済産業省が唱えてEdTech、SDGsなどの用語が世間でも氾濫している。世界は大きく回転している。

検索語：データーサイエンス、指導要領、知識労働、SDGs

1. はじめに 2030年代はData Science時代である

従来は、data を処理し、統計的に捉えることだけに留まっていた。Internet の普及と容量がかなり大きな量子コンピュータの開発が背景となり、数学力や統計学、プログラミングのスキルを元に data から導き出された結果から提案を行う力が大切になってくる。例えば卑近な例として、天気予報を取り上げる。地球は銀河系に属して、自転しながら太陽の周りを公転している。それゆえ、地球の大気圏の各点（座標）は気圧、温度、降水量、湿度、偏西風、風速、重力、オゾン分布、紫外線量、日照時間、積雪量、PM2、海水温度、黄砂等の情報を付与されているが更に太陽光、太陽風、電磁波、放射能量等の宇宙からの情報も同時に付与されている。それらの情報の累積に基づき、地球を取り巻く成層圏の状態の何年にも亘る各点毎のデーターを大型コンピュータを使い分析できるようになり気象状況の解析・分析の精度が上がってきている。それでも予想を超える結果になることもある。これらも踏まえながら社会を考える、2030 年代は,資本主義の基本生産要素である「資本、土地、労力」が二義的になり情報と頭脳からなる「知識」が随一の生産要素となることが予測される知識資本主義に移行する。

２．知識労働者とは、企業とは

知識労働者は、高等教育により理論的、分析的な知識を習得し適用するという能力を必要とする。仕事に対するアプローチと思考方法を要し、何よりも継続学習が必要となる。この時代は知識労働者が社会の中核階層となる。

中核産業の例としては、総取りのプラットフォーマーGAFA+Mの繁栄であり威力が挙げられる。2021年Googleは量子コンピュータの開発を公表した。Facebookは名前をMetaに変えたことと内部問題で株の下落率が大きいが、ウクライナに対するロシアの軍事行動による世界的な経済情勢の悪化にもかかわらずGAFA+M の時価総額は５６０兆円と言われている。Appleは１日で２６兆円株価が上がった日もあった。なお、日本でも分子科学研究所が「第３の量子コンピューター」として注目される冷却原子型で、ノイズの影響を抑える技術を確立し世界最速の２量子ビットゲート（基本演算要素）操作を実現している。

３．慣性系に乗って

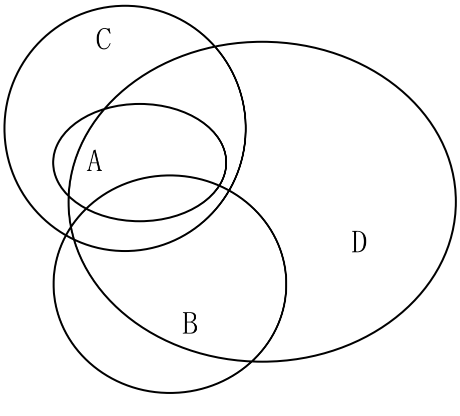
1つの指導要領は慣性系であり、生徒はそれに乗っていて降りることはできない。物理の運動の第一法則は慣性の法則である「すべての物体は、外部から力を加えられない限り、静止している物体は静止の状態を続け、運動している物体は等速度運動を続ける。」 現在の教育課程に乗っている生徒は自由意思で別の課程に乗り移ることはできない。例外はあるが、現在の中学校１年の生徒達が標準で６年後に大学に入学し教員を志願する又は理学部の数学科から又は他学科から数学の教員になるとしても、新教育課程の影響と効果を知るには十年以上の月日を要する。新教育課程の良し悪しは直ぐには判別できない。また、十年前が良い教育だからと云ってそこに逆行して行くこともできない。

生徒は可哀想である。自ら curriculum を選択できない。低き方向に引き込まれていく。そのように成らないためには、我々が頑張らなくてはならない、次の時代の指導要領を考え準備することが必要である。

４．考えることは

上述のような状態で我々が考えることは次のdata scienceの時代に対応したcurriculumである。社会の状況はコロナ禍の体験-自宅work等-もありcomputerが常識の時代となっている。その状態を次の図のように表す。これは、昨年春示した。なお項目は調整中である。

A:「コア」とは文理融合の数学の項目の集合。
B:「オプション」とは少し進んだ数学の項目の集合。
C: Computer を使って行う数学の学習の項目の集合
D: 人類が進化の過程で獲得してきた項目の集合



A:1 方程式、不等式
2 指数,対数
3 三角比、三角関数
4 ベクトル、
5 数列、Σ、整関数の定積分
6 整関数の微分、微分方程式
7 順列、組み合せ、確率統計　　等

B は少し進んだ項目
1 剰余定理、因数定理
2 論証法　帰納法、演繹法、転換法
3 数論　剰余系、法
4 平均値の定理、
5 指数、対数関数の微分
6 合成関数の微積分
7 微積の考え方、平均値の定理
8 行列、一次変換、掃き出し法
9 平面・空間図形
10 推測統計、因子分析、　　等

D 人類が進化の過程で獲得してきたもの
1 パターン認識
2 図形（幾何要素）認識
3 数える能力

５．望ましい CURRICULUM

日本は何を目指すのかそれに伴い、日本の目標に対する curriculum が検討され、合理的で普遍性ある curriculum が自ずから創造される。数学教育学会の叡智を持ってそれを考察し公表するべきである。

５．切っ掛けは

経済産業省が「数理資本主義」という考え方を公表したのは何故であろうか。普通に考えると他の省から出されてもおかしくないはずなのに。この直接の理由は GAFA+M の繁栄であった。次の時代の先端企業は Web なのかと考えると**脱炭素の企業**と生物関連企業ではないかとも考えられる。これらの視点に気づいて企業は作戦を考えているはずである。

何事にも切っ掛けが大切である。数学の体験の様に、暗雲の中に一条の光を見いだすような思索の体験が必要である。脳みそを絞り、もう駄目かと思った瞬間に解の糸口を見いだすような醍醐味を十代の半ば前に経験することは少なくなった。この知的経験のためには何もい

らない。自己の頭と精神だけである。最も人間的なことだがこの人間的なことが軽んじられている。このことこそが日本人の怠性の原因ではないだろうか。景気が停滞して生活が悪いと言えども戦後からみれば高止まりである。衣食住足りたて脳が退化してはいないか。今日のようにGame,SNS等で安易に時間をつぶしていては先が心配である。

子供の頃の印象も大切であるから次のことも考えるべきである。

５．タイトル–数学–

いつの時代からか、日本では小学校は「算数」、中学以降は「数学」となっている。おそらく、明治の数学者菊池大麓が黒表紙を世に出し計算を日本人に定着させた頃からだと思う。小学校の内容は多岐に亘る、計算、量、図形、関数、統計資料等。英語でarithmeticなら計算が強調される。実際は内容は様々である。中学になると算数から数学へのギャップがあるとも言う。最初から数学であれば、印象からくる感じの違いはないのではないかとも思う。国によるが算数を使ってない様である。日本の場合次のように考えるのは如何か。

名称案			
小学校	中学校	高等学校	
数学１	数学７	数学10	コア
数学２	数学８		OP
数学３	数学９	数学11	コア
数学４			OP
数学５		数学12	コア
数学６			OP
４単位	４単位	３単位+	３単位

なお、追加であるが、黒表紙からの流れはかなり効果があったと思える。日本中のどんな地方の小さな店でもお釣りの計算を暗算でキチットできる高齢の方がいるのは凄いことである。

現段階では考慮中であるが以下が概略である。

６．課程概略

	コア	op	コア	op	コア	op
	１年		２年		３年	
			整関数の微分	指数対数関数の微分		
	２次関数		速度加速度		数列	数列の和
１期	２次方程式	高次多項式	微分方程式	三角関数の微分	Σ	
	２次不等式	高次方程式			漸化式	
	方程式の理論	不等式		微分方程式II		
	指数	数の集合	区分求積	微積分II	ベクトル	近似計算
2期	指数関数	数の理論	整関数の定積分	微積分の理論		
	対数		原始関数			
	対数関数			定積分		
	三角比		順列		統計	推測統計
3期	三角関数	図形	組み合わせ	行列	期待値	
	正弦定理		二項定理		分散	
	余弦定理				相関関係	
			確率、確率分布			
				注：配置してない項目があります		

[資料]1. 文部科学省　過年度及び現行 小学校、中学校、高等学校教育課程
2. 経済産業省 2019年3月 数理資本主義
3. 次世代通信システム　4Gから5Gへ
4. 経済産業省 Society 5.0の実現に向けた流れ

シンポジウム： Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学
～計算を何に使うか～

データ活用時代の「数と計算」の事例研究

埼玉大学名誉教授 町田彰一郎

概要：Society5.0 の時代の「数と計算」を考察するとき、決まりきったアルゴリズムに従った計算練習を目指すだけではなく、事象を明らかにするために集められたデータからどのようなことが導き出されるか、そのために用いた数値が確かに正しいものかどうかを、「個別最適な学び」、「協動的な学び」の中でそのあり方を検討することが求められている。

検索語：数と計算、GIGA スクール、EXCEL，データ ・ サイエンス、

1．はじめに

戦後の生活単元学習の時代には、小学校における「数と計算」は、日常生活における四則計算を目安に行われてきた。「現代化」が始まると、「数と計算」をその構造に着目し「文字式の計算」への移行が進められた。その後、電卓・PC が開発され、関数教育が進み、整数から実数への移行が進み算数・数学の計算が文字式の計算・グラフ作成へ移り、小学校の算数の「数と計算」と中・高での「文字式とその計算」の連携が課題となって来ている。

Society5.0 の時代、インターネットは単なる人と人の連携によるグローバル化にとどまらず、人ともの、ものとものインターナットの情報交流が始まり、仮想現実、ロボットとの共生社会が生まれてきている。こうした時代、小学校の「数と計算」はどのような変革が求められているのだろうか。まずは、複雑多様に変化していく社会が生み出すデータ処理が求められる。さらに、難しい計算は電卓・PC に任せることができるが、それだけでは十分ではなく、計算の結果が正しいかどうか、その場に適切なものかどうかの検証がより重要な役割を持つことになった。本論ではこうした問題を一般論としてではなく、具体的な事例から取り上げ考察していくことにする。

2 数と計算の中に潜む「数たちの還暦」

以下に文献 1 から取り上げた課題、「数たちの還暦」を挙げる。0 から 9 までの数の中から数を一つあげ、下のやり方で順に一桁の計算をしてみる。 たとえば、3、これに 1 をたして 3＋1＝4、次は、1＋4＝5 を作る。このように足し算を続け、10 を超えたら、1 の位の数だけ書き、4＋5＝9, 5＋9＝4、こうして計算を続けていくと、結果はどのようになるか？ 試行錯誤をし、主体的、対話的な学習形態を通じて自立協働し、自分たちの理論を作り上げる。小学生でも計算は簡単で、何回かしていく内に次のことが成り立つのではとの予測がでる。

最後に、3，1 となって、60 回目で最初の

場面に戻ってくるのではないか。

下の表は下方に向かって 3，1，4，，、、と確かめたもの。

10	20	30	40	50	60
3	7	8	7	3	2
1	4	1	9	6	9
4	1	9	6	9	1
5	5	0	5	5	0
9	6	9	1	4	1
4	1	9	6	9	1
3	7	8	7	3	2
7	8	7	3	2	3
0	5	5	0	5	5
7	3	2	3	7	8

中には、3，1，4,、、とは異なる数でやってみる児童がでる。

ここでは、これを「数たちが持つ還暦」ということにして、いろいろな数で確かめさせる。計算自体は難しくないので、友達と自立・協働しながら、自分の「思い」をぶつけるようにする。ならないものもあるが、多くの場合 60 になるので、次の「還暦」問題を

確かめさせる。

どんな数でも最大 60 回で元に戻ることになるだろう。 そこで、次の課題をだす。もし、2011 年 8 月 23 日に生まれた児童がいたとすると、これを 2011823 として、1111111 をたして繰り返えすととうなるだろうか。

3　2011 年 8 月 23 日生まれの児童は還暦の日に元に戻るのだろうか？

最初は、2011823 次に 1111111 として、たし算してみると次のようになる。

60 回目に 2011 年 8 月 23 日に戻っている。

	2	0	1	1	8	2	3
1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	1	2	2	9	3	4
3	4	2	3	3	0	4	5
4	7	3	5	5	9	7	9
5	1	5	8	8	9	1	4
	・	・	・	・	・	・	
55	9	5	7	7	1	9	1
56	7	7	2	2	7	7	2
57	6	2	9	9	8	6	3
58	3	9	1	1	5	3	5
59	9	1	0	0	3	9	8
60	2	0	1	1	8	2	3
	1	1	1	1	1	1	1

4　EXCEL でこのことが確かに成り立つか確かめてみよう。

上記の計算は、単なる一桁の計算なのでの殆どの児童はできる。しかしながら、どの子であっても 60 回の内に計算間違いをすることが起きる。たとえ手で計算しようと PC を使ってしようと間違いを確認作業することは、これからのビッグ・データの時代には大切である。、求め

たことが本当に正しいのか？ 60 回で元に戻るという仮説が本当に正しいことか？ こうしたことが、主体的で協働的な学習活動の中で求められる教育課題といえるだろう。

ここでは、EXCEL を使ってこの仮説が正しいことを確かめる。EXCEL を使うと、数を総当たりし計算しても瞬時に確認出来る。

‘ 0 0 0 0 0 0 0 0 0

‘ 1 1 2 3 4 5 6 7 8 9

‘ 2 1 2 3 4 5 6 7 8 9

‘ ・・・・・・・

‘59 1 2 3 4 5 6 7 8 9

‘60 0 0 0 0 0 0 0 0 0

EXCEL には別の機能もあるがここでは数学的な手続きで行うことにする。それは、

E4 のセルに最初の 0, E5 に 1 があるとする、

E6 では ＝(E4+E5)―INT((E4+E5)/10)*10 とすると、0＋1＝1 が求まる、これを縦に、横にコピーしていけば、瞬時に計算が進む。

このあと、

‘ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

‘1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

として、‘ 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9

まですすめればよい。こうして 10✕10＝100 個の計算が短時間で終わる。 60 以外の数もあるが、みな 60 の約数となる。

次に「なぜこうなるのだろう？」という疑問がわく。

計算を数多くやっている内に、

偶数＋偶数＝偶数、奇数＋奇数＝偶数、

偶数＋奇数＝奇数、奇数＋偶数＝奇数、

との関係と何か関係がありそうだと言う見方が出てくる。

そこで、偶＋奇＝奇の視点から確かめてみる。

例えば、偶数は、0, 2, 4, 6, 8 の 5 個

奇数は、1, 3, 5, 7, 9 の 5 個

偶数＋偶数＝偶数 は、0, 2, 4, 6, 8 しか使わない。これで調べてみると、

0＋0（1 個）、2＋6, 4＋2、6＋8, 8＋4(4 個)

0＋2、・・・・8＋8、(20 個) しかないが、

偶数＋奇数＝奇数で行ってみると、

実際、6, 1, 7、、、から始まる例で調べると、

6, 1, 7; 8, 5, 3; 8, 1, 9; 0, 9, 9; 8, 7, 5; 2, 7, 9; 6, 5, 1; 6, 7, 3; 0, 3, 3; 6, 9, 5; 4, 9, 3; 2, 5, 7; 2, 9, 1; 0, 1, 1; 2, 3, 5; 8, 3, 1; 4, 5, 9; 4, 3, 7; 0, 7, 7; 4, 1, 5; 6, 1, 7 で偶、奇、奇の 20 パターンがあり、3✕20＝60 個の数が出てくる。ここで、その構成をさらに調べると、

6,1,7; 6,5,1; 6,7,3; 6,9,5; で 3 がない。

8,5,3; 8,1,9; 8,75; 8,3,1; で 9 がない。

0,9,9; 0.3.3; 0,1,1; 0,7,7; で 5 がない。

2,7,9; 2,5,7; 2,9,1; ,3,5; で 1 がない。

4,9,3; 4,5,9; 4,3,7; 4,1,5; で 7 がない。

となる。では 6, 3 から始めたらどうだろうか？

6, 3, 9; 2, 1, 3; 4, 7, 1; 8, 9, 7; となり、元に戻る。すべて前になかった数の組み合わせとなり、3✕4＝12 個 (60 の約数)

同様に、偶＋偶＝偶、奇＋偶＝奇、奇＋奇＝偶でやってみると、似たような結果となる。

こうした中、100 個の構成は以下のようになる。

0、0;(1 個)、0、5;5, 0;5, 5;(3 個)、2, 6;4, 2;6, 8;8, 4;(4 個)、1, 3;1, 8;2, 1;・・・9, 7;(12 個)、0, 2;0, 4;0, 8;・・・・8, 0;8, 2;8, 6;8, 8;(20 個)、0, 1;0, 3;・・・9, 8;9, 9;(60 個)と 60 とその約数からなっていることがわかる。

参考文献

町田彰一郎 「GIGA スクール・ICT 算数授業づくり ― 算数の「個別最適な学び」と「数学的活動・ICT の活用に向けて―数たちの隠された「還暦」―」 、新算数教育研究会「新しい算数研究 2022 年 12 月号」、東洋館出版社

2004年度　数学教育学会春季年会発表論文集

シンガポールの算数教科書

文教大学　　白石和夫
shiraish@koshigaya.bunkyo.ac.jp

概要：　シンガポールの算数教科書を入手し，その内容を日本との比較との観点で調べた。その結果，子どもの思考の流れを重視したカリキュラム設計がなされているとの確信を得ることができた。

検索語：　シンガポール　算数教育　カリキュラム　教科書

１　はじめに

シンガポールの算数教科書を入手することができた。シンガポールの算数教育は，瀬沼花子氏の論文[1]その他の文献で間接的に知ることができ，また，シンガポール政府文部省のホームページからシラバスその他の文書を取り出すことができるが，実際に教科書を読むことにより，日本との考え方の違いをより明確に知ることができた。本稿では，指導系統における相違に焦点を当てて考察する。

今回，入手した教科書は，1981年に初版が発行された国定教科書の1994年から2000年にかけて学年進行で改版された第3版である[2]。現在は複数の出版社から教科書が出され，また，この教科書の版元（Times Media）自身が別のシリーズを出してもいるが，入手した教科書の印刷は2002年，2003年に行われており，古くなったとはいえ，最近まで実際に使われ続けていると思われる。

２　シンガポールの教育制度

(1)　学校制度

シンガポールの初等学校は6年制であり，学齢的には日本の小学校と一致する。幼児教育も進んでおり，小学校入学前にある程度の内容は学習してきているものと思われる。

(2)　算数教育の目標

日本の学習指導要領に相当すると思われるPRIMARY MATHEMATICS SYLLABUS [3]から教科の目標を引用すると，

・生活のなかで出会う数学的な状況で，数，測定，空間に関する技能と知識を習得し応用する
・数学や他の教科の学習に必要な数学的概念や技能を習得する
・数学的な思考過程を説明することを含めて論理的な推論能力を，問題解決を通して数学的理由付けの能力を養う
・数学的な思考や議論を，正確に，簡略に，論理的に伝達するために数学的な言葉を用いる
・自信，楽しむこと，忍耐を含め，数学に対する肯定的な態度を養う
・パターンや関係などを含む数学の力と構造を評価し，知的好奇心を伸ばす

となっている。日本の学習指導要領における算数科の目標と比較すると，算数は他教科の学習に必要だから学ぶという姿勢が見られること，習得すべき技能の内容が，思考力，コミュニケーション能力など含め，具体的に書いてあることが注目に値する。また，情意目標を含む点は似ているが，日本では，「進んで生活に生かそうとする態度」であるのに対し，シンガポールは数学に対する肯定的な評価を持たせることを要求するなど，より踏み込んだ記述になっている。

３　算数教科書にみる指導系統

(1)　四則

① 1年

加減算を100までの範囲で学習する。加減算の指導系統は日本とはかなり異なる。引き算についてみると，まず,「24より１小さい数」を学習する。次いで，15－3，25－3のように繰り下がりの生じない場合を学ぶ。その後，31－2のように繰り下がりが生じる場合がでてくるが，それは，逆方向に数を唱えることで導入される。日本では，14－8のように減数が大きな数である場合を最初に学ぶのと対照的である。（しかも，15－3などは現行学習指導要領の範囲外である。）

加算と減算はほぼ平行して導入される。被加数，被減数の大きさではなく，加数，減数の大きさで指導順序が組み立てられている。加数，減数が大きい場合は乗除の後に学習する。

1年では乗数が2,3,4,5,6の場合の乗算が導入される。さらに，等分除と包含除の場合について除算を扱っている。除算の記号は出てこない。つまり，演算としての除算は出てこない。

最後に，1ドル硬貨が10セント硬貨10枚と両替できることなど，貨幣に関する学習がある。

② 2年

引き算で繰り下がりがある場合を本格的に学習するのは2年になってからである。2年の教科書では1000までの数について学んだ後に14－8のような引き算がでてくる。日本の教科書では14－8のような計算では減加法を示唆する挿絵があるのが普通であるが，シンガポールの教科書にはそのような示唆はない。

その後，繰り上がり，繰り下がりのない加減算を学び，その後，繰り上がり，繰り下がりのある加減算を筆算形式で学習する。

除算記号÷は2年で学ぶ。等分除の場合も包含除の場合も除算を用いることを扱っている。

乗算と除算はほぼ平行して学習する。乗算九九は2,3,4,5の段を2年で学習する。

③ 3年～5年

3年で，乗算九九の6,7,8,9の段を学習する。3年でも乗算と除算は平行して学習する。

4年で，一桁の数で割ること，10で割ることを扱う。割り算で除数が2桁の場合は5年の内容である。

(2)　分数

1年でhalvesとquartersが，2年で全体に対する割合としての分数とその表記が出てくる。3年では，同値な分数を扱っている。

4年では，倍数，因数，公倍数などの用語とともに，分数の加減を扱っている。異分母の場合も扱うが，一方が他方の約数の場合に限定されている。$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ のような場合は5年で学習する。

分数と整数の乗算は4年で,分数と分数の乗算は5年で学習する。5年では，分数を整数で割ることも扱う。しかし，分数を分数で割ることは6年の教科書にも現れない。

帯分数は5年で扱う。帯分数の加減も扱う。

(3)　比

日本では，比$a:b$は，a/bで定義され，後者を基準としたときの前者の相対的な大きさという見方が強調されるが，シンガポールの教科書では，全体においてそれぞれが占める割合という見方で導入されている。たとえば，3:5は，シンガポールでは，全体を3+5として，3/8と5/8としてみる見方が先に指導される。日本の教科書には現れない連比も最初から登場する。比が等しいことは，比の値が等しいことで定義するのではなく，それぞれを同じ数で乗じた場合に同じ比であるという考え方で指導されている。なお，比は6年の内容である。

(4)　小数

小数は4年で導入され，4年でその加減と整数をかけること，整数で割ることを学習する。しかし，分数の場合と同様に，小数をかけたり，小数で割る計算は小学校では扱わない。

(5)　関数・統計

グラフに関する扱いは日本と似ている。1年で1個が1個の絵に対応する絵グラフ，2年

で複数個を1個の図形で表現するグラフ，3年で棒グラフ，4年で表とグラフ（2次元表を含む），5年で折れ線グラフ，6年で円グラフを扱う。

パーセント，平均は5年で学習する。

5年で比率(rate)を扱う。たとえば，「5分で60本のシロップを詰める機械は1分では何本詰められるか？」など。線分図を利用して比例的推論を教えている。

6年では，比(ratio)とともに比例(proportion)も扱っているが，それをグラフにかくようなことはしていない。

(6)　文字式

シンガポールでは，文字式は6年で学習する。x^2やx^3のような指数表記や，$4r+3-2r$を簡略にするなどの文字式の計算も扱っている。

(7)　計量

三角形の面積は5年で学ぶ。円周率πや円の面積は6年である。平行四辺形の面積や台形の面積は扱っていない。

立体図形では，直方体の体積のみを扱う(6年)。水中に物体を沈めて水で置換して体積を測る物理的な手法を扱うが，円柱や錐体の体積の公式などは扱っていない。

(8)　図形

線対称は4年で扱う。平行四辺形，ひし形，台形の用語は5年で学ぶが，それらの図形について詳しく考察すること，たとえば，平行四辺形の対角線について調べるようなことはしない。三角形の内角の和は5年で扱う。

4　日本との比較

シンガポールの教科書には，算数的活動のための特別な教材が用意されてはいない。しかし，単なる暗記を排除して，算数の体系それ自体を子どもに作らせようとする意図を十分に感じることができる。

たとえば，かけざん九九は複数学年に分けてゆっくり習得させるようにしているし，機械的に「ひっくり返して掛ける」と覚えることになってしまいがちな分数の除算は中等学校の内容である。「なぜか分からないけれど，・・・すればいい」いう勉強の仕方に追いやるような内容の構成の仕方は極力排除しようとした構成のように思える。

シンガポールのシラバスにも日本の学習指導要領のように扱う計算の範囲に関する規制が存在する。しかし，日本の新学習指導要領のように原理・法則の理解に支障をきたすようなものではない。たとえば，シンガポールでは小数点以下の桁数の規制はあるものの1／1000の位まで扱うから，原理や法則の理解を妨げることはないであろう。むしろ，複雑なだけの計算を排除しようとしているように思える。

日本の数学教育では，中学校での文字式の理解が大きな関門である。シンガポールでは，文字式の導入を早め，早いうちから使い慣れることによって困難さを打開しようとしているのではないだろうか。

日本の新学習指導要領では比の値が削除され，そのことは大きな批判の的となった。しかし，比を比の値で定義するのは子どもの思考とマッチするのだろうか。日本では，比の具体例としてフレンチドレッシングの酢と油の混合比が具体例とよく用いられるが，比の値で比を定義する考え方では，醤油と酢と砂糖で味をつけるような場合は扱えない。むしろ，シンガポールの行き方のほうが自然なように思える。

シンガポールは最近の国際比較調査で算数の成績で世界一となっているが，子どもの思考を妨げない，無理のない流れを作ったことがその根底にあることを日本は学ばなければならないであろう。

参考文献

1）シンガポールの算数・数学教育，瀬沼花子，日本数学教育学会誌代83巻第12号，2001
2）Primary Mathematics　1 A～ 6 B Third Edition，Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education，Federal Publications (An import of Times Media)，1994～2000
3）Primary mathematics Syllabus http://www1.moe.edu.sg/syllabuses/
4）シンガポールの中等学校数学教科書，白石和夫・安仁屋杏子，数学教育学会2003年度春季年会

2004 年度数学教育学会　秋季例会発表論文集

海外の教科書を利用した小中学校教員の研修

文教大学　　白石 和夫
shiraish@koshigaya.bunkyo.ac.jp

概要　文部科学省サイエンス･パートナーシップ･プログラム事業の教員研修において，小中学校教員を対象として，シンガポールの算数・数学教科書を利用した研修プログラムを実施した。現職教員に外国の算数・数学教育に触れる機会を与えることができた。
　しかし，そればかりではなく，現職教員の活動を通して日本の算数・数学教育の特徴の一端を知ることができた。

検索語　教科書，教員研修，シンガポール，小中学校

1.　はじめに

2004 年 8 月 2 日，文教大学付属教育研究所を実施主体として, 越谷市教育委員会との連携により，小中学校教員を対象として「海外の数学教育に数学的活動を学ぶ」という表題のもと, シンガポールの算数･数学教科書を利用した教員研修プログラムを実施した。新学習指導要領で算数･数学科の目標に算数的活動，数学的活動の文言が追加されたことに鑑み, 海外の数学教育に触れることで, その意義を問い直すことを目指したものである。

2.　研修プログラムの内容

(1) 内容の選定

この講座では，シンガポールの算数･数学教育に的をしぼった。

シンガポールは，IEA の第 3 回国際数学理科教育調査(TIMSS)（1995 年)，および，その第２段階調査（TIMSS－Ｒ）(1999 年)で一位の成績を収めた国である。日本，韓国，台湾など東アジア諸国がシンガポールに続くトップグループを形成している。しかし，シンガポールに注目するのは, 単に数学得点が高いからだけではない。

1999 年の調査(TIMSS-R)において第８学年を対象とした調査で数学が好きまたは大好きと答えた生徒の割合が日本は 48%で，これは下から２番目である。韓国は下から 3 番目，台湾は下から 5 番めで，この 3 国はよく似た傾向をもつ。しかし，シンガポールは数学が好きまたは大好きと答えた生徒の割合は 79%で，これは参加国中第 9 位である。明らかに日本，韓国，台湾とは異なる。その秘密を探ることで算数・数学の授業の改善が図れないだろうか。そこで, シンガポールの教科書を日本と比較することで, シンガポールの数学教育の秘密に迫ってみることにした。

なお，以下，便宜上，Primary Mathematics を算数，primary school を小学校，secondary school を中等学校と書くことにする。小学校は 6 年，中等学校は 4 年（一部 5 年）である。

(2) 研修内容

この講座は 10 時から 16 時までの予定で実施した。本講座では，はじめにシンガポールの教育事情についてごく大まかに触れ, ついでシンガポールの算数･数学教科書の着眼点について簡単に解説，その後，参加者がグループに分かれて教科書を読み，その特徴を抽出して，最後に全体会で報告するという構成を採用した。

教育事情では，学校制度，特に小学校 5 年次から始まるストリーミングと呼ばれるコース制について触れ，また，“Thinking Schools, Learning Nation”という教育ビジョンがあることを紹介した。

シンガポールの算数･数学教科書の着眼点としては，カリキュラムの概要を中心に述べた。算数では，1 年で加減乗除のすべての計算を扱うこと，加算と減算，乗算と除算はそれぞれ対にして指導されること，乗算九九は 2 年と 3 年に分けて学習すること，小学校では分数や小数で割ることを扱わない，中等学校では関数の学習は，はじめはいろいろな関数を対象として広く浅く学び，その後，１次関数，２次関数，指数関数というように特化して深く学習させるなどの特徴があることをあらかじめ知らせた。

用意した教科書は，小学校が，シンガポール教育省著作の“Primary Mathematics Third Edition”である。シンガポールの教科書は，現在，複数の出版社から出されているが，この教科書はそれ以前の国定であった時代のもの（の改定版？）である。最近まで使い続けられているようで，印刷発行年は 2002 年，2003 年のものである。シンガポールの算数･数学の成績を世界一に導いた実績のある教科書として研究対象とする価値の高いものと考えられる。中等学校教科書は，PAN PACIFIC PUBLICATIONS 社の“Exploring Mathematics”の，Special／Express コース向きのものと，Normal（Academic）コース用のものである。この会社は，中等学校の各コースに対応した数学教科書を用意していることから，ある程度のシェアを持っているものと想定される。この教科書は，各学年の内容が textbook2 冊と workbook2 冊に分けられ，大部である。Workbook は単なるドリルではなく，単元の導入時の Activity もそこで行うようになっている。

参加者が小学校教員 12 名，中学校教員５名であったので，小学校教員を４名ずつ３グループに分け，中学校教員は５名で１グループとした。小学校は，低，中，高の 3 グループとした。

教科書の所蔵数の観点から定員を 16 名と定めたが，小学校と中学校のバランスの関係で小学校については教科書の割り当てが少なくなってしまった。また，参加者からはシンガポールの授業のビデオなどを見たいなどの要望があった。今回の講座は研究用資料を流用する形で行ったものであり，本格的に研修を行うためには，資料の充実を図らねばならないであろう。

3.　結果

(1)　算数教科書について

日本との比較で，次のような特徴が明らかとなった。

①シンガポールの教科書は日本と比べて地味である。特に，中学年以降この傾向が強い。
②シンガポールの教科書は内容が豊富である
③シンガポールの教科書は定理･公式が少ない
④シンガポールは日本より算数的活動が少ない。特に多様な考えを出すような活動がなく，考え方が一通りしか出ていない。
⑤シンガポールではパーセントの学習では「100 のうち」として学ぶ。
⑥シンガポールでは，線分図を多用しない。
⑦シンガポールの分数は割合分数である。
⑧シンガポールは教えやすいところから教える。

用いた教科書が 1 社のもののみであるので，これらがシンガポールの特徴と言ってよいかどうかは分からない。また，教科書を読む活動の時間が短かった関係から必ずしも的確な指摘とはいえないかもしれない。しかし，これらのことから日本の算数教育の特徴が見えてきたようにも思える。

日本では，パーセントの学習では，全体を 1 とみる見方が強調される。そして，線分図でその概念が説明される。しかし，シンガポールでは，100 個中の何個という概念をそのまま表現した挿絵でパーセントを導入している。

最大の相違は，日本のカリキュラムは，新しい概念が導入される際のギャップが大きいことである。シンガポールでは，教科書に算数的活動らしきものを見つけることが難しく，多くの場合，単刀直入に新概念が述べられている。しかし，カリキュラムの流れを見直してみると，

おそらく多くの生徒が自然にその考えに至っているであろうと推測できるものになっている。

また，日本では，千や万などに関する学習においても活動がはじめにあり，その後に表記の約束がでてくる。このあたりは，児童が優れた発想を出しても，世の中の約束に合わなければ無視せざるを得なえないところである。シンガポールの教科書では，そのような場面ではあまり持って回るようなことをせずに述べている。

日本では，多様な考えを児童が出し合い，議論する授業が尊ばれている。シンガポールの教科書からはそのような授業を想定することが難しい。実際，授業の 1 単位時間が 30 分と短く設定されていることから，日本のような授業の組み立てはなされていないとみて間違いないであろう。シンガポールの教科書から読み取れるのは，教師が説明して子供が問題を解くという古典的な授業である。

日本では，新概念の導入に際してギャップが大きいのが特徴で，そのために新概念が出てくると算数的活動を行っている。対して，シンガポールでは自然に流れるようなカリキュラムになっているので，大げさなことをやる必要がない。また，世の中の約束であるようなことは，活動させるのではなく，単純に教えればよいと考えられているといったことが推測できる。

(2) 中等学校教科書

中等学校教科書では，次のような特徴を見出すことができた。

①シンガポールの教科書は内容が多い

②シンガポールの教科書では数値を小数に直して答えとする

③シンガポールの教科書は平方根や三乗根の出現が早い

④シンガポールの教科書は具体的な応用が多い

小学校の場合と逆に，作業をするメンバー5人に対し textbook と workbook 合わせて 24 冊もあったため，十分に読むことができなかったようである。それでも，計算に関していえば日本よりもはるかに進んでいるといった特徴を捉えることはできていた。しかし，平方根を扱うにしてもそれをどう扱うのかといったようなところまで深く追求する時間的な余裕がなかったのが残念である。

4. 最後に

小中学校教員を対象とする研修講座を開設することは，小学校教員の意識を知る上で有用であった。日本の算数科教育では，1 時間の授業を問題解決から始め最後に練り上げというように児童に議論させながら進める授業のやり方が一般化している。日本の教師はそれがよいものだと強い信念をもっているように思えた。それにもかかわらず日本が国際比較調査で特に，算数・数学の浮き嫌いのような情意的な側面でシンガポールよりよい結果を出せなかったのはなぜだろうか。その裏には，やはりカリキュラムの流れの問題があるのではないだろうか。日本のカリキュラムは流れが児童の自然な発想に即していないように思う。日本の小学校教師の言葉「シンガポールは教えやすいところから教える」から，今の日本の教師がいかに苦労して算数を教えているかをうかがい知ることができる。しかし，実際には苦労して教えることよりも，子供が自分で考えてできることからやらせていくのが，結局，子ども自身で考えることにつながるのではないだろうか。

参考文献

1）シンガポールの算数・数学教育，瀬沼花子，日本数学教育学会誌代83巻第12号，2001

2）Primary mathematics Syllabus http://www1.moe.edu.sg/syllabuses/

3）シンガポールの中等学校数学教科書，白石和夫・安仁屋杏子，数学教育学会2003年度春季年会

4) ンガポールの算数教科書，白石和夫，数学教育学会2004年度春季年会

2005年度　数学教育学会春季年会発表論文集

求差の指導に関する国際比較

文教大学　　白石和夫
shiraish@koshigaya.bunkyo.ac.jp

概要：　各国の算数教科書について，求差の指導について比較考察した。
日本では，求差は小学校1年の引き算の学習において不可欠な内容とみなされているが，世界的視野で見ると，必ずしも，そうではないことが見出される。

検索語：　算数教育　カリキュラム　求差　教科書

1　はじめに

シンガポールの新課程算数教科書を入手した。シンガポールでは，2001年から学年進行で新カリキュラムへ移行している。2005年度は5学年までが新課程に移行する。新課程では教科書は複数社から刊行されているが，今回，入手したのは，Times Mediaの一部門であるFederal Publicationsの「My Pals are Here!」シリーズの第1学年から第5学年までの算数教科書と練習帳である。

この教科書は，版元がFederalであることから，従来の国定教科書を継承するものと想定できる。また，米国における販売元の宣伝文句を信じれば，半数を超えるシェアを取っているものであるらしい。

この教科書を読んでいく過程で，求差の場面が3年になるまで現れないことに気づいた。

2　求差について

(1)　求差とは

求差は，「男の子が5人，女の子が3人いるとき，男の子は女の子より何人多いか」のように，2量の比較の場面で用いられる引き算である。

日本では，求差の指導は，1年生の算数の内容として重要な指導内容と認識されている。子供にとっては意味的に難しい内容で，算数指導の一つの急所として考えられている。

求差の本質は，比較にある。2量の大小を比べるのに，差を考えるのが求差である。普通，引き算は足し算の逆算であるが，求差の引き算はたし算の逆算ではない。

(2)　求差は難しい

求差の難しさは，よく認識されている。たとえば，『認知心理学から見た数の理解』[i]に，

問題１　6－2＝
問題2　りんごが６こあります。
　　　みかんより２こ多くあるそうです。
　　　みかんはなんこあるでしょう。

では，2年生や3年生でも間違える子供が比較的多いという記述が見られる。

片桐重男氏は，『算数教育の新しい体系と課題第3巻数学的な考え方を育てる「加法・減法」の指導』[ii]において，「ひき算は，特に差を求めるひき算が難しい。そのために，例えば，1960年代のイギリスのNMPという研究団体では，このひき算を，残りを求めるひき算より1年近く遅らせようということを主張していたくらいである。」と述べている。

難しさは，認識されていたが，具体的な解決の方策が取られてきてはいない。平成11年の学習指導要領改定でも，第1学年の内容に「加法および減法が用いられる場合について知り，･･･」とあり，文部省発行の解説書には，

減法が用いられる場合のなかに求差が含まれることが明示され，指導体系は従来と比べて変化していない。

３　シンガポール算数における求差

(1)　シンガポールの算数シラバス

シンガポールは日本と同じく6歳入学である。したがって，シンガポールと日本の学年次は同じと考えてよい。

シンガポール教育省が公開している算数シラバスで関係する項目を見てみよう。

整数の比較と順序は1年の内容である。一対一対応の概念や「いくつ多い，いくつ少ない」なども1年の学習内容となっている。数を大きさの順に並べることも学習する。

引き算では，加法と減法の意味を扱い，さらに，20以下の2数について，どちらがどれだけ大きい(あるいは小さい)か示して比較することが留意事項として掲げられている。

1年の測定の内容としては, 任意単位による測定が扱われている。ただし，長さ，かさの差は除くことになっている。

「和」,「差」という用語を扱うのは3年である。

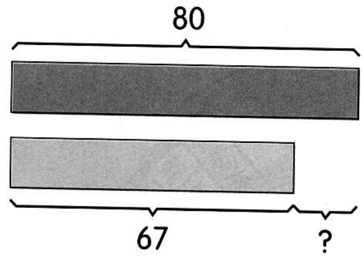
(2)　シンガポールの算数教科書

1年の教科書で，２つの整数を比較して，どちらがどれだけ大きいかという題材は扱われている。ただし，それは，引き算の学習より前に位置していている。引き算を学習した後では，その題材は扱われていない。つまり，引き算と差を結び付けるようなことはしていない。引き算の具体例は，取り去るという意味での引き算，あるいは，足し算の逆算になる問題しか扱っていない。

この扱いは2年にまで引き継がれる。2年の教科書のはじめに加法と減法が出てくるが，そこでの，最大の眼目は，whole－part, part（全体と部分）の構造の理解である。つまり，求差は出てこない。

2年では, 長さの比較が出てくる。そこでは, たとえば，10cmの帯は9cmの帯よりどれでけ長いかという比較の問題が扱われている。そこで，足し算をするのか，引き算するのかを考える課題が与えられている。しかし，長さの差を引き算で求めることはあっても，引き算を用いてものの個数の差を求めるような問題は見られない。

3年になると,「差(difference)」という用語を学習する。そして，次図のようなダイアグラムが初めて登場する。



練習帳には，１年でも求差の問題と取れる内容が問題として載っている。ただし，解き方は記されていないから，必ずしも引き算で解決するとは限らないであろう。

なお，以前の国定教科書（Primary Mathematics third edition , Federal Publications）では，求差は2年で扱われていた。

４　米国の算数教科書における求差

(1)　NCTMスタンダード

米国において影響力を持つと思われるNCTMスタンダード[iii]を読むと，低学年(K-2)の指導で数については，それなりのページ数を割いて記述しているにもかかわらず，数の全体と部分に関する構造の理解を超える内容についての記述は見られない。

(2)　米国の算数教科書

米国の学校教育は多様で，教科書も一様ではないから，米国の典型的な算数教科書を特定するのは困難であるが，とりあえず手近にあった教科書のうち，比較的新しい４社のテキストについて分析した。

1999年刊行のHoughton Mifflin社のMath Centralには，求差に相当する例が出てくる。6個のカタツムリと4個の星を対応させて，カタツムリが2個多いことを6－4＝2と表

現している。この教科書では，連接ブロックを多用している。引き算は，連接ブロックから一部を取り去ることで導入されるが，すぐに2列の連接ブロックの個数の違いを求めるための引き算が導入される。

残りの3つのテキストは，2003年刊行のEvan Moor社のBASIC Math Skills，2004年刊行のAmerican Education Publishing社のTotal MATH，1999年刊行のSilver Burdett Ginn社のMathematics the path to math success! であるが，これらには，求差にあたる例がない。Silver Burdett Ginnは連接ブロックを多用するなどHoughton Mifflinとよく似た体裁を持つが, ブロックを2列に並べて差を求めるような例を持たない。

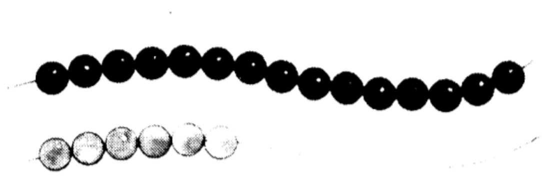
5　英国

(1)　National Curriculum

英国のNational Curriculumはオンラインで公開されているivが, 日本の学習指導要領の「減法が用いられる場合について知る」に相当するような内容を見出すことはできなかった。

(2)　英国の算数教科書

英国は5歳入学である。1995年改定のGinn Mathematics では，1年から3年まで求差にあたる内容を見出すことはむずかしい。引き算は取り去ること，分けることと，数直線上の移動が主な主題である。ただし，2年のWorkBookに次のような挿し絵があり，求差を連想させる。ただし，これ以外には求差を連想させるものはない。



$15 - 6 = \boxed{9}$

6　ドイツ

2000年刊行のDas Zahlenbuch（数の本）（Ernst Klett Grundschulverlag社）は，求差を扱っていない。ただし，このテキストは新傾向の教科書として紹介されたであるから，これがドイツ一般の傾向であるかどうかは判断できない。

なお，1993年刊行のDenken und Rechen（werternman社）のバイエルン州版にも，求差にあたる引き算は見られない。

7　終わりに

求差は，数の概念の獲得にとって不可欠な内容ではない。世界的に見ると，教科書によってはまったく触れられていないことは，そのことの裏付けとなるだろう。

平成11年の学習指導要領改定では，大なたをふるい，数の演算の概念の理解にとって不可欠と思われるような内容までも削除された。しかし，求差のように，数の構造の理解の観点からすれば逆にノイズにもなりかねない内容が残されたのはなぜだろうか。

参考文献

i) 吉田甫・多鹿秀継編著 :『認知心理学からみた数の理解』第4章 低学年の文章題(p.84)，北大路書房，1995
ii) 片桐重男 :『数学的な考え方を育てる「加法・減法」の指導』(算数教育の新しい体系と課題3)，第4章 減法演算の意味，p.54，明治図書，1995
iii) 筑波大学数学教育学研究室翻訳 : 新世紀を開く学校数学，2001（原著は，Principles and Standards for SCHOOL MATHEMATICS, National Council of Teachers of Mathematics, 2000）
iv） http://www.nc.uk.net

2008 年度数学教育学会 秋季例会発表論文集

比の概念の指導系統について

文教大学教育学部　白石和夫
shiraish@koshigaya.bunkyo.ac.jp

概要：　日本の算数における比の指導は，一方の他方に対する割合の概念に根拠を置く。しかし，比を共通のある量に対する倍数となる２数の対の同値類して理解すると，比例を根拠にして割合を統一的に扱うことが可能になる。この視点から，シンガポールの算数を主な比較対象として，比の指導系統について考察する。

検索語　比，比と比例，割合，算数

1.　比とは何か

(1)　比と比例

比の概念は比例と密接な関係を持つ。変量 x, y が比例関係にあるとき，定数 a, b があって，$x=ta$，$y=tb$ となる(0 でない)定数 t が定まる。比 $a:b$ は $\{(ta,\ tb)|t\neq 0\}$ が作る同値類である。つまり 2 数 a，b について，$(2a, 2b)$，$(3a, 3b)$，$(4a, 4b)$，……の総体が比 $a:b$ である。

(2)　比の概念

しかし，日本の算数では，比 $a:b$ が表すものは分数 a/b である。平成 10 年の学習指導要領改定で小学校で「比の値」を学習しないことになった。それ以前の教科書では比が等しいことの意味は比の値が等しいことであった。

平成 10 年以降の教科書では，比の値に基づかない比の概念の指導に転換するものと期待したが，その期待は裏切られた。たとえば，ある教科書では，比とは $a:b$ の形に表した 2 量の割合のことであるとされている。比が等しいことの定義はない。たとえば, この教科書には，比を定義したすぐ後に「はがきのたては 148mm，横は 100mm になっています。たてと横の長さの割合を比で表しましょう。」という練習問題が載っている。

(3)　比の値に基づかない比の概念

比の値に基づかない比の概念は，たとえば，次のような場面に現れる。大さじ 2 杯の酢と大さじ 3 杯のサラダ油で作ったドレッシングの味は, 同じ手順で作った別のドレッシングと混ぜても変わらないはずという経験に基づく知識から，それぞれを倍量にし，大さじ 4 杯の酢と大さじ 6 杯のサラダ油でドレッシングを作っても同じ味になることがわかる。同様にして, 酢の量を n 倍したとき, サラダ油の量を n 倍したレシピも同じものであるとみなせる。

また, 単位を変えて計測する場合にも同様の現象が起こる。ドレッシングの問題では，大さじの代わりに小さじを用いて, 小さじ 6 杯の酢と小さじ 9 杯のサラダ油で作ったドレッシングは, 大さじ 2 杯の酢と大さじ 3 杯のサラダ油で作ったドレッシングとまったく同じものになる。計量時の単位の選び方は本質的なものではないのだから，2 : 3 と 6 : 9 は同じ内容を表すと考える見方が出てくる。

つまり，2 数の対には，一方を k 倍したとき他方も同様に k 倍すれば同じ意味になる場合があり，その場合に，ka と kb が表す相対的な関係を「$a:b$」で表し，さらに，一方を k 倍したとき他方も同様に k 倍すれば同じ意味になる場合にその 2 数の関係を「比」と呼ぶと定義するのが自然であろう。

たとえば，野球の試合の結果の「9 対 3」は,「3 対 1」と言い換えることをしないから，これは比ではない。はがきの問題は，74 : 50 でも 37 : 25 でもいいということを指導する意図があるのならば不適切とはいえないが，148 : 100 という答えを期待するのであれば，上に述べた意味での比の概念とは異なるものが指導

対象とみなされていると考えてよいだろう。

なお，この見方で定義される比の概念では，*a*, *b* は同種の量である必要がない。たとえば，6km : 2 時間 と 12km : 4 時間 は等しい比である。つまり，同種の量の割合を考える場合だけでなく, 異種の量の割合を考える場合にも適用可能な概念である。

さらに，$a : b : c$ のような連比の概念も，自然な拡張として出てくる。しかし，比の値に基づく比の概念からは連比の概念は導かれない。

2.　日本における比の指導系統

(1) 比の概念

日本では，比 $a : b$ が表すものは分数 $a／b$ であることを暗黙の仮定とした指導がなされている。比 $a : b$ において，*b* を基になる量，*a* を比較する量という。それにともなって，比の値を *r* とするとき，$r＝a÷b$，$a＝b×r$，$b＝a÷r$ という比の 3 用法が重視される。

(2) 日本における比の指導系統

平成 10 年学習指導要領では，5 年で百分率を学び，6 年で異種の二つの量の割合（単位量あたりの大きさ，速さなど)，比と比例を学習する。平成 20 年学習指導要領では，異種の二つの量の割合は 5 年に移されている。

つまり, 百分率や速さのような基準とする量に対する比率を学んだ後に, その学習の基礎の上に立って比を学ぶのが日本の算数だと考えられる。

3.　シンガポールの算数では

(1) 2001 年版シラバスにおける指導系統

シンガポールでは, 5 年で比率(rate), 百分率, 比(ratio)を，6 年で速度，比と比例，円グラフを学ぶ（2001 年版シラバス）[1]。

実際の教科書の流れでは,

5 年 Ratio → Rate → Percentage

6 年 Ratio and Fraction →Ratio and Proportion → Percentage → Speed → Pie Charts

のようになっている [2]。

つまり，単位量当たりの考えを学ぶのは，比を学んだ後になっている。

(2) 比の導入

次いで，詳細を述べる。5 年用教科書の Rate の章の最初のページでは，Ratio の用語と $a : b$ の記法が導入される。*a* と *b* を入れ替えたときに逆になることに注意を向けさせている。

2 ページ目では，12 個入り鶏卵 2 パックと 12 個入りうずら卵 3 パックを見せて鶏卵とうずら卵の個数の比を 2 : 3 ということを指導している。日本の場合と異なり，それは子供が考えるべき内容ではない。

3 ページ目では連続量が扱われる。2kg の鶏肉と 9kg のラム肉が出てくる。4 ページ目にかけて単位を変えた場合に比が変わらないことを扱っている。

比の章の第 2 節では，等しい比（Equivalent Ratios）を扱う。比の前項と後項，それぞれに同じ数をかけても, 割っても同値な比であることを学ばせようとしている。

また，全体を 2 つに分けるとき，全体が *n* で一方が *a* であれば，残りの部分との比は $a : n-a$ であることを扱う。ただし，部分と全体の比は現れない。

第 3 節は，Word problems(1)。

第 4 節は，3 量の比較 (連比) である。比を，各項の値に同じ数をかけたり, 同じ数で割ったりしても同じとして導入することで, 自然に連比に拡張できている。

第 5 節 Word problems(2) は, 連比の応用問題。

(3) Rate（比率）

比を 5A（5 年上巻）の教科書で学んだ後，少し間をおいて 5B(5 年下巻)で Rate（比率）を学ぶ。日本でいう異種の二つの量の割合に相当する内容を扱う。最初の例は，3 分で 24 本のミネラル水を充填する機械が 1 分で充填する本数を求める問題である。

ここでは, 比のところで学習した比較対象の 2 数を同じ数で割る考え方が利用できる。

(4) 百分率

百分率は Rate に引き続いて学習する。（１）と（２）の 2 章に分けられている。

（１）では 100 を分母にする分数としての扱いの習熟に割かれている。分母が 4 や 20，50

などの扱いやすい数の場合について分母を100に変えることが主な指導内容である。

（２）では，比の第２用法（$a=b\times r$）と比の第１用法（$r=a\div b$）を扱う。日本では百分率の学習で重視される比の第３用法（$b=a\div r$）に該当する内容は現れない。また，日本の教科書に現れる「くらべる量＝もとにする量×割合」のような言葉の式も出現しない。

（２）の章で扱われるもう一種類の内容は，ある２量が全体に占める割合が a%，b%であるとき，残りが$(100-a-b)$%になるという性質である。

また，（２）では消費税，値引きや，利息など，生活に密着した内容も扱われている。

(5) 6 学年での指導内容

6学年では，比と分数，比と比例を扱う。比と分数, 比と比例は両者合わせて１章をなしているので，分量的には軽い。

まず，初めに学ぶのが，構成比が $a:b$ であるときに, それぞれが全体に占める割合である。

次のステップで, 比を用いた表現と分数を用いた表現の相互変換（言い換え）を学ぶ(Three fraction statements という)。たとえば,

①鶏卵の個数とダチョウの卵の個数の比が 4:7

②鶏卵の個数はダチョウの卵の個数の$\frac{4}{7}$

③ダチョウの卵の個数は鶏卵の個数の$\frac{7}{4}$

を相互に言い換える練習を行う。これは，連比の場合にも, 分数形式の場合には２者の比較であるが，適用される。

これは見方によっては比の値であるが，$a:b$ の一方を固定し, 一方を基準にする見方とは対極的な行き方である点が注目に値する。

次の節は Word Problems であるが，全体量を与えておいて比例配分する問題，たとえば，3辺の長さの比が 3 : 4 : 5 の直角三角形で３辺の長さの和が 128cm のときの各辺の長さを求めることなどが扱われている。

第３節は比と比例であるが,「同じ比を持つ２量は比例するという」という定義を採用している。

速度では，比例関係を利用して，日本でいうところの比の 3 用法のすべてが指導される。「 Time = Distance ÷ Speed 」という言葉の式も現れる。

(6) 2007 年版シラバス

シンガポールでは，2007 年にシラバスの改定があった。シンガポールでは日本の高等学校のように入学年次によってカリキュラムが決まる。だから，教科書はまだできていない。

2007 年版シラバスでは, 5 年の内容から Rate がなくなっている。6 年の内容として Speed はそのまま残されているから, 異種の二つの量の割合の典型としての速度に Rate に関する学習内容の集約を図ったのであろう。

4.　結語

シンガポールは, 比の概念のもとに割合指導全体を一貫した考え方のもとに展開するカリキュラムにしようと考えているように思える。教科書を見る限り, 日本では必ず指導される一方をそろえて他方を比較する考えはまったく扱われていない。そして，一方を単位として他方を数値化する考えについては，指導系統上,後方に位置するものとして考えられている。

日本で重視される一方を基準として他方を比較する考え方は, 多様な考えを生み出す方略指導としてはおもしろいが, 現実の問題に対処する際には, むしろ思考の一貫性が必要とされる。その点で，シンガポールの割り切り方は,算数教育の指導系統を研究する際に比較検討対象とする価値を持つものといえるであろう。

なお，実践研究においても，割合指導における比例の見方の重要性を指摘するものがでてきていることを補足しておく [3, 4]。

引用・参考文献

1　http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-primary-2001.pdf

2　My Pals are Here! Maths 5A/5B/6A，Marshall Cavendish Education，2006

3　土屋利美，比例の見方を用いた「割合」の実践指導，日本数学教育学会誌 84 巻 8 号，2002

4　新 井 仁，比が先か？比例が先か？，http://www.janis.or.jp/users/hitoshia/math.htm

シンガポール算数の「比」再考

文教大学教育学部　　　　　白石和夫

E-mail：shiraish@koshigaya.bunkyo.ac.jp

概要：日本では「比」は，比べられる量の基準量に対する割合として導入される。一方，シンガポール算数教科書の「比」(ratio)の扱いは数学の視点から見ると同値類に相当する。米国，英国，オーストラリアなどと比較し，初等教育においては，シンガポールの考え方はかなり独特なものである。

検索語：比，比の値，シンガポール

1.　はじめに

2008 年度秋季例会における発表「比の概念の指導系統について」においてシンガポールの算数における「比」の扱いについて報告した。その考え方の起源はどこにあるのだろうか。大きく影響を与えたであろう英国やその他いくつかの国の教科書について調べてみたが，その起源と思えるものを見出すことができなかった。その結果，その展開は，やはり，かなりユニークなものであることが見えてきた。

日本の算数では，比の値が復活している。しかし，比の値をもとに比を定義することが比を理解しやすいものにするとは思えない。ここで，再度，シンガポールの比に注目してみたい。

2.　比とは何か

2.1.　比の概念

我々の考える比とはなんだろうか。2 数の組 a_1，b_1 と a_2，b_2 に対し，

$$a_1 = n_1 a,\ b_1 = n_1 b\ ,\ a_2 = n_2 a,\ b_2 = n_2 b$$

となるような 2 つの自然数 n_1，n_2 が存在するとき，a_1，b_1 と a_2，b_2 は比が等しいといって，その同値類を $a_1 : b_1$ のように表すというのが，普通の理解のように思える。たとえば，

12=3×4，8=2×4，16＝4×4，12＝3×4

だから，12：8＝16：12 である。

この考え方の利点は，自然に連比に拡張できること，2 数の相対的な関係を直接的に（比の値によって）述べる必要がないことである。だから，たとえば，a_1 と b_1 は同種の量である必要もない。ただし，a_1 と a_2，b_1 と b_2 は同種でないと困るかもしれない。

比の操作として習得すべきことは，比の各項に同じ数を掛けた場合，あるいは，同じ数で割った場合に比は等しいということである。

純粋に理論的な見地から欠点を述べれば，n_1，n_2 の部分を自然数に限定してしまうと，$1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2$ のような比が扱えないことである。しかし，比の導入は，自然数で行い，学年が進んでから n_1，n_2 の部分は実数に拡張して考えるようにすることに特に障害があるとは思えない。

比を用いる場面として相似図形は重要である。△ABC を k 倍に拡大した図形が△A'B'C'であるとき，各辺の長さが k 倍されることから

$$A'B' = kAB,\ B'C' = kBC,\ C'A' = kCC$$

であるから，

$$AB : BC : CA = A'B' : BC : CA$$

である。

相似図形では，一方が他方の拡大・縮小であるととらえるのが通常と思われる。その観点からすると，比を同値類としてとらえることは自然なことのように思える。

2.2.　比例との関係

上に述べた比の定義は，比例する 2 量の比は等しいといっているのと同義である。この考え方は，比に関係した議論をわかりやすくするの

に有効なものと思われる。

車が同じ速さで走り続けるとき，走る時間と走行距離とは比例関係にある。だから，

1 時間：40km＝2 時間：80km

といった類の比例式が成立する。比の各項に同じ数を掛ける，あるいは，同じ数で割る操作を通して，1 時間に 40km 走る車で 3 時間走ったら何 km 走るか，4 時間で 160km 走る車は 1 時間では何 km 走るか，1 時間に 40km 走る車で 80 km 進むためには何時間かかるかなどの問いに答えることができる。

同じ数を掛ける，あるいは，同じ数で割ると等しい比であるという性質から，x と y が比例するとき，$x : y = 1 : \frac{y}{x}$ という関係が導かれる。

$x=1$ のときの y の値を a とすると，

$$x : y = 1 : a = x : ax$$

となることから $y=ax$ が導かれる。

2.3. 割合

比の性質を利用すれば，割合の問題はむずかしくない。たとえば，□円の 15%が 30 円だったとすると，□：100＝30：15 なのだから，15 が 30 になるように各項を 2 倍して，□：200＝30 : 30 から□＝200 が得られる。15 に何を掛けたら 30 になるか求めるのは割り算であるが，この場合の割り算の意味は掛け算の逆算でよい。

3. シンガポール算数の「比」

3.1. 比の導入前

シンガポールでは，比（ratio）は 5 年の内容である。4 年で「20 の$\frac{3}{4}$」のような割合としての分数を学んでいる。5 年で分数の加減乗除を学び，それに引き続いて比を学ぶ。

Discover Maths 5A[1)]の分数の章では次のような問題を扱う。

図書室の本の $\frac{1}{8}$ がタミル語，$\frac{1}{4}$ が中国語で，残りの $\frac{3}{5}$ が英語の本である。英語の本が 540 冊のとき，図書室にある本は全部で何冊か。

通常の計算で英語の本が全体の$\frac{3}{8}$ であることがわかるから，この問題は，英語の本 540 冊あって，全体の$\frac{3}{8}$ であるとき，図書室の本の総数を求める問題になる。日本の算数だと，1 にあたる数を求める問題だから，割り算を用いて，$540 \div \frac{3}{8}$ と式を立てて計算する局面であるが，シンガポールの教科書では，3 に対応する数が 540 だから，1 にあたるのが 540÷3＝180，なので，8 に相当する数は 180×8=1440 のように導いている。

3.2. 比

日本の算数では，比は，一方の他方に対する割合の表し方であるが，シンガポールでは 2 数（あるいは 3 数）は対等なものである。

たとえば，Discover Maths 5A の比の章は，2 袋のオレンジと 3 袋のオレンジがあって，各袋の果物の個数が同じとき，オレンジの袋の数とリンゴの袋の数の比は 2 : 3，リンゴの袋の数とオレンジの袋の数の比は 3:2 という表現の導入で始まる。袋の中の果物の個数が等しいことは，等しい比の定義への伏線のように思えるが，そのことへの言及はない。重視しているのは，順序を逆にすると比も逆に言うことの徹底で，たとえば，小麦粉が 3kg，米が 8kg のとき，小麦粉の重さと米の重さの比は 3:8 であると提示して，米の重さと小麦粉の重さの比を答えさせている。

比と割合の関係を示唆する問として，次のようなものが現れる。

K 君の身長が M 君の身長の$\frac{3}{5}$ であるとき，K 君の身長と M 君の身長の比は何か？

続いて，比が等しい場合を学習する。6：12 を例として，2 個，3 個，6 を単位として考えることで，6：12＝3：6＝2：4＝1：2 を例示し，同じ数で割ったものは等しい比であるといっている。そして，この手順を用いて，次の□を求める問題を解くように求めている。

2：7＝6：□

□：5 ＝ 6：30

この後，3 数の比を学ぶ。2 数の比と同様に 3 数の比を扱うことができる。

3.3. 比率(rate)

2007 年より前のシラバスに基づく教科書では 5 年の教科書で比率を扱っていた。比の章では同種の量の比を扱うのに対し，この章では，異種の量の比に相当する内容が扱われていた。

2007 年版のシラバスでは rate は扱われず，代わりに 6 年で速さが入っている。Discover Maths

の教科書では，日本の学習塾でのやり方が紹介されている。おそらく，時間数の制約による内容の精選が理由であるが，以前の rate の扱いがなくなっている。

3.4.　相似な図形

シンガポールの中等学校教科書[2)]では，△ABC を k 倍に拡大した図形が△A'B'C'であるとき，

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}=k$$

としている。最近のテキスト[3)]では，

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}$$

のみになっているが，考え方は同じであろう。

4.　諸外国の教科書にみる「比」

4.1.　米国における「比」

アメリカの算数教科書では，$a:b$ は $a／b$ と同じものとして扱われていることが多い。英語では $a:b$ も $a／b$ も同じ順に読まれるから，比とは比の値のことであるという定義で問題がないのかもしれない。

初等教育教員向けの数学教科書[4)] では，比は $a:b$ あるいは $\frac{a}{b}$ で表されるとなっていて，比は分数で表されるものと考えていることがうかがえる。

NCTM が発行する教師用参考書[5)]では, 2 量を比較するのに対し差を取る方法と対比させて，比は 2 量の乗法的比較であるといっている。つまり，2 量 a，b に分数 $a／b$ を対応させて 2 量を比較したものが比である。後の学年で学ぶ連比 $a:b:c$ も比であるが，分数の形には書けないとも述べている。

NCTM 2002 YearBook「Making Sence Of Fractions, Ratios, and Proportions」では，比と直線の傾きの関係が議論の対象になっているが，相似との関係は議論の対象となっていない。

NCTM 2002 YearBook において，　Smith[6)]は，a/b の形式が比と分数を表すと述べている。このことから，おそらく，米国における専門的研究者は比を基準量に対する比較量の相対的割合であると理解しているように判断できる。

4.2.　英国での「比」

英国は，シンガポールの旧宗主国で，シンガポールの教育に影響を与えた可能性があり，調査してみる価値がある。School Mathematics Project（Cambridge）の教科書　SMP 11-16 R1（1990）では，a は b の何倍というときの倍の数（乗数）のことであるとしている。比の性質の説明では，分数の形で，分母と分子に同じ数をかけても変わらないことを述べている。ドリルの問題では，2 量の順序を逆にした場合の表現の違いに注目させている。しかし，連比につながるような配慮は見られない。サンプルは十分ではないので，断定はできないけれども，英国式の算数がシンガポールの比の扱いに影響を与えたようには見えない。

5.　結語

日本語では分数は分母を先に読むから，$\frac{b}{a}$ は $a \backslash b$ と書かれるべきであろう。また，日本語では，「□を基準として□を測る」というように基準が先に来る表現のほうが普通である。だから，a を基準にして b を測ったときの相対的割合を $b:\ a$ で表そうというのは混乱の元である。

もし, 中国語でもこの事情が同じだとしたら，シンガポールの人たちは，昔，中国語で教えていた時代に今のやり方を始めたのではないだろうか。この仮説は検証してみる価値があるように思う。

引用文献

1) Discover Maths 5A textbook, Dr Lai Chee Chong 他, Panpac Education Private 2008
2) New Syllabus mathematics 3, Teh keng Seng 他, Shinglee 2001
3) Mathematics matters express 3 textbook, Sin kwai meng 他，Panpac Education 2007
4) Mathematics For Elementary Teachers　10th edition, Gary L. Musser 他，Willy 2014,　p274~275
5) Teaching with Curriculum Focal Points Focus in Grade 6，National Council of Teachers　of mathematics 2010
6)　The Development of Students' Knowledge of Fractions and Ratios, John P. SmithⅢ，NCTM 2002 yearbook pp.3-17

2005 年度数学教育学会 春季年会発表論文集

正規分布に言及しない統計教育の可能性

文数大学教育学部　白石和夫
shiraish@koshigaya.bunkyo.ac.jp

概要：高等学校の統計的推測に関する領域は，長い間，正規分布と，正規分布に基づく標本平均の推定から構成されてきた。しかし，正規分布に依存する理論は生徒が数学的活動のなかから見出して構築可能なものではない。コンピュータが利用可能な今日では，2 項分布が精密に計算できることを出発点とした，検定を軸とする統計的推測の教育への転換を目指すべきであろう。本稿では，その可能性について議論する。

検索語　高等学校数学，統計教育，統計的推測，正規分布，2 項分布

1.　課題の設定について

新しい知識を生み出す力を高めることが, 今日の学校教育の重要な教育課題である。そのためには, 日々の学習の積み重ねが新たな知識を生み出す源泉となるようにカリキュラムが構成されなければならないであろう。また，数学は, コミュニケーションのための基盤としての性格ももっている。カリキュラム研究においてはその観点も欠かせない。

筆者は, 学習指導要領レベルでの数学科の教育課程設計においては, 次の観点から改革を進める必要があると考えた[i]。

① 生徒自身の力で発展させうる流れとする。
② 現実の問題から数学的構造を抽出し, 現実の問題を解決することを目的に理論を作る。
③ 生徒自身の手で知識を増やしていく。
④ 学習内容を標準化する。
⑤ 学習内容を集約する。
⑥ 一般から特殊へ。

①～③は，数学的活動によって，問題に共通する数学的構造がみえてくる。そうすることで, 次の段階に進んだとき,それは，生徒自身が見出した，あるいは，作り出した概念であるとして, 学習を進めていくことができるようにしたいというのが趣旨である。⑤については，まとまりのある学習とするためには, どこで区切るか, その区切りを適切に定めなければ上述のことが実現しないことも合わせて考える必要がある。

なお，ここで，⑥の原則は一般論を初めに展開し, その応用として特殊を扱うという意味ではなく, 広い適用範囲をもつ方略を先に指導しようという意味である。

本稿では，これらの観点から，高等学校における統計教育の改革について考察を試みたい。

2.　　現行統計教育の問題点

(1) 学習指導要領における扱いの変遷

昭和 54 年改定以前の学習指導要領では，統計領域は数学Ⅲの一部であり, 微積分との関連は密接であった。しかし，そうはいっても，正規分布を理論的に扱うことは困難であった。昭和 45 年告示の学習指導要領では，数学Ⅲの確率・統計領域において，(1)確率分布の目標が「母集団と標本の考えおよび確率分布の意味を明らかにし, 二項分布と正規分布について理解させる」とあり，さらに，(2)統計的な推測では, 推定と検定を扱っていた。しかし, 推定, 検定に際し用いられる正規分布の性質はほとんど何も証明されることなく, 結果のみが教えられていたのが実態である。

昭和 53 年告示の学習指導要領で,「確率・統計」が独立の科目として設置され，積分との関係が断たれた。しかし，正規分布は指導内容として残され，また，「統計的な推測の考え」として，推定と検定も残された。

平成元年改定の学習指導要領において, 統計は数学 C の一領域となった。資料の整理において，相関を扱うことになり，相関係数が高等

学校の内容として指導されることになった。一方，検定が指導内容からはずされ，推定のみを扱うこととなった。

平成 11 年改定の現行学習指導要領では，資料の整理が数学 B に移され，代わりに確率が数学 C の内容になった。それによって，確率変数の分散の意味が学習しやすくなり，また，資料の整理の存在感もいくぶん増した。しかし，正規分布は数学 C の内容として残され，基本的に大きな変化はなかった。

(2) 推定の理論的困難さ

平成元年版の学習指導要領解説によれば，統計的推測を理論的に構成していくことがねらいではなく，具体例を通して考察する過程において推定の基本的な考え方を理解させることがねらいとされている。しかし，そのねらいは実現可能なことなのだろうか。

母平均の推定は，平均が μ，分散が σ^2 の母集団から大きさ n の標本を非復元抽出したときの標本平均 $\overline{X}$ の確率分布が正規分布 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ で近似できることが根拠であるが，μ の信頼度 95%の信頼区間が

$$\overline{X} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$$

であることを導くときに，正規分布 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ が μ の値に無関係に同じ形をしていることに依存している。つまり，一般に，ある未知母数 m を持つ母集団に対し定まる確率変数 X の確率分布が知れているときに m の信頼区間を

$$X - t_1 \leqq m \leqq X + t_2$$

の形に書くと，t_1，t_2 は m に依存する定数である。だから，一般には，推定は，母数 m を変化させたときの X の信頼区間を求め，実際に測定された X の値から適合する m の値の範囲を求めるというように，かなり複雑な構造になる。指導要領解説が要求するように，具体例を通して推定の基本的な考え方を理解させるのは，かなり難しいことだといわざるを得ない。

さらに，教科書には上式を用いる推定の問題しか掲載されないから，実質的に推定の学習は上の公式を暗記することにしかならない。無論，上の公式から計算することができれば推定の基本的な考え方を理解したというのであれば，そうだとしかいいようがないし，数学的素養を基盤とするコミュニケーションの成立が目的であれば，それも意味がないこともない。しかし，その範囲に限定したとしても，信頼度 95%というときの確率の意味するところを正しく理解できる生徒がどれだけいると考えて推定を扱うものと定めたのだろうか。さらに，実際に用いられる統計的手法はもっと多いのであるし，この事例が統計的手法の典型として適切なものだとも思えない。

3. 統計的推測領域に関する改革案

(1) 理念的考察

一般に，単に公式を記憶して適用するだけの学習は批判の対象となるし，それを回避する手段が存在するのならば，そのような学習は排除されるべきであろう。

コンピュータによる計算が当たり前に利用できるようになった今日，正規分布による近似を利用せずとも統計的推測の基本的な考え方は十分に指導可能である。

推定よりも検定のほうがわかりやすい概念であり，また，現実にも検定のほうが推定よりも適用範囲が広いのだから，統計的推測は，推定よりも検定を軸に指導するように改めるべきである。平成元年の改定とは反対に，推定を削除して検定のみに絞るのでよいのでないだろうか。

たとえば，正常なコインを 100 回続けて投げるとき表が 70 回以上でる確率は

$$\sum_{k=70}^{100} {}_{100}C_k \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \fallingdotseq 0.000039$$

であるから，100 回投げて表が 70 回以上でるようなコインは異常と判断してよさそうである。しかし，

$$\sum_{k=7}^{10} {}_{10}C_k \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \fallingdotseq 0.171875$$

だから，10 回中 7 回以上表がでるのはそれほどめずらしいことではない。このような計算をする経験を十分にさせておけば，検定の概念を導入するのはさして難しいことではないだろう。

(2) ２項分布に基づく検定の教材化の可能性

観念的には，2 項分布を材料として検定の考え方を教えるカリキュラムは成立しうるが, 実際に実行しようとする場合には, 若干の問題が発生する。

第１の問題は, 現実のコンピュータで計算することが難しい場合があることである。現在, 一般に用いられるインテル社の CPU では，浮動小数点演算で扱いうる数値（これは，IEEE 倍精度数である）の最大値はおよそ 1.8×10^{308} である。しかし，2 項係数の計算では，容易にその値を超えてしまう。${}_{1000}C_{500} \fallingdotseq 2.7 \times 10^{299}$ であるので，2 項分布 B（n，p）で $n > 1000$ の場合には，計算上の特別の工夫が必要になる。

この問題は, 最大数がおよそ 1.1×10^{4932} である拡張精度数を用いれば大幅に緩和されるが, 拡張精度数は内部的に用いるべきもので, その使用は一般には推奨されていない。

第２の問題は，2 項分布が左右対称ではないために, 両側検定の場合に棄却域の設定に若干の疑義が生じることである。つまり, たとえば, 左右に等しく半分ずつ棄却域を振り分けることにしたとして, 本当にそれが妥当かどうかは疑わしい。

第３の問題は，離散型の分布であるために，有意水準と危険率とが異なってしまうことである。つまり，危険率をちょうど５％にするような点が存在しないので, とまどう原因になりうる。この問題は，上記の理由から練習問題に利用可能な n の範囲が 1000 以下に限定されることから避けることが難しい問題である。

(3) 標本平均の扱いについて

推測統計では, 標本抽出を確率変数としてとらえる見方が重要である。そのため，標本平均の確率変数としての性質を考察することは欠かせない学習内容でありうる。

母平均が μ， 母分散が σ^2 である有限母集団から非復元抽出された大きさ n の標本の標本平均の期待値が μ, 分散が $\frac{\sigma^2}{n}$ になることには理論的な困難は少なく, その結果を生徒に導出させるような指導案を作ることも難しくないであろう。

さらに，適当な母集団を仮定し，標本平均の分布を理論的に厳密に，あるいは，シミュレーションによって近似的に, 計算することはさほど難しいことではない。多くの場合について実験してみると，いずれの場合も，標本数が多ければほぼ同じ形の分布になることが見てとれる。この経験は，後の学習において正規分布につながるものである。

4.　カリキュラムの整理と系統性

(1) 確率

確率概念は統計的推測の考え方の基礎となるものである。2 項分布，あるいは，標本平均を扱うためには, 試行の独立と確率変数の独立の概念は欠かせない。しかし，条件付き確率の概念は，必要ない。条件付き確率の見方そのものは有用であるから排除する必要は感じないが, 条件付き確率に付随する事象の独立の概念は高等学校での学習内容から削除してよいものであろう。

(2) コンピュータ

この試案ではコンピュータの利用は必須である。生徒自身がプログラミングの技量を持たなければ自身で数学を作ったという実感を伴った学習をさせることは難しいであろう。表計算ソフトの利用にとどまっていたのでは, 本稿のシナリオは実現しない。学習指導要領の次期改定においては, 表計算ソフトは中学校での学習内容とし，高等学校ではプログラミング（＝アルゴリズムの構成と利用）が基礎的な学習内容として取り入れられることが必須である。

5.　終わりに

統計は, 高等学校数学科のなかでもとりわけ実際には学習されることの少ない領域である。学習する意義の感じられる領域にするとともに, 思考力の育成にも貢献しうる内容に変更し, 大学入試の出題にも耐える内容を持った領域にしていくことが不可欠であると思う。そして, 分散，標準偏差，相関係数など，統計の言葉がコミュニケーションのための言葉として機能する社会を作っていきたいものである。

参考文献

i）白石和夫，数学教育の指導系統の見直しを，
数学教育学会誌 2003/Vol.44/No.3･4 pp.27-32

『資料の活用』の一教材例

── 人の色覚の数理 ──

文教大学教育学部　　　　　白石和夫
E-mail：shiraish @koshigaya.bunkyo.ac.jp

概要：

資料の活用に関係する数学は，統計や情報に限るものではない。関数や代数に関する基本的な見方，知識・技能もまた必須である。ここでは，そのことを示す教材として，人間の目の知覚と光の３原色にまつわる内容を提示する。幸いなことに，人間の目の知覚に関する素データをインターネット上で入手することができる。

検索語：資料の活用，素データ，教材例，色覚

1.　はじめに

中学校数学科の第４の領域として「資料の活用」，高等学校数学Ｉの内容に「データの分析」が新設されるなど，データ活用力の育成が重要なテーマとして注目を集めている。

データを扱う数学において，統計は重要な視点であるが，関数としての見方を育てることも必要であるし，代数的な処理もまた重要な視点である。そして，データの加工方法の多様性とそこから読み取れること（読み取ってよいこと）は何であるかを判断できる力を育てなければならない。それに適する教材は多数あるように思われるが，素データの入手に困難性がある。素データがなければ，データの活用についてさまざまなことを学ぶ学習は困難である。

筆者は，学部教養科目「基礎演習Ⅱ」において,「アートのための数学」[1]を主教材として，総合的な学習の視点を学生に持たせることを意図して学生自身が探求を行う授業を行った。筆者は学生の探求にコメントする必要から関連領域についての探索を行うなかで，色の知覚に関する素データがインターネット上で入手可能であることに気付いた。

英国 University College London（UCL）附属の Institute of Ophthalmology は，Colour & Vision Research laboratory and database（CVRL database）[2]の名称の下に人の目の知覚に関する詳細なデータを公開している。

2.　人の色覚

2.1.　色覚細胞（錐体）

人の目の色覚細胞は，L，M，S の 3 種類の錐体(cone)から構成されている。L，M，S は，それぞれ，長波長，中波長，短波長を意味し，L, M, S 各錐体は, それぞれ, およそ, 570nm, 540nm，440nm 付近にピークを持つ単峰形の感度特性を持っている。波長 440nm，540nm の光は，それぞれ，青，緑といってよいが，波長 570nm もほぼ緑といってよい領域にある。

CVRL database には，LMS 錐体の波長に対する感度特性のデータが複数登録されている。大きく分けて視野角 2 度のものと 10 度のものがあり，同種のデータでも出典の異なるいくつかのデータが登録されている。さらに，それらは，データ形式等でさらに細分され，いく通りものデータが存在する。

ここで，たとえば，10-deg fundamentals based on the Stiles & Burch 10-deg CMFs Stockman & Sharpe (2000) において，Units energy (linear), Step size 5nm, Format plot を選択すると，図１（次ページ）に示すような画像が得られる。ただし，実際には３つの曲線は左から順に，青，緑，赤で描かれ，それぞれ，S，M，L 各錐体の感度特性を示している。

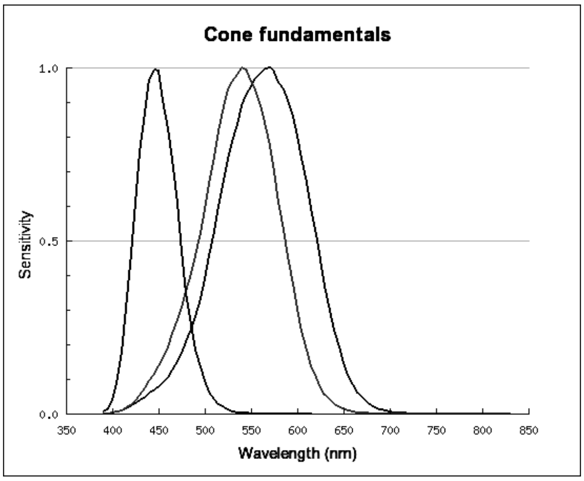


図 1

この特性グラフはインターネット上でもよく見られ，めずらしいものではないが，CSV形式で詳細な数値データが得られるのは，筆者が探したかぎりではCVRL　database しかない。

Units energy (linear)，Step size 0.1nm，Format csv を選ぶと，次のようなデータを持つファイルが得られる。

390.0,　4.15003E-04,　3.68349E-04,　9.54729E-03
390.1,　4.23072E-04,　3.75656E-04,　9.72489E-03
………（途中　省略）………
830.0,　9.74306E-07,　9.53411E-08,

コンマで区切られた数値のうち，第１のものは波長（単位 nm）であり，続く 3 つの数値は，それぞれ，L, M, S 各錐体の感度特性を意味する。それらは，それぞれ，最大値が１となるように正規化されている。ただし，0 に対応するデータはブランクで記録されている。

2.2.　3 原色

L, M, S 各錐体が，それぞれを単独で刺激する色を持てば，それら３色の混合で任意の色が再現できることになるが，実際には，どの波長の光を用いても１種類の錐体のみを刺激することはできないことが上のグラフから読み取れる。

しかし，実際には，3原色をR（赤，700nm），G（緑，546.1nm），B（青，435.8nm）とする表色系が用いられている（CIE（国際照明委員会）の RGB 表色系）。R，G，B 各３原色に対するL, M, S各錐体の感度特性は，

700.0,　5.89749E-03,　3.65317E-04,
546.1,　9.24341E-01,　9.93742E-01,　2.85277E-03
435.8,　3.51131E-02,　5.39344E-02,　9.19756E-01

であるので，人間の色覚細胞（錐体）が複数波長の光の刺激に対して重ね合わせの原理（加法性）が成立するものとすると仮定すれば，

$$l = 0.00589749\,r + 0.924341\,g + 0.0351131\,b$$
$$m = 0.000365317\,r + 0.993742\,g + 0.0539344\,b$$
$$s = 0.00285277\,g + 0.919756\,b$$

となるようにR，G，B各３原色の強度 r，g，b を定めれば，L, M, S各錐体の刺激値が l，m，s である色が再現できることになる。

各波長の光に対する l, m, s の値から r, g, b 値を求めるためには，上の３元連立一次方程式を解けばよい。逆行列と行列の積を利用することで，簡単なプログラムで計算できる。

各単波長の色に対する r, g, b 値の計算結果は，以下のようになる（左から波長，r, g, b の順）。

390.0　0.04120　−0.00021　0.01038
………（途中　省略）………
435.8　0　0　1
………（途中　省略）………
517.1　−24.00146　0.77441　0.03748
………（途中　省略）………
546.1　0　1　0
………（途中　省略）………
604.1　95.19253　0.24351　−0.000074
………（以下　省略）………

計算結果の r, g, b 値には負の数も現れる。これは，その波長の単色は RGB の合成では得られないことを意味する。また，r がとても大きな数値になるが，それは，R が人の色覚細胞にとって感度の悪い色だからだということが LMS 錐体の感度特性グラフから読み取れる。

2.3.　RGB 色空間

上で計算した r, g, b 値をグラフに表すとき，r が収まるようなスケールをとると g，b はほぼ 0 になる。それは見づらいので，波長に対する r, g, b 値は一種の確率分布のようなものだとみなし，定積分の値が同じになるようにそれぞれの値を正規化して描いたのが図2（次ページ）である。

この図はよく見かけるある図とよく似ている。

白色と感じる R，G，B 各色の強さを基準にした各色の強度は，RGB 色空間と呼ばれて色相を表すのに用いられている。ここで，白色光はどの波長の成分も等しい強さを持つと仮定すれば，定積分の値が同じになるように正規化することは，白色と等価になる R，G，B 各色の強さを基準にとることと同じになる。

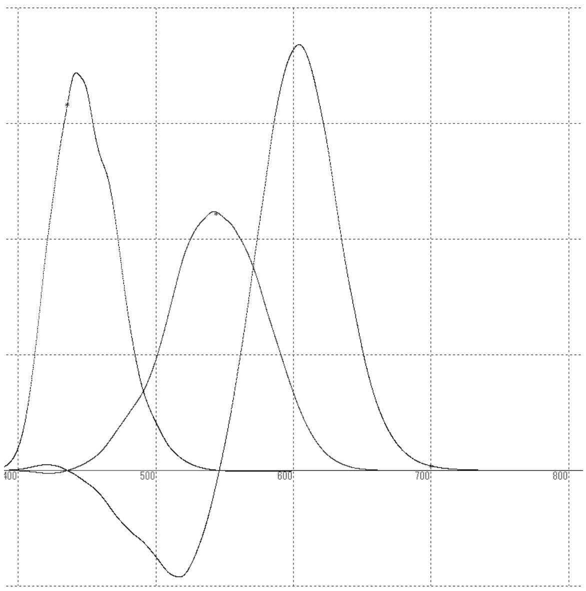


図 2

だから，図2は，対波長スペクトル分布が一定である光を白色光と定義したときの各単波長光の R, G, B 強度を求めたものになっている。

2.4.　3 原色はうそか？

CIE が，なぜ，700nm，546.1nm，435.8nm を 3 原色に選んだのかその理由はさだかでない（それらの波長の光が得やすいなどの物理的な理由があるのかもしれない）が，他の波長の色を 3 原色に選んでもよさそうなものである。各自が自分の考える 3 原色を定義する活動を行えば，興味が倍加するものと思われる。

しかし，どうがんばっても 3 色の合成ですべての色を表すことが不可能であることは，次のような考察から分かる。

各波長の光に対する L, M, S 各錐体の刺激値を l, m, s とするとき，色相は $l : m : s$ で表される。そこで，l, m, s を $l+m+s$ で割った値をあらためて l, m, s で表す。横軸に l, ,縦軸に m をとり，平面上の点で色相を表すことにする。各波長の光に対する(l, m)をプロットすると，図3 のようになる。

この曲線上の 2 点を取ると，それらの色の合成で実現可能な色は 2 点を結ぶ線分上の色である。曲線上に 3 点をとる場合は，それら 3 色の合成で実現可能な色は 3 点を頂点とする 3 角形の内部（辺を含む）の色である。およそ 540nm より波長の短い領域ではこの曲線は凸型に曲がっているので，3 原色をどのように選んでも完全にすべての色を作り出すことはできない。しかし，その部分を線分で近似するのを許せば，3 原色という考え方は正しいともいえる。

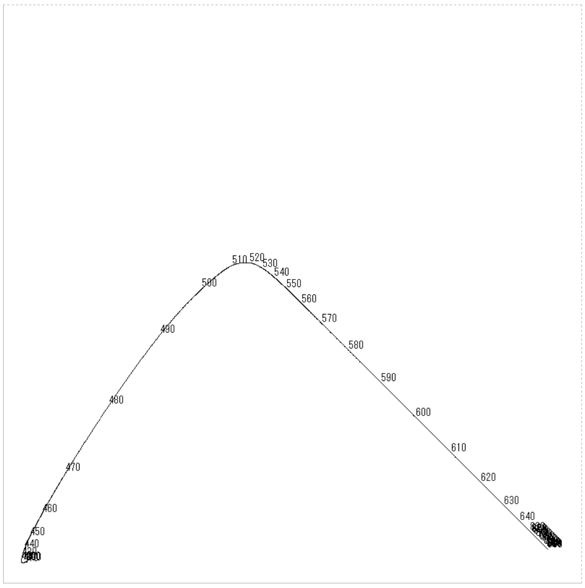


図 3

この図を見ると，およそ 520nm より波長の長い光に対してはほぼ s=0 であって $l : m$ によって色相が定まること，反対に 520nm より波長の短い光に対しては $l : m$ の値はほぼ一定で s (＝1−(l+m))の値で色相が定まることが読み取れる。そして，また，人は，$l : m$ の比と，l+$m : s$ の比に基づいて色相を感知しているのではないかという仮説を立てることもできるだろう。

2.5.　XYZ 色空間

工学分野では RGB 色空間を線形変換して負の数が現れないように修正した XYZ 色空間と呼ばれるものが用いられている(詳細は省くが，情報は容易に入手できる)。ここまでの議論を踏まえると，XYZ 色空間は誤解を与えかねない表現手段だということも見えてくる。図 3 に相当する内容を XYZ 色空間に基づいて描いた馬蹄形の曲線をよく見かける。この場合，どこまでその図から判断していいのだろうか。XYZ 色空間についてやっていいこと（読み取ってよいこと)，やってはいけないこと（読み取ってはいけないこと）を判断する経験を積ませることで，数学的な手法の意味するところは何であるか，考えさせるよい教材になるであろう。

引用文献

[1] 牟田 淳，アートのための数学，オーム社，2010
[2] http://cvrl.ioo.ucl.ac.uk/index.htm

色覚の数理

～データ活用の数学～

文教大学教育学部　　　　　白石和夫

E-mail：shiraish @koshigaya.bunkyo.ac.jp

概要：

英国 University College London の The Colour & Vision Research laboratory（CVRL）が公開する人の LMS 各錐体の単波長光に対する相対感度データを利用して色覚の数理の授業を試みた。なお，この研究は，2011 年度春季年会「『資料の活用』の一教材例」を素材とした授業実践である。

検索語：資料の活用，授業実践，色覚の数理

1.　はじめに

データ活用力の育成は新時代の数学教育にとって重要なテーマである。

データ活用のための数学は，統計学の範疇におさまるものではないと思う。その観点から，2011 年度春季年会で, 英国 University College London の The Colour & Vision Research laboratory（CVRL）[1] が公開する人の LMS 各錐体の単波長光に対する相対感度データを利用する教材の可能性を提示した[2]。そこでは,「色の 3 原色は本当か？」という結論を見出すシナリオであったが，今回は，逆に，色の 3 原色論の由来がわかるようなシナリオで実験授業を試みた，ただし，受講者数がきわめて少数であるので授業の成否を論じるのは難しい。けれども，このシナリオでの授業展開が可能であることの検証はできたと思う。

2.　「色覚の数理」の授業

2.1.　色覚データファイルの入手

人の目の色覚細胞は，L，M，S の 3 種類の錐体(cone)から構成されている。CVRL database には，LMS 錐体の波長に対する感度特性の詳細なデータが公開されている。10-deg fundamentals based on the Stiles & Burch 10-deg CMFs　Stockman & Sharpe (2000) において，Units energy (linear)，Step size 0.1nm，Format csv を選ぶと，このファイルには，波長（単位 nm）および，L, M, S 各錐体の感度特性を意味する 3 個の数値がコンマで区切られて記録されている。L,M,S 値は，それぞれ，最大値が 1 となるように正規化されている。ただし，0 に対応するデータはブランクで記録されている。

2.2.　Full BASIC による読み込みプログラム

数値データのあるべき位置にブランクを含むデータファイルを Full BASIC で読むことはできないから，Full BASIC を利用するためには，授業者の側でブランクを 0 に置き換えたファイルを用意しておく必要がある。

ただし，今回の試行では，（仮称）十進 BASIC 独自拡張の RECTYPE CSV を指定して読み込むことにした。また，Windows ではダウンロードしたファイルの実際のパス名を知るのが難しい難点がある。その難点を回避するため，規格外の命令 FILE GETOPENNAME を用いた。

このプログラムでデータファイルを読み込むことができることを知れば，プログラムを書き換えていくことで，たとえば，LMS 感度特性をグラフ表示することなどは通常の手法で可能になる。

```
10 FILE GETOPENNAME s$, "CSV"
20 OPEN #1: NAME s$, RECTYPE CSV
30 DO
40    READ #1, IF MISSING THEN EXIT DO: lambda, L, M, S
50    PRINT  lambda, L, M, S
60 LOOP
70 CLOSE #1
80 END
```

2.3. L:M:S による色相

人は，L,M,S 錐体が受けた刺激値の比によって色を知覚しているものと思われる。そこで，

$T=L+M+S$,

$l=L/T$，$m=M/T$，$s=S/T$

とおけば，$l+m+s=1$ であるので，l，m，s のうちの任意の 2 つを用いて色相を表すことが可能になる。

各単波長光の m,s 値の軌跡を描くと，下図が得られる。他の 2 つの組み合わせによっても似たような折れ線状の図形が得られる（図 1）。

```
100 SET WINDOW 0,1,0,1
110 DRAW grid(1,1)
120 SET POINT STYLE 1
130 LET s$="C:¥Users¥○○○¥Downloads¥linss10e_fine.csv"
140 OPEN #1: NAME s$, RECTYPE CSV
150 DO
160    READ #1,IF MISSING THEN EXIT DO:lambda, L,M,S
170    LET t=L+M+S
180    LET l=L/t
190    LET m=M/t
200    LET s=S/t
210    PLOT POINTS:m,s
220    IF FP(lambda/10)=0 THEN PLOT TEXT ,AT m,s :STR$(lambda)
230 LOOP
240 END
```

2.4. 3 原色 RGB とは？

単波長光の色相の軌跡は，ms 色相図上で 2 本の直線で近似できるように思える。両端の色は赤と青であり，屈曲点付近の色は緑である。このことを利用すると，各単波長光の色相は，赤と緑，または，緑と青の混合で近似できそうなことが推測できる。

CIE（国際照明委員会）の RGB 表色系では，R（赤，700nm），G（緑，546.1nm），B（青，435.8nm）としている。　R，G，B 各 3 原色に対する L, M, S 各錐体の感度特性は，

```
700.0,   5.89749E-03,   3.65317E-04,
546.1,   9.24341E-01,   9.93742E-01,   2.85277E-03
435.8,   3.51131E-02,   5.39344E-02,   9.19756E-01
```

である（linss10e_fine.csv）。　そこで，

R，G，B 各 3 原色の強度 r，g，b を

$$(l \quad m \quad s) = (r \quad g \quad b)\begin{pmatrix} 0.00589749 & 0.000365317 & 0 \\ 0.924341 & 0.993742 & 0.00285277 \\ 0.0351131 & 0.0539344 & 0.919756 \end{pmatrix}$$

となるように定めれば，L, M, S 各錐体の刺激値が l，m，s である色が再現できるはずである。

この 3 元連立一次方程式を解くプログラムを用意すれば，実際に各単波長光に対し必要な r，g，b 値を計算することができる。実際にその値を計算してみると，r，g，b 中，r に突出して大きな数値が要求されることがわかる。これは，700nm 付近では L 錐体の感度が悪いことに起因している。また，500nm 付近で r 値が負数となり，この付近の色は完全には再現できないこともわかる。

2.5. RGB 色空間

Full BASIC で色を表現するのに RGB 値が用いられる。この RGB 値は，白色光を与える R，G，B の強度を 1 とした数値で指定される。そこで，実際に白色光を作るために必要な，RGB 各 3 原色の実際の強度 r，g，b を求めてみようと思う。そして，上で求めた値を RGB 値で表現するように書き換えてみたいと思う。

大気による影響（吸収，散乱など）を無視すると，太陽光は，およそ 5800K の黒体放射であるといわれている。黒体放射の強度は，次に示すプランクの法則で求めることができる。

温度 T(K)の黒体が放射する光の強度の分布は，波長 λ (m)の関数として

$$B(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

で表される。ただし，$h = 6.62606957 \times 10^{-34}$ Js（プランク定数），$k = 1.380\,6488 \times 10^{-23}$ JK^{-1}(ボルツマン定数)，c = 299792458 m/s（光速）である。

可視光の各波長に対しその強度を求め，その強度を得るために必要な l，m，s 値を求めて足し合わせれば（積分すれば)，白色光を作るために必要な l，m，s 値が求まる。この l，m，s を実現する r，g，b 値を求め，それを基準としたときの各単波長光をえるために必要となる R，G，B 値を計算しグラフに表すと，図 2 のようになる。

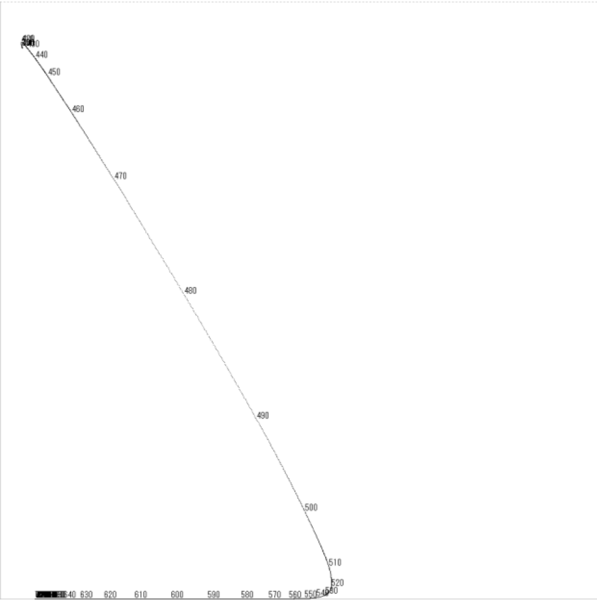


図 1

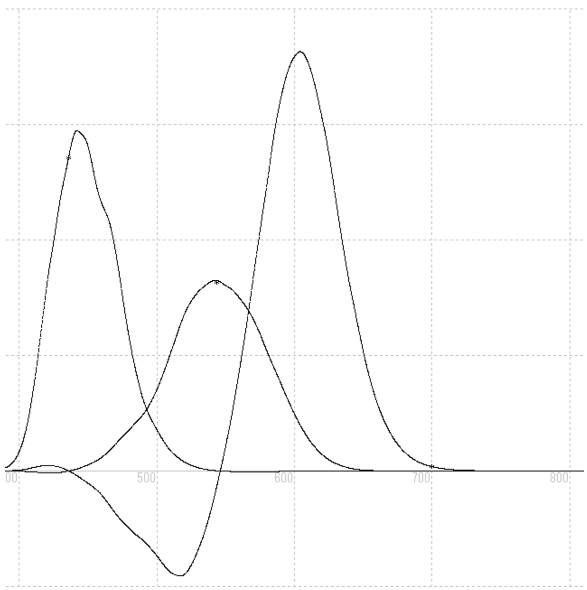


図 2

2.6. 授業を振り返って

連立方程式の解法について Full BASIC の行列演算機能を利用する方法を教示したけれども，l, m, s,および，r, g, b と配列における添字付変数との対応付けに苦慮する様子が見られた。クラメルの公式は学んでいるはずなので，そちらを記述するように仕向けたほうがよかったかも知れない。

いずれにせよ，まだ，始めたばかりで，実際の指導法，また，この教材を扱うことによる効果など，今後に残された課題は多い。

引用文献

[1] http://cvrl.ioo.ucl.ac.uk/index.htm
[2] 白石和夫：『資料の活用』の一教材例，2011 年度数学教育学会春季年会発表論文集，pp.58-60

和算家の円周率計算

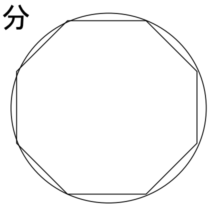
江戸期の和算家は，計算を進めるなかで法則性を見出し，
それを利用して高い精度での計算結果を得ていた。

文教大学教育学部　白石和夫

1

円周率計算の初歩

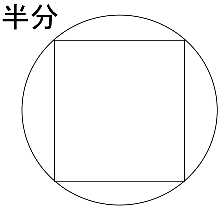
- 半径1の円に内接する
  正n角形の周の長さの半分
- 特に，$n=2^k$のとき



2

円に内接する正2^2角形

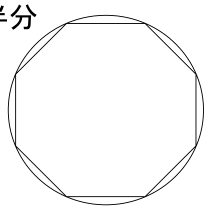
- 半径1の円に内接する
  正2^k 角形の周の長さの半分
- $k=2$のとき
  $2\sqrt{2}$ ＝2.828426…



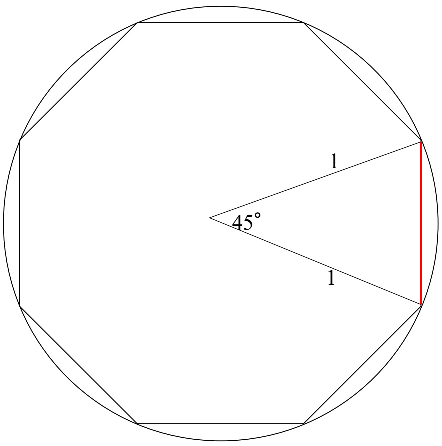
3

円に内接する正2^3角形

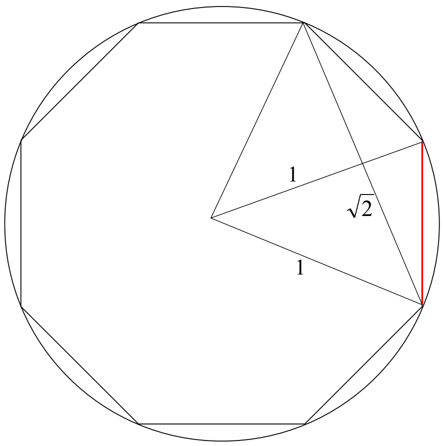
- 半径1の円に内接する
  正2^k角形の周の長さの半分
- k＝3のとき



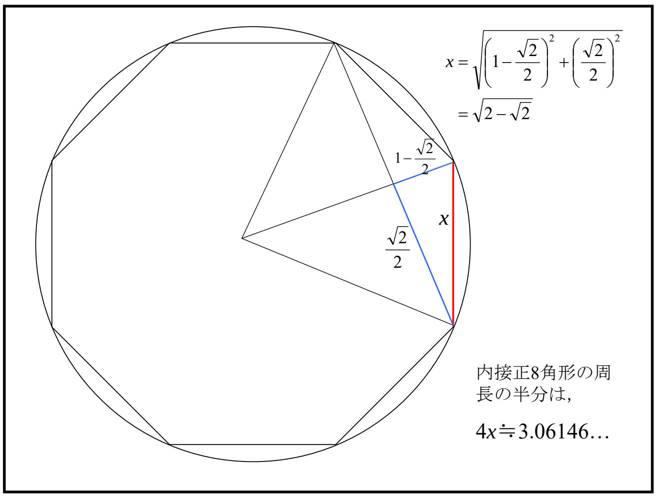
4



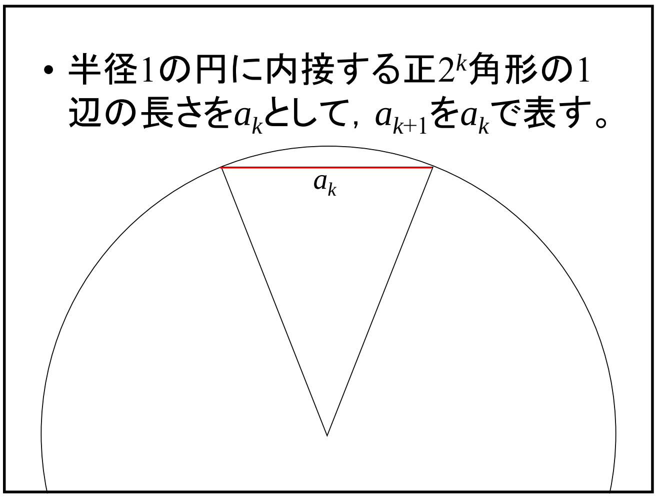
5



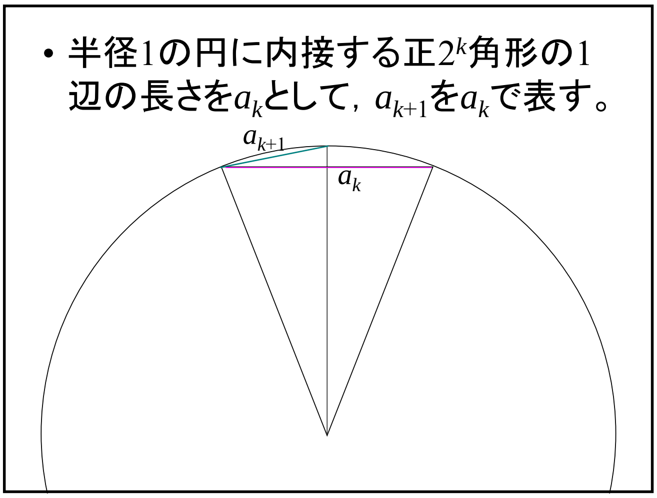
6


$x=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$
$=\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$
x
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
内接正8角形の周長の半分は,
$4x≒3.06146…$

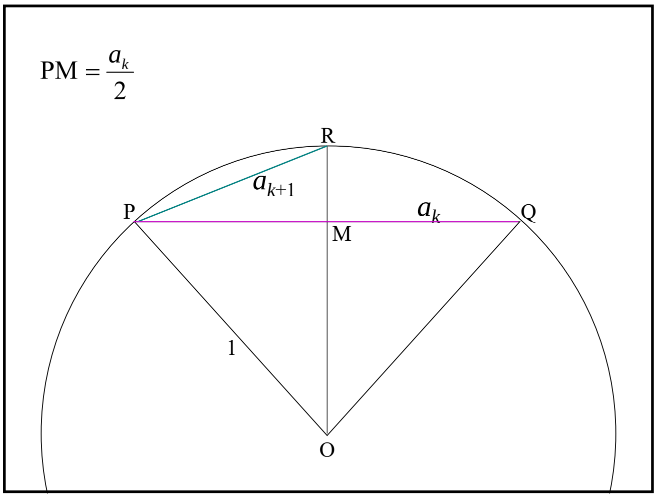
7


• 半径1の円に内接する正2^k角形の1辺の長さをa_kとして，a_{k+1}をa_kで表す。
a_k

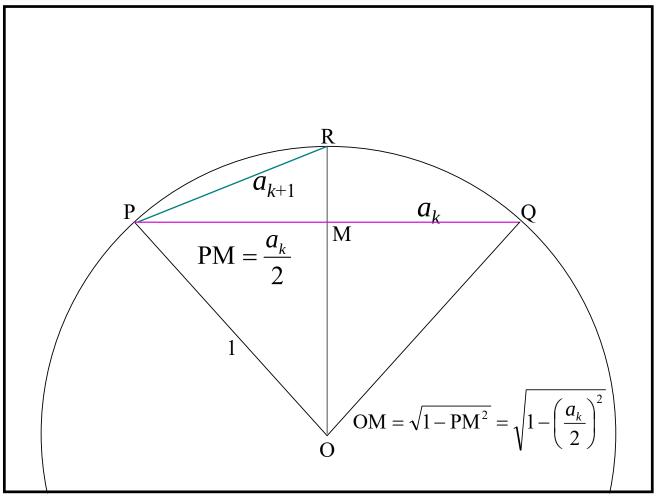
8


• 半径1の円に内接する正2^k角形の1辺の長さをa_kとして，a_{k+1}をa_kで表す。
a_{k+1}
a_k

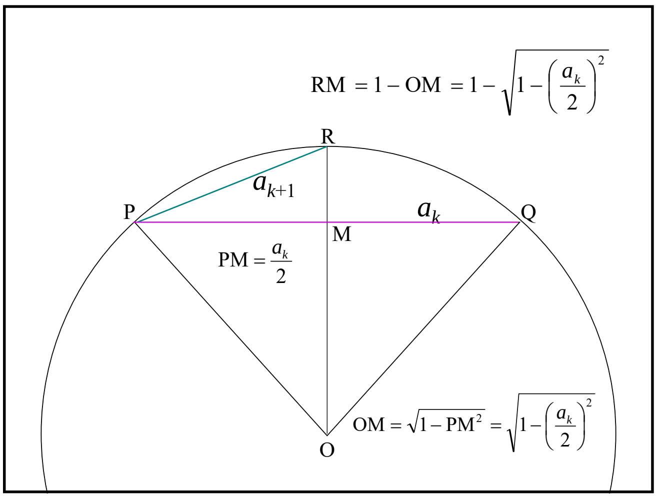
9


$\mathrm{PM}=\frac{a_k}{2}$
R
P
a_{k+1}
a_k
Q
M
1
O

10

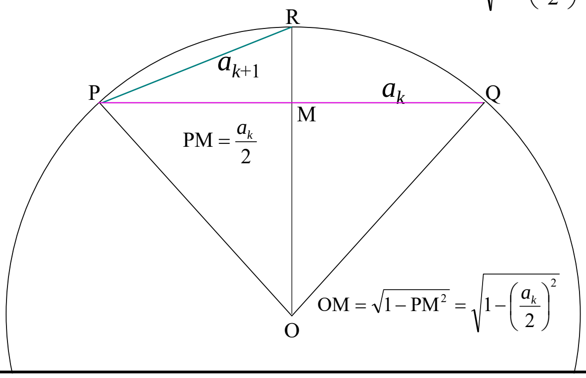

R
P
a_{k+1}
a_k
Q
M
$\mathrm{PM}=\frac{a_k}{2}$
1
$\mathrm{OM}=\sqrt{1-\mathrm{PM}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{a_k}{2}\right)^2}$
O

11


$\mathrm{RM}=1-\mathrm{OM}=1-\sqrt{1-\left(\frac{a_k}{2}\right)^2}$
R
P
a_{k+1}
a_k
Q
M
$\mathrm{PM}=\frac{a_k}{2}$
$\mathrm{OM}=\sqrt{1-\mathrm{PM}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{a_k}{2}\right)^2}$
O

12

$$a_{k+1}^{\ 2} = \mathrm{PM}^2 + \mathrm{RM}^2 \qquad \mathrm{RM} = 1 - \mathrm{OM} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_k}{2}\right)^2}$$



13

$$\mathrm{PM} = \frac{a_k}{2}$$

$$\mathrm{RM} = 1 - \mathrm{OM} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_k}{2}\right)^2}$$

$$a_{k+1}^{\ 2} = \mathrm{PM}^2 + \mathrm{RM}^2$$

$$a_{k+1}^{\ 2} = \left(\frac{a_k}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_k}{2}\right)^2}\right)^2$$

14

$$a_2 = \sqrt{2}$$

$$a_{k+1}^{\ 2} = \left(\frac{a_k}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_k}{2}\right)^2}\right)^2$$

半径1の円に内接する正2^k角形の周長の半分をl_kとすると,

$$l_k = 2^{k-1} \cdot a_k$$

15

(仮称)十進BASIC(ver.5.0.9)の十進1000桁モードで計算

```
10 LET a=SQR(2)
20 FOR k=3 TO 17
30    LET a=SQR((a/2)^2+(1-SQR(1-(a/2)^2))^2)
40    PRINT k, 2^k, 2^(k-1)*a
50 NEXT k
60 END
```

16

k	2^k	l_k
3	8	3. 0614674589207181738
4	16	3. 1214451522580522856
5	32	3. 1365484905459392638
6	64	3. 1403311569547529123
7	128	3. 1412772509327728681
8	256	3. 1415138011443010763
9	512	3. 1415729403670913841
10	1024	3. 1415877252771597006
11	2048	3. 1415914215111999740
12	4096	3. 1415923455701177423
13	8192	3. 1415925765848726657
14	16384	3. 1415926343385629891
15	32768	3. 1415926487769856695
16	65536	3. 1415926523865913458
17	131072	3. 1415926532889927653

17

階差数列 $l_k - l_{k-1}$

k	$l_k - l_{k-1}$
5	.01510333828788697824
6	.0037826664088136485
7	.00094609397801995574
8	.00023655021152820826
9	.0000591392227903078
10	.00001478491006831649
11	.00000369623404027336
12	.00000092405891776834
13	.00000023101475492334
14	.00000005775369032341
15	.00000001443842268038
16	.00000000360960567631
17	.00000000090240141946

18

k	$\dfrac{l_k-l_{k-1}}{l_{k-1}-l_{k-2}}$
5	0.25181592434608775431
6	0.25045233952333459556
7	0.25011298268743652083
8	0.25002823929106413436
9	0.25000705942406456705
10	0.25000176483109883442
11	0.25000044120621740087
12	0.25000011030145701885
13	0.25000002757535817151
14	0.25000000689383916267
15	0.2500000017234597669
16	0.25000000043086494024
17	0.25000000010771623496

19

関孝和の円周率計算

- 階差 $d_k=l_k- l_{k-1}$を等比数列とみなす。
- $d_k=ar^{k-17}$，（ $a=d_{17}$，$r=d_{17}／d_{16}$）とみなすと，
- $l_n=l_{16}+d_{17}+d_{18}+\cdots+d_n$
- $n\to\infty$の極限を考えて
- $\pi= l_{16} + \dfrac{a}{1-r}$

20

関孝和の円周率計算

- (仮称)十進BASIC 十進1000桁モードで，
- $\pi= l_{16}+ \dfrac{a}{1-r}$
- ただし，　$a=l_{17}-l_{16}$，
- $\qquad r=(l_{17}-l_{16})／(l_{16}-l_{15})$
- を計算すると，3.1415926535897932386008880529429753

21

関孝和の方法の評価

- 正しい値と比較すると，18桁目まで正しい。
- 関は12桁まで求めたと主張した。
- なお，l_{15}は7桁目まで，l_{16}は8桁目まで，l_{17}は9桁目までπと一致する。

22

建部賢弘（たけべかたひろ）の方法

- 関は，l_{15}, l_{16}, l_{17}から計算
- 建部は，l_2^2, l_3^2, l_4^2,･･･, l_{10}^2から計算

23

半径1の円に内接する正2^k角形の周長の半分をl_kとする。

$$l_k = 2^{k-1}\cdot a_k$$

$$l_k^{\ 2} = 4^{k-1}\cdot a_k^{\ 2}$$

$$a_2^{\ 2}=2$$

$$a_{k+1}^{\ 2} = \left(\frac{a_k}{2}\right)^2 + \left(1-\sqrt{1-\left(\frac{a_k}{2}\right)^2}\right)^2$$

$$= 2-\sqrt{4-a_k^{\ 2}}$$

24

k	$\dfrac{l_k{}^2 - l_{k-1}{}^2}{l_{k-1}{}^2 - l_{k-2}{}^2}$
5	0.254873803466869
6	0.251208179866125
7	0.250301408215906
8	0.250075312338215
9	0.250018825577802
10	0.250004706253691

25

$l_k{}^2 - l_{k-1}{}^2$は公比1／4の等比数列であるとみなすと，

$k\to\infty$の極限を考えて

$$\pi^2 \fallingdotseq l_2{}^2 + \frac{l_3{}^2 - l_2{}^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4l_3{}^2 - l_2{}^2}{3}$$

26

$l_k{}^2 - l_{k-1}{}^2$は公比1／4の等比数列であるとみなすと，

$k\to\infty$の極限を考えて

$$\pi^2 \fallingdotseq l_2{}^2 + \frac{l_3{}^2 - l_2{}^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4l_3{}^2 - l_2{}^2}{3}$$

同様に考えて，

$$\frac{4l_3{}^2 - l_2{}^2}{3}, \frac{4l_4{}^2 - l_3{}^2}{3}, \frac{4l_5{}^2 - l_4{}^2}{3}, \cdots$$

は，π^2の近似値を与える数列である。

27

$p_k = \dfrac{4l_k{}^2 - l_{k-1}{}^2}{3}$ とする。

k	$p_k - p_{k-1}$
5	0.00240984781266
6	0.00015225739611
7	0.00000954191772
8	0.00000059677415
9	0.00000003730466
10	0.00000000233164

28

k	$\dfrac{p_{k-1} - p_{k-2}}{p_k - p_{k-1}}$
5	15.3210704132499
6	15.8274597768569
7	15.9566871752485
8	15.9891605894793
9	15.9973083791676
10	15.9993223653737

29

$p_k - p_{k-1}$は公比1／16の等比数列であるとみなすと，

$k\to\infty$の極限を考えて

$$\pi^2 \fallingdotseq p_3 + \frac{p_4 - p_3}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16p_4 - p_3}{15}$$

同様に考えて，

$$\frac{16p_4 - p_3}{15}, \frac{16p_5 - p_4}{15}, \frac{16p_6 - p_5}{15}, \cdots$$

は，π^2の近似値を与える数列である。

30

k	$\sqrt{\dfrac{16p_k - p_{k-1}}{15}}$
5	3.14159237039602
6	3.14159264913496
7	3.14159265352007
8	3.14159265358871
9	3.14159265358977
10	3.14159265358979

31

$q_k = \dfrac{16p_k - p_{k-1}}{15}$ とおく。

k	$\dfrac{q_{k-1} - q_{k-2}}{q_k - q_{k-1}}$
6	62.27956873579271996
7	63.56478519915112306
8	63.89087386596645191
9	63.97269826324878105
10	63.99317330230909394

32

$q_k = \dfrac{16p_k - p_{k-1}}{15}$

$q_k - q_{k-1}$ は公比$\dfrac{1}{64}$の等比数列であるとみなすと，

$r_k = \dfrac{64q_k - q_{k-1}}{63}$

はπ^2のよりよい近似値となる。

33

$p_k = \dfrac{4l_k^2 - l_{k-1}^2}{3}$，$q_k = \dfrac{16p_k - p_{k-1}}{15}$，$r_k = \dfrac{64q_k - q_{k-1}}{63}$，

$s_k = \dfrac{256r_k - r_{k-1}}{255}$，$t_k = \dfrac{1024s_k - s_{k-1}}{1023}$，$u_k = \dfrac{4096t_k - t_{k-1}}{4095}$，

$v_k = \dfrac{16384u_k - u_{k-1}}{16383}$，$w_k = \dfrac{65536v_k - v_{k-1}}{65535}$ と定め，

$\sqrt{w_{10}}$ を計算する。

すなわち，l_2^2，l_3^2，l_4^2，$\cdots$，l_{10}^2から求めた。

34

疑惑

π =3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 69399…

$\sqrt{w_{10}}$ =3.1415926535 8979323846 2643383279 5028832768 58602…

$\sqrt{w_{11}}$ =3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 65869…

建部が得た結果

3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 2

建部は$\sqrt{w_{10}}$ ではなく$\sqrt{w_{11}}$ を計算したのか？

（しかし，建部は 1024 角形と記している）

あるいは，l_k^2でなく，l_kをもとに計算したのか？（小川束，森本光生）

それとも…？

35

参考文献

- パソコンによる解析入門 森本光生 (放送大学教育振興会)
- 綴術算経と不休綴術 森本光生（ICU 一般教育シリーズ34）
- 建部賢弘の円周率計算における最後の三桁 小川束
  http://www.tcp-ip.or.jp/~hom/historyofmath/article/hma1-9506.html
- 森本光生（国際基督教大学）
  http://torch.icu.ac.jp/~morimoto/index-j.html

36

2002 年度数学教育学会　秋季例会発表論文集

情報数学を素材とする探求教材の開発

白石和夫（文教大学）
shiraish@koshigaya.bunkyo.ac.jp

概要　情報数学を素材とする探求活動の教材化を試みた。その結果，冗長符号の生成に関する有限の代数系を利用した探求活動の可能性を見出すことができた。

検索語　探求活動　教材開発 情報数学　冗長符号

1. はじめに

探求活動や現実世界との関連は数学教育における重要なテーマになっている。しかし，適切な教材を用意するのは容易なことではない。

情報数学を題材とする数学教材の開発を試みた。その試みの成果として，その分野固有の予備知識をあまり必要とせず，探求活動の素材となりうる題材と出会うことができた。また，現実に利用されている手法であり，数学が実際に役立っていることを実感させる上でも有効な教材である。

今回の教材は，情報数学のうちでも，特に情報伝達の過程での誤りを減らすために用いられる冗長符号に関するものである。有限の数学であり，取り組みやすい利点がある。

2. 冗長符号の生成

2.1. ハミング距離

2^n 個の 2 進符号のうち，2^k $(n>k)$個の符号のみを用いることとし，残りは存在しない符号であると定めると，その冗長性を利用して通信の過程における誤りの検出や誤りの訂正が可能になる。その際の基本的な概念が符号間の距離（ハミング距離と呼ばれる）である。

2 個の符号について，値の異なるビットの個数をハミング距離という。ハミング距離は，2 符号の各ビットごとに XOR 演算を行った結果の値が 1 のビットの個数と等しい。また，0 と 1 の 2 数からなる代数系としてみるとき，XOR 演算は，2 を法とする加算と同じものである。

利用するすべての符号についての 2 符号間のハミング距離の最小値（最小ハミング距離）によって，その符号系の誤り検出能力や誤り訂正能力が定まる。たとえば，最小ハミング距離が 4 のとき，伝送線路での誤りが 2 ビット以内であることを保証する場合には誤りの訂正が可能であるし，伝送線路での誤りが 3 ビット以内であることが保証される場合には誤りの検出が可能である。

2.2. 巡回符号

ビット列 a_0，a_1，a_2，…，a_{n-1} で構成される符号を多項式 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ で表す。係数は 2 を法とする剰余系である。多項式自体は，x^n-1 を法とする剰余系の要素とみなす。そうすると，x をかけることが，符号ビットのシフトに相当する。

m 次多項式 $G(x)$が x^n-1 の因数であるとき，$k=n-m$ とすると，x^n-1 を法とする剰余系において $G(x)$を因数にもつ多項式は

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{k-1}x^{k-1})\,G(x) \quad \cdots(*)$$

の形になる。なぜなら，

$$G(x)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+x^k)=x^n-1$$

であるとすると，剰余系において

$$x^kG(x)=(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{k-1}x^{k-1})\,G(x)$$

となるから，上の形に整理できる。

x^n-1 を法とする剰余系において $G(x)$を因数にもつ多項式（＊）の全体は代数的におもしろい性質を持つ。

たとえば，

$$(1+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^3)=x^7-1$$

であるので， x^7-1 を法とする剰余系で考えるとき， $G(x)=1+x^2+x^3$ とすると，

$x^4G(x)=(1+x^2+x^3)\ G(x)$

を用いて，$x^7G(x)=G(x)$が得られる。さらに，$H(x)=(1+x)\ G(x)$とおくと，$x^7H(x)=H(x)$。そして，$G(x)$を因数にもつ多項式の全体は, 0, $G(x)$, $xG(x)$, $x^2G(x)$，…，$x^6G(x)$，$H(x)$，$xH(x)$，…$x^6H(x)$，とあと残りの１個である。

一方, $G(x)=1+x^2+x^3+x^4$ とした場合には, $G(x)$を因数にもつ多項式は$(a_0+a_1x+a_2x^2)\ G(x)$の形の８個であるが, それらは, 0, $G(x)$, $xG(x)$, $x^2G(x)$, …，$x^6G(x)$でもある。

$G(x)$を因数にもつ多項式の全体は加算（2 を法とする）について閉じているが，この演算はもとのビット列ではビットごとの XOR 演算である。異なる符合間の加算で多項式 0 が得られることはないから，異なる 2 符号間のハミング距離は，0 以外の要素の１であるビットの個数で定まる。ところが，$G(x)$，$xG(x)$，$x^2G(x)$，…といった列に属する多項式で表される符号の１であるビットの個数は同一だから，最小ハミング距離の算出は少ない手間で実行できる。

たとえば，x^7-1 を法とする剰余系で考えることにして, $G(x)=1+x^2+x^3$ を因数に含む多項式の全体が表す符号を考えると，$G(x)$が表す符号の 1 のビットの個数が 3，$H(x)=(1+x)\ G(x)=1+x+x^2+x^3$ の１のビットの個数が 4，残りは$(1+x+x^3)G(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ であるので 1 のビットの個数は 7。したがって，この符号系の最小ハミング距離は３である。

2.3. 拡大体を利用する多項式の因数分解

2 を法とする剰余系を係数体にもつ多項式 x^n-1 の因数分解ができると前述の方法が使える。因数分解を得るのに，係数を有限体に拡張することで因数分解する手法がある。これは，実数体に，実数係数の範囲では解を持たない方程式の根を追加することで，すべての多項式が因数分解できるようにするのと事情が似ている。

以下，２を法とする剰余系を GF(2)で表す。

$1+x+x^4$ は GF(2)を係数体とする多項式として既約である（1 次因数を持たないのは明らかだし，2 次の既約多項式は $1+x+x^2$ のみだから割ってみればよい）。

$1+\alpha+\alpha^4=0$ なる α を追加して体を作る。$\alpha^4=1+\alpha$ だから， $\alpha^{16}=1+\alpha^4=1+\alpha$ なので，$\alpha^{15}=1$。

GF(2)上の多項式にはおもしろい性質がある。多項式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k$ が拡大体において β を根に持つとき， β^2， β^4， β^8，・・・も根になる。

このことに気付くと，α，α^2，α^3，・・・α^{15}を根にもつ多項式が作れる。

$$(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^4)(x-\alpha^8)=x^4+x+1$$

$$(x-\alpha^3)(x-\alpha^6)(x-\alpha^{12})(x-\alpha^9)=x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$(x-\alpha^5)(x-\alpha^{10})=x^2+x+1$$

$$(x-\alpha^7)(x-\alpha^{14})(x-\alpha^{13})(x-\alpha^{11})=x^4+x^3+1$$

を利用して

$$\begin{aligned} x^{15}-1 &= (x-1)(x-\alpha)\ (x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{15}) \\ &= (x+1)(\ x^4+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1) \\ &\quad (x^2+x+1)\ (x^4+x^3+1) \end{aligned}$$

この結果は，２を法とする剰余系を係数とする場合の因数分解になっている。

3. この教材の特徴

3.1. 有限数学

有限数学のよい点は，すべてを確かめてみることが可能なことである。あまり計算を必要としない問題から順に始めて少しずつ規模を大きくしていくことで，法則を予測し，それを確認することで，一般的になりたつ法則を見つけていくことができる。

3.2. 探求課題が豊富で，容易に解決可能

$x^{15}-1$ の因数分解を利用すると，$x^{15}-1$ の因数として複数の組み合わせを選択することができる（2.2の $G(x)$は既約である必要はない)。その場合，出来上がった符号系はどうなるのであろうか。$G(x)$の次数が同じであれば，$G(x)$を因数にもつ多項式全体の代数的な構造は同じになるのだろうか。また，$G(x)$の次数と最小ハミング距離との間には一定の規則があるのだろうか。

5次の既約多項式を利用すれば$x^{31}-1$ の因数分解ができる。5次の既約多項式はどうやって見つければいいのだろうか。

これらは，実際に計算してみることで解決可能な課題である。問題を見つけたとき，それがやればできるものであるということは，平均的な学生・生徒を対象とする課題にとって大切な要件である。

3.3. 進んだ数学（抽象代数学）への一歩

多項式環や拡大体など，抽象代数の基本概念の具体例が出てくる。2 を法とする剰余系は体であるから，これを係数とする多項式の作る環でユークリッドの互除法が使える。これは拡大体を作るときにでてくる。一般論を先行させず，具体例を積み重ねて一般論に進むのに適した材料である。

3.4. 総合的な学習への発展性

実際に用いられている手法がどのようなものであるか調べてみようという意欲を引き出せるのではないだろうか。実際には，かなりビット数の長い符号が用いられるようである。また，すべて１とかすべて０というような符号を含むような符号系は実用上，使えない（機械が壊れて無信号になるとそうなるから)。

最小ハミング距離を利用した符号誤りの検出や符号訂正は，伝送線路での誤りビット数の上限が保証されたときに成立する手法である。しかし，現実にはそのような線路は存在しない。多くの場合，確率的に何回に１回誤りが発生するというものであるし，また，一度誤りが発生すれば続けて誤りが発生する確率が高くなる性質も持つ。伝送線路をモデルにした確率論を展開しなければ情報伝達の確実性を保証することができない。そういう意味で発展性のある教材である（ただし，難しい)。

3.5. とっつきやすい（予備知識が不要）

情報量の理論までいくと学生には手も足も出ない話になってしまう。微積分が絡む素材でも同様である。力学や電磁気学にも抵抗感が大きい（要するに，まったくといってよいほど学習してきていない)。波に関する理論も同じようなものである。それらに比べれば，とっつきやすさという点で冗長符号の理論は探求活動のための教材としての可能性を秘めているように思える。

4. 最後に

大学３年生を対象に授業を行ったが，必ずしも満足できる結果は得られていない。学生の主体性を重視した授業にしたのが失敗で，最後には，結局，教師の解説になってしまった。最後のレポートの段階で探求を入れるのがやっとであった。つまり，少し難しすぎた。教育学部の学生にとって，数学という学科は，やり方を教えてもらってそのやり方を習得するものであって，現実の問題だとか，探求活動などというものは論外なのである。

学生にとって，やればできるとわかっても，レポート用紙で数ページにもわたる計算を実行するのは苦痛であるようだ。もっと誘導を増やし，負担を軽減する課題の提示の仕方が必要なようである。

参考文献

三谷政昭：「やり直しのための工業数学」，CQ 出版，2001

（補助資料）授業時に配布したプリント　表の番号等は，授業時に使用したテキスト
三谷政昭著「やり直しのための工業数学」（CQ 出版 2001）を参照しています。

ハミングの方法

4 ビットのデータ x_1, x_2, x_3, x_4 を送るとき，次式で定められる検査ビット(冗長ビット)c_1, c_2, c_3 を付加した 7 ビットを送る。

$c_1 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$

$c_2 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4$

$c_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$

ここで，$\oplus$は，mod 2 の加算で，$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$，$1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$。

伝送時の誤りが 1 ビット以下であれば,

$s_1 = x_4 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3$

$s_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus c_2 \oplus c_3$

$s_3 = x_1 \oplus x_3 \oplus c_1 \oplus c_3$

とし，$s = 4s_1 + 2s_2 + s_3$ とすると,

$s = 0$ のとき，誤りなし

$1 \leqq s \leqq 4$ のとき，x_s が誤り

$5 \leqq s$ のとき，c_{s-4} が誤り

と判定できる。

例

1101（$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$）を送るとき,

$c_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$c_2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$c_3 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$

を付加して送信する。

このとき，誤りなく伝送されれば,

$s_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$s_2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$s_3 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$,

4 ビットを間違えて $x_4 = 0$ になってしまったとすると,

$s_1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$

$s_2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$s_3 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

となって $s = 4 \times 1 + 2 \times 0 + 0 = 4$ より x_4 に誤りがあることが分かる（訂正できる)。

しかし，伝送時の誤りが 2 ビットある場合には，たとえば，x_4 と c_1 を間違えたとき,

$s_1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$s_2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$s_3 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1$

となるから，x_1 を間違えたと判断し，元の符号は 0100 であったと判断してしまう。(誤りであることの検出もできない)

巡回符号

	x_1	x_2	x_3	c_1	c_2	c_3	c_4
$u_1=$	0	0	0	0	0	0	0
$u_2=$	0	0	1	0	1	1	1
$u_3=$	0	1	0	1	1	1	0
$u_4=$	1	0	1	1	1	0	0
$u_5=$	0	1	1	1	0	0	1
$u_6=$	1	1	1	0	0	1	0
$u_7=$	1	1	0	0	1	0	1
$u_8=$	1	0	0	1	0	1	1

はじめの 3 ビット x_1，x_2，x_3 が情報ビット，残りの 4 ビット c_1，c_2，c_3，c_4 が検査ビット。

u_1～u_8 では，

$c_1=x_1\oplus x_2$

$c_2=x_2\oplus x_3$

$c_3=x_1\oplus x_2\oplus x_3$

$c_4=x_1\oplus x_3$

となっている。そこで，

$e_1=c_1\oplus x_1\oplus x_2$

$e_2=c_2\oplus x_2\oplus x_3$

$e_3=c_3\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_3$

$e_4=c_4\oplus x_1\oplus x_3$

とおくと，伝送に誤りがなければ e_1～e_4 はすべて 0 となる。

誤りが 1 ビットのみのとき e_1～e_4 のうちの 1 個または 3 個が 1 となる。

　c_1～c_4 が誤りのときは，e_1～e_4 のうちの対応する番号のもののみが 1 となる。

　x_1 が誤りのとき，e_1，e_3，e_4 が 1 となる。

　x_2 が誤りのとき，e_1，e_2，e_3 が 1 となる。

　x_3 が誤りのとき，e_2，e_3，e_4 が 1 となる。

誤りが 2 ビットあるとき e_1～e_4 のうちの 2 個または 4 個が 1 となる。

　c_1～c_4 が誤りのときは，e_1～e_4 のうちの対応する番号のもの 2 個が 1 となる。

　x_1，x_2 が誤りのとき，e_2，e_4 が 1 となる。

　x_1，x_3 が誤りのとき，e_1，e_2 が 1 となる。

　x_2，x_3 が誤りのとき，e_1，e_4 が 1 となる。

　情報ビットと検査ビットが 1 つずつ誤りであるとき e_1～e_4 のうちの 2 個または 4 個が 1。

誤りが 3 ビットあるとき e_1～e_4 のうちの 1 個または 3 個が 1 となる。

　なぜなら，e_1～e_4 には，c_1～c_4 が各 1 個，x_1～x_3 が各 3 個含まれる。

だから，伝送経路での誤りが 2 ビット以下であることが保証されていれば，誤りの存在が検出できて，しかも，誤りが 1 ビットであれば訂正可能。

伝送経路での誤りが 3 ビット以下であることしか保証されない場合は，誤りの検出のみ可能（訂正できない）

伝送経路での誤りが 4 ビット以下であることしか保証されない場合は，誤りの検出もできない。

　たとえば，x_1，x_2，c_2，c_4 が誤りのとき，e_1～e_4 はすべて 0 となる。

ハミング距離

符号間の異なるビットの個数をハミング距離という（6.4）。
表 8.1 の巡回符号では，各符号間のハミング距離はすべて 4 である。
だから，伝送経路での誤りが 3 ビット以下であれば誤りの検出が可能である。
また，伝送経路での誤りが 2 ビット以下であれば，誤りの検出と 1 ビットの誤りの訂正が可能。
ハミング距離の調べ方…2 符号の各ビットごとに$\oplus$演算を行った結果の 1 の個数。

巡回符号の多項式表現
符号語 a_0，a_1，a_2，…，a_{n-1} を多項式 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ で表す。係数は 2 を法とする剰余系。
このとき，表 8.1 の符号語は，

$u_1=0$

$u_2=x^2+x^4+x^5+x^6=x^2(1+x^2+x^3+x^4)$

$u_3=x+x^3+x^4+x^5=x(1+x^2+x^3+x^4)$

$u_4=1+x^2+x^3+x^4$

$u_5=x+x^2+x^3+x^6=(x+x^2)(1+x^2+x^3+x^4)$

$u_6=1+x+x^2+x^5=(1+x)(1+x^2+x^3+x^4)$

$u_7=1+x+x^4+x^6=(1+x+x^2)(1+x^2+x^3+x^4)$

$u_8=1+x^3+x^5+x^6=(1+x^2)(1+x^2+x^3+x^4)$

u_4 は生成多項式であるという。
$x^7=1$ として計算する（つまり，x^7-1 を法とする剰余系で考える）と，
$(1+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^3)=x^7-1=0$ だから，

$x^3(1+x^2+x^3+x^4)=(1+x^2)(1+x^2+x^3+x^4)=u_8$

$x^4(1+x^2+x^3+x^4)=(x+x^3)(1+x^2+x^3+x^4)=(1+x+x^2)(1+x^2+x^3+x^4)=u_7$

$x^5(1+x^2+x^3+x^4)=(x+x^2+x^3)(1+x^2+x^3+x^4)=(1+x)(1+x^2+x^3+x^4)=u_6$

$x^6(1+x^2+x^3+x^4)=(x+x^2)(1+x^2+x^3+x^4)=u_5$

ハミング距離の計算
u_1～u_8 から異なる 2 個を選んで加算($\oplus$)すると，u_2～u_8 のいずれかになる。だからハミング距離は４。

巡回符号の作り方

$n=k+m$ とする。$G(x)$を x^n-1 を割り切る m 次多項式とする。

このとき，$G(x)$，$xG(x)$，$x^2G(x)$，$\cdots$，$x^{k-1}G(x)$，および，これらの和の形の 2^k 個の多項式は巡回符号を構成する。

例

$k=4$，$m=3$，$G(x)=1+x^2+x^3$ とする。

$x^7=1$ として計算する（つまり，x^7-1 を法とする剰余系で考える）と，

$(1+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^3)=x^7-1=0$ だから，

$xG(x)$

$x^2G(x)$

$x^3G(x)$

$x^4G(x)=(1+x^2+x^3)\ G(x)$

$x^5G(x)=x(1+x^2+x^3)\ G(x)=(x+x^3+x^4)\ G(x)=(x+x^3+1+x^2+x^3)\ G(x)=(1+x+x^2)\ G(x)$

$x^6G(x)=x(1+x+x^2)\ G(x)=(x+x^2+x^3)\ G(x)$

$x^7G(x)=x(x+x^2+x^3)\ G(x)=(x^2+x^3+x^4)\ G(x)=(x^2+x^3+1+x^2+x^3)\ G(x)=\ G(x)$

$H(x)=(1+x^2)\ G(x)\ =\ (1+x^2)(1+x^2+x^3)=1+x^3+x^4+x^5$

$xH(x)=x(1+x^2)\ G(x)=(x+x^3)\ G(x)$

$x^2H(x)=(x^2+x^4)\ G(x)=(1+x^3)\ G(x)$

$x^3H(x)=(x+x^4)\ G(x)=(x+1+x^2+x^3)\ G(x)=(1+x+x^2+x^3)\ G(x)$

$x^4H(x)=(x+x^2+x^3+x^4)\ G(x)\ =(x+x^2+x^3+1+x^2+x^3)\ G(x)\ =(1+x)\ G(x)$

$x^5H(x)=(x+x^2)\ G(x)$

$x^6H(x)=(x^2+x^3)\ G(x)$

$x^7H(x)=(x^3+x^4)\ G(x)\ =(1+x^2)\ G(x)$

$(1+x+x^3)\ (1+x^2+x^3)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$

上記および 0 のうち異なる 2 個を加算すると, 上記のいずれかになるから, ハミング距離は 3,4,7 のいずれか。

すなわち，最小ハミング距離は 3。

ガロア体

p が素数であるとき，mod p の剰余系は体。

元の個数が有限の体をガロア体という。

元の個数が q のガロア体を GF(q)で表し，q を位数という。

GF(2)… mod 2 の剰余系

GF(2^m)の構成（$m>1$）

$f(x)$を GF(2)上の m 次の既約多項式とする。

GF(2)に $f(\alpha)=0$ なる元 α を追加する。

$a_1+a_2\alpha+a_3\alpha^2+\cdots+a_m\alpha^{m-1}$（$a_1$，$a_2$，…，$a_m$ は 0 または 1）の全体を考えると，加法および乗法について閉じている。

しかも，すべて異なる。なぜなら，これらのうちに等しいものがあれば，$a_1+a_2\alpha+a_3\alpha^2+\cdots+a_m\alpha^{m-1}=0$（$a_1$，$a_2$，…，$a_m$ のうち少なくとも 1 つは 1）となるが，$g(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_m x^{m-1}$ とおくと，$f(x)$ と $g(x)$は GF(2)上の多項式とみて互いに素だから，$P(x)f(x)+Q(x)g(x)=1$ となる GF(2)上の多項式 $P(x)$，$Q(x)$ が存在するが，$P(\alpha)f(\alpha)+Q(\alpha)g(\alpha)=1$ は矛盾。

だから，ちょうど 2^m 個の元がある。

$\beta=a_1+a_2\alpha+a_3\alpha^2+\cdots+a_m\alpha^{m-1}$ は逆元を持つ。なぜなら， $f(x)$と $a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_m x^{m-1}$ は GF(2)上の多項式とみて互いに素だから，$P(x)f(x)+(a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_m x^{m-1})\,Q(x)=1$ となる GF(2)上の多項式 $P(x)$，$Q(x)$が存在し，$P(\alpha)f(\alpha)+(a_1+a_2\alpha+a_3\alpha^2+\cdots+a_m\alpha^{m-1})Q(\alpha)=1$ より　$\beta Q(\alpha)=1$。

$m=3$ のとき

$f(x)=1+x+x^3$ は，GF(2)上の既約多項式である。

［なぜなら，3 次式は 1 次式と 2 次式の積の形にしか因数分解できないから，因数分解されれば 1 次の因数をもつのに，$f(0)=f(1)=1$ だから，$f(x)$は 1 次の因数を持たない。］

GF(2)に $1+\alpha+\alpha^3=0$ となる元 α を追加する。

$\alpha^3=1+\alpha$

$\alpha^4=\alpha+\alpha^2$

$\alpha^5=\alpha^2+\alpha^3=1+\alpha+\alpha^2$

$\alpha^6=\alpha+\alpha^2+\alpha^3=1+\alpha^2$

$\alpha^7=\alpha+\alpha^3=1$

GF(2^3)の 0 以外のすべての元は α^n の形になり， $\alpha^7=1$ を利用して乗法に関する逆元の存在がいえる。

$m=4$ のとき

$f(x)=1+x+x^4$ は，GF(2)上の既約多項式である。

［$f(0)=f(1)=1$ だから，1 次の因数を持たない。2 次の既約多項式は $1+x+x^2$ のみだから割ってみる。］

GF(2)に $1+\alpha+\alpha^4=0$ となる元 α を追加する。

$\alpha^4=1+\alpha$

$\alpha^8=(1+\alpha)^2=1+\alpha^2$

$\alpha^{16}=(1+\alpha^2)^2=1+\alpha^4=\alpha$

だから， $\alpha^{15}=1$

その他，表 9.13 参照。

GF(2)上で成立する等式

$(a+b)^2=a^2+b^2$

$(a+b)^4=a^4+b^4$

$(a+b)^8=a^8+b^8$

………

$(a+b)^{2^m}=a^{2^m}+b^{2^m}$

$(a+b+c)^{2^m}=a^{2^m}+b^{2^m}+c^{2^m}$

………

最小多項式

GF(2^m)の元βに対する最小多項式とは，βを根にもつ最小次数の GF(2)係数の多項式

最小多項式の求め方

$M(x)$がβの最小多項式であれば,

$M(\beta)=M(\beta^2)=M(\beta^4)=M(\beta^8)=M(\beta^{16})=\cdots\cdots$

となることを利用する。

例 GF(2^3)でα^3の最小多項式を求める。

GF(2^3)で$\alpha^7=1$に注意

α^3, α^6, $\alpha^{12}=\alpha^5$, $\alpha^{24}=\alpha^3$

$M(x)=(x-\alpha^3)(x-\alpha^6)(x-\alpha^5)=x^3-(\alpha^3+\alpha^6+\alpha^5)x^2+(\alpha^3\alpha^6+\alpha^6\alpha^5+\alpha^5\alpha^3)x+\alpha^3\alpha^6\alpha^5$

$=x^3-(\alpha^3+\alpha^6+\alpha^5)x^2+(\alpha^2+\alpha^4+\alpha)x+1=x^3+x^2+1$

最小多項式と誤り訂正符号

GF(2^m)を利用すると，$x^{2^m}-1$の因数分解が得られる。

因数分解ができると，その因数を$G(x)$とおくことにより 8.3 の手法を用いて巡回符号が作れる。

GF(2^3)を利用して

$1 \rightarrow x+1$

α, α^2, $\alpha^4 \rightarrow x^3+x+1$

α^3, α^6, $\alpha^5 \rightarrow x^3+x^2+1$

$x^7-1=(x+1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1)$

GF(2^4)を利用して

$1 \rightarrow x+1$

α, α^2, α^4, $\alpha^8 \rightarrow x^4+x+1$

α^3, α^6, α^{12}, $\alpha^9 \rightarrow x^4+x^3+x^2+x+1$

α^5, $\alpha^{10} \rightarrow x^2+x+1$

α^7, α^{14}, α^{13}, $\alpha^{11} \rightarrow x^4+x^3+1$

$x^{15}-1=(x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+1)$

演習問題

Ⅰ　因数分解　$x^{15}-1=(x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+1)$　を利用して 15 ビットの巡回符号を構成する。多項式は $x^{15}-1$ を法とする剰余系で考える（$x^{15}-1=0$ と考える)。

（１）　$G(x)=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+1)$ とし（本稿 p.4 で $n=15$，k=5，$m=10$)，$(x+1)(x^4+x+1)=x^5+x^4+x^2+1$ だから，$(x^5+x^4+x^2+1)G(x)=x^{15}-1=0$ に注意すると，

$$x^5G(x)=(x^4+x^2+1)G(x)$$

したがって，$G(x)$を因数にもつ多項式は,

$$(a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x^1+a_4)\,G(x)\quad(a_i\text{は 0 または 1})\qquad(*)$$

の形になり，全部で $2^5(=32)$個ある。

①　$x^5G(x)$，$x^6G(x)$，$x^7G(x)$，……を(＊)の形に表せ。$x^pG(x)=G(x)$となる最小の自然数 p を求めよ。

②　(＊)の形の多項式のうち，①の形の表せないものがあれば，そのうち次数が最小のもの $G_1(x)$とし，$x\,G_1(x)$，$x^2\,G_1(x)$，$x^3\,G_1(x)$，……を(＊)の形に表せ。

③　(＊)の形の多項式のうち，①，②の形の表せないものがあれば，そのうち次数が最小のもの $G_2(x)$とし，$x\,G_2(x)$，$x^2\,G_2(x)$，$x^3\,G_2(x)$，……を(＊)の形に表せ。

④　0 を除くすべての(＊)の形の多項式が①，②，③，…の形に表されるまで，②，③と同様の手続きを繰り返せ。

⑤　最小ハミング距離を求めよ。

（２）（１）と異なる因数をもつ 10 次式を $G(x)$とした場合，どうか。

（３）$G(x)=(x+1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ の場合，どうか。

（４）$G(x)=(x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ の場合，どうか。

「錯視と数学」について

「錯視と数学」は，学生の卒業研究論文である。
杉原厚吉著、「だまし絵と線形代数」（共立出版株式会社　2012 年）を出発点とする研究であるが，杉原氏の本では Fortran で書かれたプログラムの理解に悩んでいたようなので，maxima というフリーソフトがあることを紹介して実現したものである。

この研究を紹介したい理由は２つある。

１つには，解析幾何の有用性を示す題材として興味深いものであり，また，高校生でも十分に学べるものだからである。平面の方程式 $ax+by+c=0$ が議論の出発点にある。原理的にいえば，未知数の数が方程式の本数よりも少ないとき解をパラメータ表示することであって，理屈上は手計算でやってもできないことはない議論である。しかし，コンピュータ代数のシステムがそれをずっと手近なものにしてくれる。

2 つ目には，学生の学習能力である。maxima の存在を知らせたら，一月に満たない，ほんの数週間でこの研究の核心部分を作り上げてきたことに驚かされた。その学習能力はどこから生まれたのか知りたいと思った。こういう学生を育てるにはどうしたらいいのか知りたかった。彼女は，卒業時に残した寄せ書きに一つのヒントを書き残していた。私（白石）の教育方針が「自分たちで考える」ことであったと。少なくとも，型に嵌める学習指導からは，こういう学生は生まれないのであろう。

（白石和夫）

錯視と数学

B5E13///　□□□□

第１章　はじめに

目の錯覚という現象を数学を使って調べ、その仕組みを明らかにしようとする「計算錯視学」という分野があることを知り、興味を持った。その中でも、立体が描かれているという印象をもつのに、よく見るとそんな立体は作れないと感じる「だまし絵」に興味を持ち、その一種である「不可能図形」についての研究を進めた。また、現代では数学がどのように使われているのかを知り、生徒が数学を身近に感じられるような授業づくりに活かしたいと考えた。

第２章　平面から立体へ

第１節　立体解釈のための準備

本研究では、線分だけで描かれた図形のみを扱う。そのような図形を**線画**とよぶ。線画は、平面上に置かれた有限個の線分からなる。それらの線分の端点を**節点**とよぶ。

多面体の表面を構成する多角形（多角形の穴をもつこともある）を**面**という。２個の面の共通の境界を**稜線**といい、３個以上の面の共通の境界点を**頂点**という。

線画は、純粋に平面上の情報であり、奥行きに関する情報は含まれていない。しかし、人は立体を表した絵からは奥行きの情報を読み取ることができる。２次元の情報である線画から、３次元の情報である立体を解釈するために、線画について次の４つの仮定をおく。

仮定１：対象とする３次元物体は、多面体である。

したがって、曲面を含む立体は考えない。また折り紙細工のように、厚みのない物体も考えない。

仮定２：視点は一般の位置にある。

この仮定は、立体を投影して線画を作る際の視点位置は、立体の面が線に縮退したり、立体の異なる頂点が線画上で同じ位置を占めたりという特殊な場所には置かないことを意味している。したがって、視点位置を少し変更したとき、対応する線画も連続に変形するだけで、構造が急激に変化することはない。

仮定３：対象物体は不透明な物質でできており、線画には立体の見えている稜線のみが描かれる。

したがって、見えない稜線を破線で描いたりはしないし、影の線や、表面のキズなども描いたりしない。

仮定４：線画には、立体の全体像が描かれている。

以上４つの仮定を満たすものを線画として扱う。

第２節　立体復元方程式

線画を立体として解釈するために、すべての頂点に座標を与える。すべての頂点のz座標が存在すれば、線画は立体として成立するはずである。このz座標を求めるために、平面の方程式を利用する。

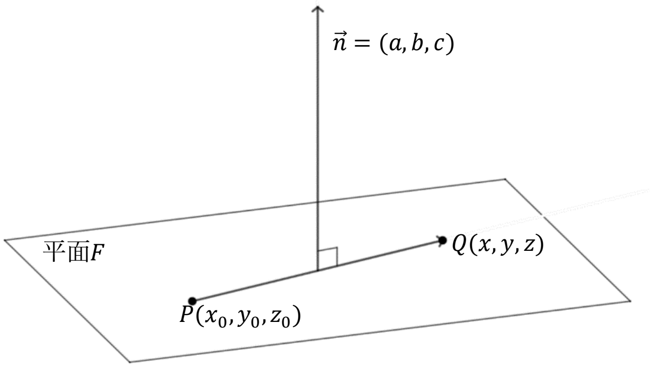


図 2.1　平面と法線ベクトル

平面は、空間中の点と平面に垂直な法線ベクトルが決まれば、一意的に決まる。図 2.1 のように平面F上の点Pの座標を(x_0, y_0, z_0)、法線ベクトルを$\vec{n} = (a, b, c)$とし、平面上の任意の点Qの座標を(x, y, z)とすると、ベクトル$\overrightarrow{PQ}$は平面Fに含まれる。$\vec{n}$は平面Fの法線ベクトルなので、$\vec{n}$と$\overrightarrow{PQ}$のなす角は$90°$である。よって、内積が 0 となるので、

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \tag{2.1}$$

となる。この関係から、

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \tag{2.2}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{2.3}$$

となり、平面の方程式が求まる。よって、一般に平面の方程式は

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{2.4}$$

と表される。この平面の方程式を利用して、線画にも方程式を与える。

線画に描かれている節点に 1 からnまで通し番号をつけて$v_1, v_2, \cdots, v_n$とおく。第 i 節点v_iの座標を(x_i, y_i, z_i)とする。線画は与えられているから、x_i, y_iは既知の実数値であり、z_iだけが未知数である。また、線画に描かれている面にも 1 からmまで通し番号をつける。それを$f_1, f_2, \cdots, f_m$とおく。第 j 面f_jは平面多角形（場合によっては、いくつかの多角形の穴をもった多角形）である。

面f_jの法線ベクトルを$\overrightarrow{n_j} = (a_j, b_j, 1)$とし、定数$d$を$c_j$とすると、面$f_j$の方程式は

$$a_j x + b_j y + z + c_j = 0 \tag{2.5}$$

と表される。方程式の両辺に 0 でない定数をかけても方程式の実質的な意味は変わらない。この性質を利用して、ここではzの係数が 1 になるように調整した。この式では、z軸に平行な平面は表せない。なぜなら、z軸に平行な平面の方程式はzの係数が 0 となるからである。しかし、視点は一般の位置にあると仮定したから、これで不都合はない。

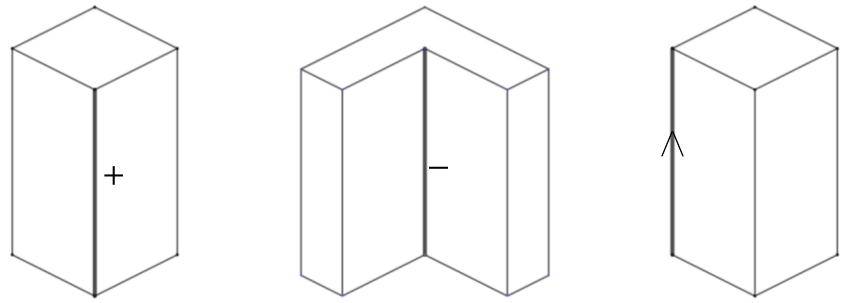
線画にはラベルがついているから、どの頂点がどの面に乗っているかを読み取ることができる。今、第 i 頂点v_iが第 j 面f_jの上に乗っていることが読み取れたとする。このとき、頂点v_iの座標を面f_jの方程式に代入したものが成り立つから、

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0 \tag{2.6}$$

が得られる。頂点とそれが乗っている面とのすべての対に対して、同様の一次方程式が得られる。それらをすべてまとめたものを、与えられた線画に対する**立体復元方程式**とよぶことにする。

第 3 節　遠近不等式

線画が立体として成立するときは、立体復元方程式が解を持てばよい。一方、立体復元方程式の解の中には立体に対応しないものもある。このギャップを埋めるために線画にラベルつける。

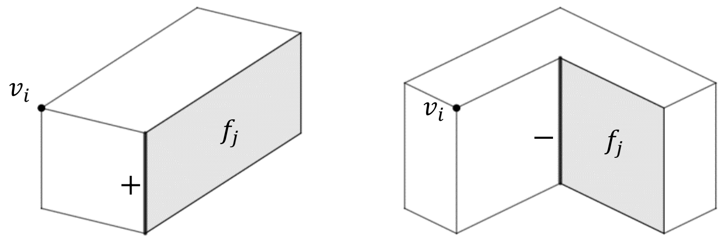


(a) 凸線　　(b) 凹線　　(c) 輪郭線

図 2.2　線画の中の線の分類

立体を正しく描いた線画の稜線は、図 2.2 に示す 3 種類に限られる。その第一は、図 2.2 の(a)に示すように両側の面が見えていて、それらが山の尾根のように視点側へ出っ張って交わってできる稜線である。この線を**凸線**とよび、＋のラベルをつけて表す。第二は、同図の(b)に示すように、両側の面が谷底のように引っ込んで交わってできる稜線である。この線を**凹線**とよび、－のラベルをつけて表す。第三は、同図の(c)に示すように、山の尾根のように出っ張って交わる稜線であるが、一方の面が裏側へ回り込んで見えなくなっている線である。この線を**輪郭線**とよび、矢印をつけて表す。そしてその向きは、この稜線を作っている 2 枚の面がどちらも右側にくるように決める。

この 3 つのラベルを利用して、面と頂点の遠近関係を不等式で表していく。



(a)　　(b)

図 2.3　凸線と凹線が表す遠近関係

図 2.3(a)に示すように、＋のラベルで表された凸線の一方の面をf_jとし、もう一方の面の図の位置に頂点v_iが乗っているとする。凸線は両側の面が山の尾根のように出っ張って接続されてできる稜線に対応しているから、面f_jを延長してできる平面は、頂点v_iより視点の近くを通過する。面f_jを含む平面は

$$a_j x + b_j y + z + c_j = 0 \tag{2.7}$$

で表される。線画平面（すなわちxy平面）上の点(x_i, y_i)を通りz軸に平行な直線が上の平面と交わる点のz座標をz_i'とおくと、点(x_i, y_i, z_i')は上の平面の方程式を満たす。すなわち、

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i' + c_j = 0 \tag{2.8}$$

が成り立つ。頂点$v_i = (x_i, y_i, z_i)$が上の平面より視点から遠くにあるから

$$z_i < z_i' = -a_j x_i - b_j y_i - c_j \tag{2.9}$$

である。これを書き直して

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j < 0 \tag{2.10}$$

が得られる。一つの凸線に対して、その一方の側の面f_jともう一方の面に乗る頂点v_iとの組み合わせは無数にあるが、どの組み合わせをとっても、その稜線で両側の面が尾根をなすように出っ張って交わることを表すという意味では、等価な不等式が得られる。

次に－のラベルで表された凹線を考える。図 2.3(b)に示すように、凹線の一方の面をf_jとし、もう一方の面上の図の位置に頂点v_iが乗っているとする。凹線は、両側の面が谷底のように引っ込んで接続する稜線であるから、面f_jを延長してできる平面は、頂点v_iより視点から遠いところを通過する。これは、式(2.10)の不等式

の向きを逆にした不等式

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j > 0 \tag{2.11}$$

で表される。

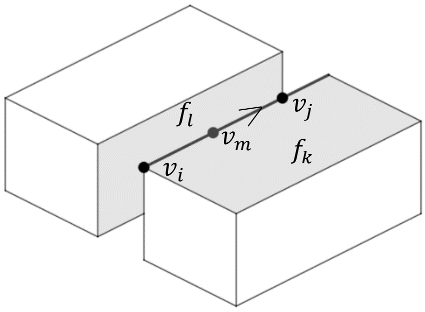


図 2.3　輪郭線が表す遠近関係

最後に矢印のラベルで表された輪郭線について考える。図 2.3 に示すように、節点v_iから節点v_jに向かう矢印のラベルがつけられた輪郭線に対して、その矢印の右側の面をf_k、左側の面をf_lとする。節点v_iは面f_kに乗り、面f_lより視点に近いから、

$$a_k x_i + b_k y_i + z_i + c_k = 0 \tag{2.12}$$
$$a_l x_i + b_l y_i + z_i + c_l \geq 0 \tag{2.13}$$

が成り立つ。式(2.13)には等号も含まれる。なぜなら、頂点v_iは面f_lに接していてもよいからである。

同様に、節点v_jも面f_kに乗り、面f_lより視点に近いから、

$$a_k x_j + b_k y_j + z_j + c_k = 0 \tag{2.14}$$
$$a_l x_j + b_l y_j + z_j + c_l \geq 0 \tag{2.15}$$

が成り立つ。

式(2.13)と(2.15)には等号が含まれるが、この二つの不等式が同時に等号で成り立つことはない。なぜなら、両方の不等式が等号で成り立つときには、この輪郭線の全体が面f_lに含まれることになり、その場合は輪郭線ではなく凹線（すなわち－のラベル）でなければならないからである。

この条件は、次のように表すことができる。線画の中のこの輪郭線の中点をv_mとし、その座標を(x_m, y_m)とする。そして、v_mに対応する 3 次元空間の点(x_m, y_m, z_m)は面f_kに乗っているとする。このとき、その点は面f_lよりも真に視点に近いから、

$$a_k x_m + b_k y_m + z_m + c_k = 0 \tag{2.16}$$
$$a_l x_m + b_l y_m + z_m + c_l > 0 \tag{2.17}$$

が成り立つ。式(2.17)の不等号は等号を含まない。このように、1 本の輪郭線が表す遠近関係の情報は、式(2.12)～(2.17)の六つの式（三つの等式と三つの不等式）で表すことができる。

以上のように、すべての凸線、凹線、輪郭線に対する遠近関係を表す。等式は立体復元方程式に加える。残った不等式をまとめたものを、与えられた線画に対する**遠近不等式**とよぶことにする。

以上のことから、線画が立体として成立するかどうかは、遠近不等式を満たす立体復元方程式の解の存在を調べればよいことがわかった。

第 3 章　検証例

この章では、具体的な例を用いて前章まででわかったことを確かめていく。その手順は以下のように行う。まず、与えられた線画に対して立体復元方程式と遠近不等式を立てる。次に Maxima を用いて、立体復元方程式を解かせる。一次不定方程式であるため、媒介変数で表された解が求まる。その解を遠近不等式に代入し、媒介変数の範囲を求める。その範囲を満たす数値を代入し、未知数の具体的な数値を求める。最後に GeoGebra を用いて、それぞれの頂点の座標を代入し実際に立体として成立しているのかを確かめる。

以下から、頂点v_iが 面f_jに乗っていることを

$$(v_i, f_j)：\ a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0$$

と表す。

また、面f_j上の凸線に対して、面f_jと頂点v_iとの遠近関係を

$$\left(f_j +, v_i\right)：\ a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j < 0$$

と表す。同様に、面f_j上の凹線に対して、面f_jと頂点v_iとの遠近関係を

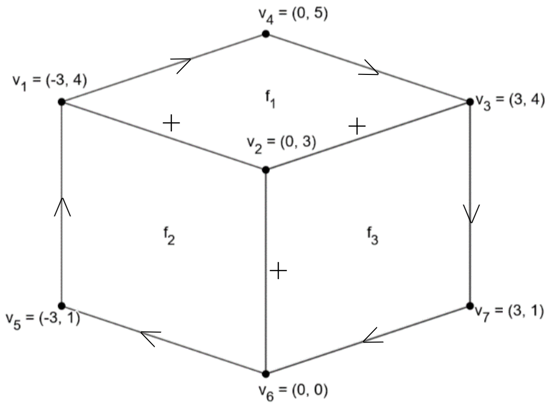
$$\left(f_j -, v_i\right)：\ a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j > 0$$

と表し、面f_jを隠す輪郭線に対して、面f_jと輪郭線上の頂点v_iとの遠近関係を

$$\left(f_j, v_i \rightarrow\right)：\ a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j > 0$$

と表す。

【例 1】立方体（可能図形）



立体復元方程式

F1(v_1, f_1)：$-3a_1 + 4b_1 + z_1 + c_1 = 0$
F2(v_2, f_1)：$3\ b_1 + z_2 + c_1 = 0$
F3(v_3, f_1)：$3a_1 + 4b_1 + z_3 + c_1 = 0$
F4(v_4, f_1)：$5b_1 + z_4 + c_1 = 0$
F5(v_1, f_2)：$-3a_2 + 4b_2 + z_1 + c_2 = 0$
F6(v_2, f_2)：$3b_2 + z_2 + c_2 = 0$
F7(v_5, f_2)：$-3a_2 + b_2 + z_5 + c_2 = 0$
F8(v_6, f_2)：$z_6 + c_2 = 0$
F9(v_2, f_3)：$3b_3 + z_2 + c_3 = 0$
F10(v_3, f_3)：$3a_3 + 4b_3 + z_3 + c_3 = 0$
F11(v_6, f_3)：$z_6 + c_3 = 0$
F12(v_7, f_3)：$3a_3 + b_3 + z_7 + c_3 = 0$

遠近不等式

G1$(f_1 +, v_5)$：$-3a_1 + b_1 + z_5 + c_1 < 0$
G2$(f_1 +, v_6)$：$z_6 + c_1 < 0$
G3$(f_1 +, v_7)$：$3a_1 + b_1 + z_7 + c_1 < 0$
G4$(f_2 +, v_3)$：$3a_2 + 4b_2 + z_3 + c_2 < 0$
G5$(f_2 +, v_4)$：$5b_2 + z_4 + c_2 < 0$
G6$(f_2 +, v_7)$：$3a_2 + b_2 + z_7 + c_2 < 0$
G7$(f_3 +, v_1)$：$-3a_3 + 4b_3 + z_1 + c_3 < 0$
G8$(f_3 +, v_4)$：$5b_3 + z_4 + c_3 < 0$
G9$(f_3 +, v_5)$：$-3a_3 + b_3 + z_5 + c_3 < 0$

Maxima で立体復元方程式の解を求め(%i22)、それを遠近不等式に代入し(%i24)、媒介変数の範囲を計算した(%i26)結果が以下である。

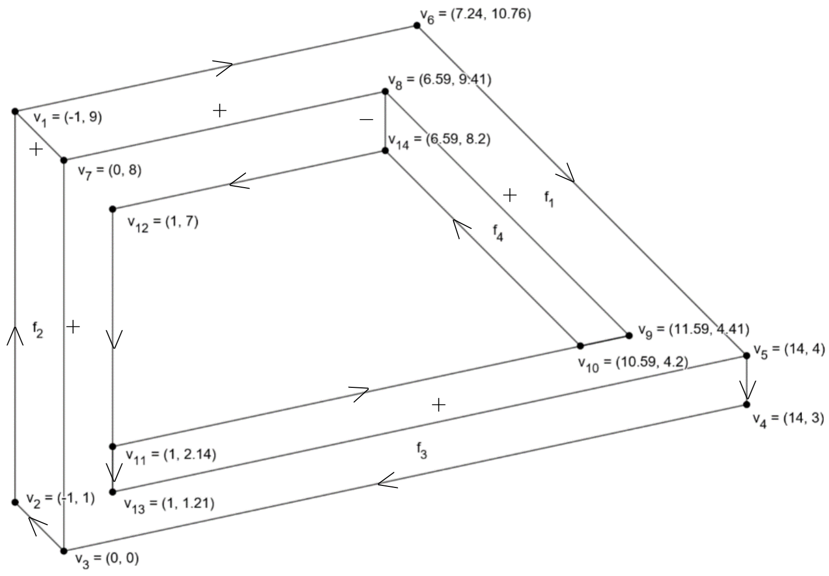
```
--> （前略）

(%i22) eq1:algsys([F1, F2, F3, F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10,F11,F12],
       [a1,a2,a3,b1,b2,b3,c1,c2,c3,z1,z2,z3,z4,z5,z6,z7])$
       ans0:sublis([%r1=r1,%r2=r2,%r3=r3,%r4=r4],%);
(%o23) [[a1=r1,a2=r2,a3=2 r1-r2,b1=r3,b2=r3+3 r2-3 r1,b3=r3+3 r2-3 r1,c1=r4,c2=r4-9 r2+9 r1,c3=
r4-9 r2+9 r1,z1=-r4-4 r3+3 r1,z2=-r4-3 r3,z3=-r4-4 r3-3 r1,z4=-r4-5 r3,z5=-r4-r3+6 r2-3 r1,z6=-r4
+9 r2-9 r1,z7=-r4-r3+9 r2-12 r1]]

(%i24) eq2:[G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7,G8,G9],ans0$
       eq3:expand(eq2);
(%o25) [6 r2-6 r1<0,9 r2-9 r1<0,9 r2-9 r1<0,6 r2-6 r1<0,6 r2-6 r1<0,6 r2-6 r1<0,6 r2-6 r1<0,6 r2-6 r1<
0,3 r2-3 r1<0]

(%i26) load(fourier_elim)$
       fourier_elim([6*r2-6*r1<0,9*r2-9*r1<0,9*r2-9*r1<0,6*r2-6*r1<0,6*r2-6*r1<0,6*r2-6*r1<0,6*r2-6*r1<0,
       6*r2-6*r1<0,3*r2-3*r1<0],[r1,r2,r3]);
(%o27) [r2<r1]
```

この結果から、%i26 を満たすとき(%i28)と満たさないとき(%i30、%i32)の未知数を求め、遠近不等式に代入した結果が以下である。

```
--> （前略）

(%i28) ans1:sublis([r1=2,r2=1,r3=-1,r4=3],ans0);
       eq1:[G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7,G8,G9],ans1;
(%o28) [[a1=2,a2=1,a3=3,b1=-1,b2=-4,b3=-4,c1=3,c2=12,c3=12,z1=7,z2=0,z3=-5,z4=2,z5=-5,z6=
-12,z7=-17]]
(%o29) [-9<0,-9<0,-9<0,-6<0,-6<0,-6<0,-6<0,-6<0,-6<0]

(%i30) ans2:sublis([r1=1,r2=3,r3=2,r4=-3],ans0);
       eq2:[G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7,G8,G9],ans2;
(%o30) [[a1=1,a2=3,a3=-1,b1=2,b2=8,b3=8,c1=-3,c2=-21,c3=-21,z1=-2,z2=-3,z3=-8,z4=-7,z5=22
,z6=21,z7=16]]
(%o31) [18<0,18<0,18<0,12<0,12<0,12<0,12<0,12<0,12<0]

(%i32) ans3:sublis([r1=1,r2=1,r3=-1,r4=2],ans0);
       eq3:[G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7,G8,G9],ans3;
(%o32) [[a1=1,a2=1,a3=1,b1=-1,b2=-1,b3=-1,c1=2,c2=2,c3=2,z1=5,z2=1,z3=-1,z4=3,z5=2,z6=-2,
z7=-4]]
(%o33) [0<0,0<0,0<0,0<0,0<0,0<0,0<0,0<0,0<0]
```

この結果を GeoGebra を用いて検証すると、%i28 は確かに立体として成立することが確かめられた。%i30 は遠近不等式からも読み取れる通り、へこんだような形になっていて読み取ったラベル通りの立体としては成立しないことが確かめられた。%i32 はすべての頂点が同一の面に乗り、厚みのないものになって立体としては成立しないことが確かめられた。

【例２】ペンローズの四角形（不可能図形）



立体復元方程式

F1(v_1, f_1)：$-a_1 + 9b_1 + c_1 + z_1 = 0$
F2(v_5, f_1)：$14a_1 + 4b_1 + c_1 + z_5 = 0$
F3(v_6, f_1)：$7.24a_1 + 10.76b_1 + c_1 + z_6 = 0$
F4(v_7, f_1)：$8b_1 + c_1 + z_7 = 0$
F5(v_8, f_1)：$6.59a_1 + 9.41b_1 + c_1 + z_8 = 0$
F6(v_9, f_1)：$11.59a_1 + 4.41b_1 + c_1 + z_9 = 0$
F7(v_{10}, f_1)：$10.59a_1 + 4.2b_1 + c_1 + z_{10} = 0$
F8(v_1, f_2)：$-a_2 + 9b_2 + c_2 + z_1 = 0$
F9(v_2, f_2)：$-a_2 + b_2 + c_2 + z_2 = 0$
F10(v_3, f_2)：$c_2 + z_3 = 0$
F11(v_7, f_2)：$8b_2 + c_2 + z_7 = 0$
F12(v_3, f_3)：$c_3 + z_3 = 0$
F13(v_4, f_3)：$14a_3 + 3b_3 + c_3 + z_4 = 0$
F14(v_5, f_3)：$14a_3 + 4b_3 + c_3 + z_5 = 0$
F15(v_7, f_3)：$8b_3 + c_3 + z_7 = 0$
F16(v_8, f_3)：$6.59a_3 + 9.41b_3 + c_3 + z_8 = 0$
F17(v_{11}, f_3)：$a_3 + 2.14b_3 + c_3 + z_{11} = 0$
F18(v_{12}, f_3)：$a_3 + 7b_3 + c_3 + z_{12} = 0$
F19(v_{13}, f_3)：$a_3 + 1.21b_3 + b_3 + c_3 + z_{13} = 0$
F20(v_{14}, f_3)：$6.59a_3 + 8.2b_3 + c_3 + z_{14} = 0$
F21(v_8, f_4)：$6.59a_4 + 9.41b_4 + c_4 + z_8 = 0$
F22(v_9, f_4)：$11.59a_4 + 4.41b_4 + c_4 + z_9 = 0$
F23(v_{14}, f_4)：$6.59a_4 + 8.2b_4 + c_4 + z_{14} = 0$

遠近不等式

G1(f_1+, v_2)：$-a_1 + b_1 + c_1 + z_2 < 0$
G2(f_1+, v_3)：$c_1 + z_3 < 0$
G3(f_1+, v_4)：$14a_1 + 3b_1 + c_1 + z_4 < 0$
G4(f_1+, v_{12})：$a_1 + 7b_1 + c_1 + z_{12} < 0$
G5(f_1+, v_{14})：$a_1 + 2.3b_1 + c_1 + z_{14} < 0$
G6$(f_1, v_{11} \rightarrow)$：$a_1 + 2.14b_1 + c_1 + z_{11} > 0$
G7(f_2+, v_4)：$14a_2 + 3b_2 + c_2 + z_4 < 0$
G8(f_2+, v_5)：$14a_2 + 4b_2 + c_2 + z_5 < 0$
G9(f_2+, v_6)：$7.24a_2 + 10.76b_2 + c_2 + z_6 < 0$
G10(f_2+, v_8)：$6.59a_2 + 9.41b_2 + c_2 + z_8 < 0$
G11(f_2+, v_9)：$11.59a_2 + 4.41b_2 + c_2 + z_9 < 0$
G12(f_2+, v_{10})：$10.59a_2 + 4.2b_2 + c_2 + z_{10} < 0$
G13(f_2+, v_{11})：$a_2 + 2.14b_2 + c_2 + z_{11} < 0$
G14(f_2+, v_{12})：$a_2 + 7b_2 + c_2 + z_{12} < 0$
G15(f_2+, v_{13})：$a_2 + 1.21b_2 + c_2 + z_{13} < 0$
G16(f_2+, v_{14})：$6.59a_2 + 8.2b_2 + c_2 + z_{14} < 0$
G17(f_3+, v_1)：$-a_3 + 9b_3 + c_3 + z_1 < 0$
G18(f_3+, v_2)：$-a_3 + b_3 + c_3 + z_2 < 0$
G19(f_3+, v_6)：$7.24a_3 + 10.76b_3 + c_3 + z_6 < 0$
G20(f_3+, v_9)：$11.59a_3 + 4.41b_3 + c_3 + z_9 < 0$
G21(f_3+, v_{10})：$10.59a_3 + 4.2b_3 + c_3 + z_{10} < 0$
G22(f_4+, v_4)：$14a_4 + 3b_4 + c_4 + z_4 < 0$
G23(f_4+, v_5)：$14a_4 + 4b_4 + c_4 + z_5 < 0$
G24(f_4+, v_6)：$7.24a_4 + 10.76b_4 + c_4 + z_6 < 0$
G25(f_4-, v_1)：$-a_4 + 9b_4 + c_4 + z_1 > 0$
G26(f_4-, v_2)：$-a_4 + b_4 + c_4 + z_2 > 0$
G27(f_4-, v_3)：$c_4 + z_3 > 0$
G28(f_4-, v_7)：$8b_4 + c_4 + z_7 > 0$
G29(f_4-, v_{11})：$a_4 + 2.14b_4 + c_4 + z_{11} > 0$
G30(f_4-, v_{12})：$a_4 + 7b_4 + c_4 + z_{12} > 0$
G31(f_4-, v_{13})：$a_4 + 1.21b_4 + c_4 + z_{13} > 0$
G32$(f_4, v_{10} \rightarrow)$：$10.59a_4 + 4.2b_4 + c_4 + z_{10} > 0$

Maxima で立体復元方程式の解を求め(%i56)、それを遠近不等式に代入した(%i58)結果が以下である。

```
-->  (前略)

(%i56) eq0:algsys([F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10,F11,F12,F13,F14,F15,F16,F17,F18,F19,F20,F21,F22,F23],
       [a1,a2,a3,a4,b1,b2,b3,b4,c1,c2,c3,c4,z1,z2,z3,z4,z5,z6,z7,z8,z9,z10,z11,z12,z13,z14])$
       ans0:sublis([%r1=r1,%r2=r2,%r3=r3],%);
```

(%o57)

$$[[a1=r1,a2=r1,a3=r1,a4=r1,b1=r2,b2=r2,b3=r2,b4=r2,c1=r3,c2=r3,c3=r3,c4=r3,z1=-r3-9\,r2+r1,z2=-r3-r2+r1,z3=-r3,z4=-r3-3\,r2-14\,r1,z5=-r3-4\,r2-14\,r1,z6=-\frac{25\,r3+269\,r2+181\,r1}{25},z7=-r3-8\,r2,z8=-\frac{100\,r3+941\,r2+659\,r1}{100},z9=-\frac{100\,r3+441\,r2+1159\,r1}{100},z10=-\frac{100\,r3+420\,r2+1059\,r1}{100},z11=-\frac{50\,r3+107\,r2+50\,r1}{50},z12=-r3-7\,r2-r1,z13=-\frac{100\,r3+121\,r2+100\,r1}{100},z14=-\frac{100\,r3+820\,r2+659\,r1}{100}]]$$

```
(%i58) eq01:[G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7,G8,G9,G10,G11,G12,G13,G14,G15,G16,G17,G18,G19,G20,G21,G22,G23,G24,G25,
       G26,G27,G28,G29,G30,G31,G32],ans0$
       eq02:expand(eq01);
```

(%o59)

$$[0<0,0<0,14\,r1-5\,r2<0,0<0,-5.9\,r2-\frac{559\,r1}{100}<0,0.0>0,14\,r1-5\,r2<0,0<0,0.0<0,0.0<0,0.0<0,0.0<0,0.0<0,0<0,0.0<0,0.0<0,0<0,0<0,0.0<0,0.0<0,0.0<0,0<0,0<0,0.0<0,0<0,0<0,0<0,0<0,0.0<0,0<0,0.0<0,0.0<0]$$

この結果より、不可能図形は立体復元方程式の解を求め、それを遠近不等式に代入すると成り立たないことがわかった。同様に、不可能図形である「ペンローズの三角形」と「窓枠とねじれた桟」でも検証したが、同様の結果が得られた。したがって、これらの線画は立体としては成立しないことが確かめられた。

第 4 章　おわりに

今回の研究では、数学的な視点から平面上の図形が実際に立体として成立するのかを調べた。このように、数学を道具として扱うことで計算によって立体を作ることが可能であることを知り、日常的な現象を解明できることを学んだ。今回の研究では、膨大な方程式や不等式を解く際に、すべてプログラムによってコンピュータに計算させた。現代では、コンピュータに計算作業を任せられるようになった。そのため、人間は計算方針等を立てることに集中でき、能率を上げて仕事ができるようになった。したがって、これからの時代には「数学ができる人材」よりも「数学をどう使うのか考えることができる人材」が必要だと考える。そのような人材を育てるために、今回の研究で得たものを私の目指す「考えることの面白さ」を実感できる授業づくりに活かしていきたい。

参考文献

・杉原厚吉、「だまし絵と線形代数」、共立出版株式会社、2012 年

・杉原厚吉、「だまし絵のトリック　不可能立体を可能にする」、株式会社化学同人、2012 年

・杉原厚吉、「エッシャー・マジック　だまし絵の世界を数理で読み解く」、財団法人　東京大学出版会、2011 年

・北岡明佳、「Newton 別冊　脳はなぜだまされるのか？　錯視完全図解」、株式会社ニュートンプレス、2007 年

・北岡明佳、「Newton 別冊　目の錯覚はなぜおきるのか？　錯視と錯覚の科学」、株式会社ニュートンプレス、2013 年

・横田博史、「はじめての Maxima」、株式会社工学社、2006 年

2 乗に反比例する関数の今日的取扱いに関する一考察

－プロジェクターの投写画面の明るさの測定と関数電卓を使用した関数関係の探究－

埼玉大学　　松嵜　昭雄　　　　埼玉大学教育学研究科　山本　柚
makio@mail.saitama-u.ac.jp　　　yamamoto.y.375@ms.saitama-u.ac.jp

概要：2 乗に反比例する関数は,『尋常小學算術』(緑表紙教科書) の教材「電燈」や昭和 52 年改訂中学校学習指導要領で取り扱われていた。また, 平成 27 年度全国学力・学習状況調査（中学校数学）の結果を踏まえた授業アイディア例「プロジェクターの最適距離を見つけよう」では，プロジェクターの投写距離と投写画面の明るさの関係を取り上げている。2 乗に反比例する関数の今日的取扱いとして，プロジェクターの投写距離と投写画面の明るさを測定し，関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算の結果にもとづく関数関係の探究を提案する。

検索語：相関係数，2 乗に反比例する関数，回帰計算，関数電卓

1.　わが国のこれまでの教育課程における 2 乗に反比例する関数の取扱い

わが国のこれまでの教育課程において, 2 乗に反比例する関数が取り扱われていた, 戦前の『尋常小學算術』（緑表紙教科書）と昭和 52 年改訂中学校学習指導要領を取り上げる。

1.1. 『尋常小學算術』（緑表紙教科書）の教材

『尋常小學算術 第六學年兒童用下』の第七科には「電燈」に関する教材がある。7 つの問題で構成されていて, 目的は「光源からの距離と，この光源によつて照らされる面の明るさとの關係，光によつて生ずる影と距離との關係を考察させ，電燈に於ける電力・燭光を知らせ，電燈料金の計算を行はせ，併せて，我が國の電氣事業の一端を知らせる」（文部省, 1941, p.138）ことである。

問題（1）では，電燈から面までの距離と電燈で照らされた面の明るさとの間の関係について，距離が 2 倍，3 倍になるときに，明るさが 1/4, 1/9 になることが記されている。そして，「明るさは, 距離の倍數の二乗分の一になる」（文部省, 1941, p.144）という関係を図示する。図示されたグラフは，既習の反比例のグラフと似通ってはいるものの，対称性がなく，明るさの縦軸にはなかなか近づかない（図 1）。

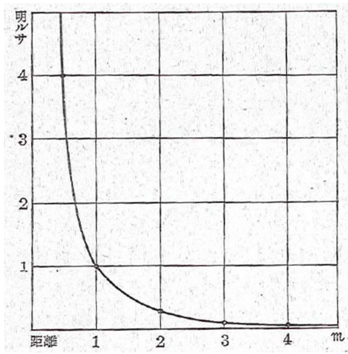


図 1　電燈から面までの距離と電燈で照らされた面の明るさのグラフ（文部省, 1941, p.145）

1.2. 昭和 52 年改訂中学校学習指導要領における取扱い

昭和 52 年改訂中学校学習指導要領では，第 3 学年の「関数」領域で扱っている。「ここで取り扱う関数としては，一次関数に続いて二次関数というように，系統性を重視することよりは，むしろ生徒が日常経験する具体的な事象の中から，一次関数以外のものを取り上げることとし，2 乗に比例する関数，2 乗に反比例する関数がその代表的なものとして取り扱われる」（文部省, 1978, p.65）と記している。そして，これらの関数のグラフを描くことによって，変化や対応の特徴を理解させるとともに，変化の割合が一定でないことを理解させ，変化の割合とグラフの関係についての理解を深めるとしている。

当時の中学校数学教科書では，2 乗に反比例する関数の一例として，光の明るさを題材とした教材が掲載されている（図 2）。

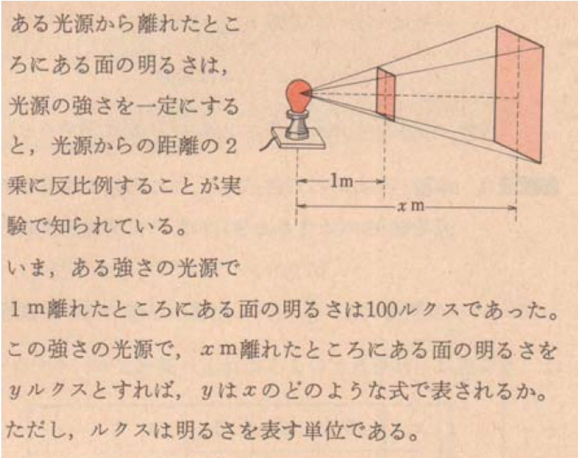

ある光源から離れたところにある面の明るさは，光源の強さを一定にすると，光源からの距離の 2 乗に反比例することが実験で知られている。
いま，ある強さの光源で 1 m 離れたところにある面の明るさは100ルクスであった。
この強さの光源で，x m 離れたところにある面の明るさを y ルクスとすれば，y は x のどのような式で表されるか。
ただし，ルクスは明るさを表す単位である。

図 2　面の明るさを題材とした検定済教科書の教材（宇喜多・茂木ほか 19 名, 1981, p.78）

2.　平成 27 年度全国学力・学習状況調査（中学校数学）の問題における取扱い

平成 27 年度全国学力・学習状況調査の中学校数学 B では，事象の数学的な表現と解釈（プロジェクター）の問題が出題されている。そして，授業アイディア例「プロジェクターの最適距離を見つけよう」では，投映距離と投映画面の大きさの関数関係（投映画面の大きさは投映距離に比例する）について出題されている。

本問題をもとにした授業アイディア例では，教師が「投映距離が 2 倍になったとき，投映画面の明るさは何倍になるのかも考えてみましょう」と発言している（国立教育政策研究所教育課程研究センター, 2015, p.10）。この発言は，プロジェクターに関する資料（図 3）から必要な情報を選択する活動となる。

プロジェクターの光源の明るさを変更することはできない。ここまで，「映像の明るさと投映画面の面積の関係」の式に注目し，プロジェクターの光源の明るさを定数とみることで，映像の明るさと投映画面の面積は，反比例の関係になっていることを導出している。そこで，映像の明るさに着目し，投映距離を近づければ近づけるほど映像の明るさが明るくなり，投映距離を遠ざければ遠ざけるほど映像の明るさは暗くなるという関係について考察していく。映像の明るさは投映距離の 2 乗に反比例する関係になることについて，どのように探究していくかが鍵となる。

3.　プロジェクターの投写画面の明るさの測定と関数電卓を用いた関数関係の探究

Yamamoto et al.（2022）は，暗室で，プロジェクターからの投写距離と投写画面の明るさのデータを測定し，関数関係を探究している。そこでは，グラフを描くことによる関数関係の探究ではなく，関数電卓の「統計計算」モードによる指数回帰計算の結果により，投写距離と投写画面の明るさの関係が 2 乗に反比例する関数になることを導出している（山本他, 印刷中）。

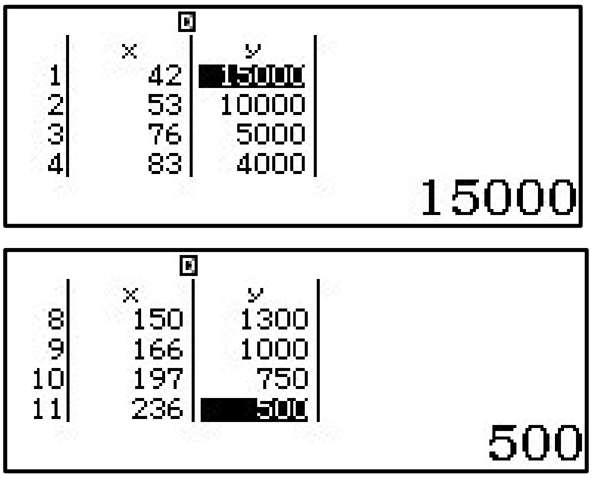
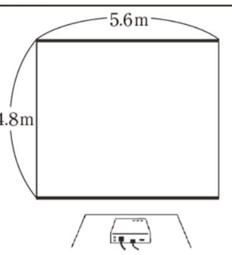


図 4　測定データの入力（一部）

資料



投映距離（m）	投映画面の大きさ 高さ（m）	幅（m）	面積（m²）
1.0	0.6	0.8	0.48
1.5	0.9	1.2	1.08
2.0	1.2	1.6	1.92

○投映画面の大きさは，投映距離によって変わる。
○投映画面の形は，調整されて，いつも長方形になる。
○投映画面の高さや幅は，投映距離に比例する。

映像の明るさと投映画面の面積の関係

（映像の明るさ）＝（プロジェクターの光源の明るさ）÷（投映画面の面積）

図 3　プロジェクターに関する資料（国立教育政策研究所教育課程研究センター, 2015, p.9）

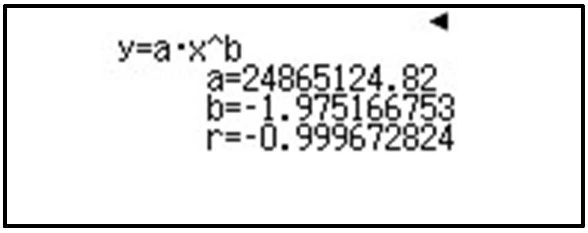


図 5　「統計計算」モードによる
指数回帰計算の結果

相関係数 r の値は，他の回帰計算で算出可能な相関係数の値より絶対値 1 に近く，相関が強いことを示している。つまり，2 乗に反比例する関数による回帰が妥当である。関数電卓使用を前提として関数関係を探究する場合，回帰計算の結果として表示される相関係数の値を根拠として，関数関係の妥当性を検討することになる。なお，動的数学ソフトウェア GeoGebra を用いたグラフ表示は，以下のようになる（図 6）

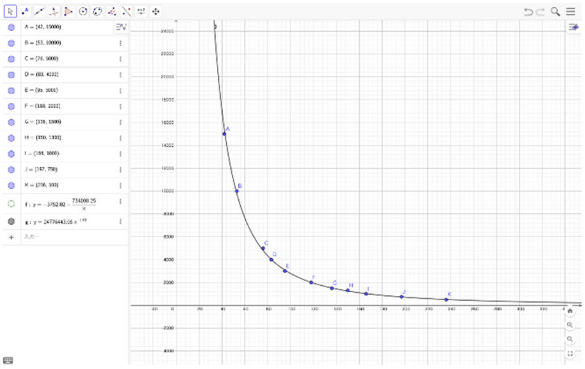


図 6　GeoGebra によるグラフ表示

4.　今後に向けて

本稿では，2 乗に反比例する関数が取り上げられていた，『尋常小學算術』（緑表紙教科書）の教材「電燈」と昭和 52 年改訂中学校学習指導要領をレヴューし，また，平成 27 年度全国学力・学習状況調査（中学校数学）の調査結果を踏まえた授業アイディア例「プロジェクターの最適距離を見つけよう」における教師の発言に注目した。そして，今日的取扱いとして，プロジェクターの投写距離と投写画面の明るさを測定し，関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算の結果にもとづく関数関係の探究を提案した。

現行教育課程では，2 乗に反比例する関数の取扱いはないため，はじめからグラフを描くのではなく，関数電卓等の ICT 利活用を前提とする関数関係の探究が必要となろう。これまでに，大学生対象のワークショップ（山本他，印刷中）や高校生対象の研究授業を実施しており，それらの成果と課題を踏まえて，今日的取扱いの可能性と教育課程への位置づけを展望していく。

註

本研究は，日本学術振興会学術研究助成基金助成金（基盤研究 C）22K02530「ICT 利用を前提とした学校数学と教員養成・研修の数学教育内容の再構築に関する研究」と，埼玉大学がカシオ計算機株式会社と締結した受託研究「数学授業における関数電卓実用化とグローバル展開」（研究代表者：松嵜昭雄）の助成を受けている。

引用・参考文献

[1] 松嵜昭雄，数学科の教材からみた理科との関連－光の明るさを題材とした教材の取扱いを事例として－，2011 年度数学教育学会秋季例会発表論文集，pp.162-164，2011.

[2] 松嵜昭雄,『尋常小學算術』(緑表紙教科書）における教材「電燈」の取扱い，2015 年度数学教育学会夏季研究会（関東エリア）発表論文集，pp.66-69，2015.

[3] 文部省，尋常小學算術－第六學年教師用下－，日本書籍，1941.

[4] 文部省，中学校指導書－数学編－，大日本図書，1978.

[5] 国立教育政策研究所教育課程研究センター，平成 27 年度中学校全国学力･学習状況調査の結果を踏まえた授業アイディア例，pp.9-10，2015.（https://www.nier.go.jp/jugyourei/h27/pdf/mmath_01.pdf　2023.2.3 最終確認］

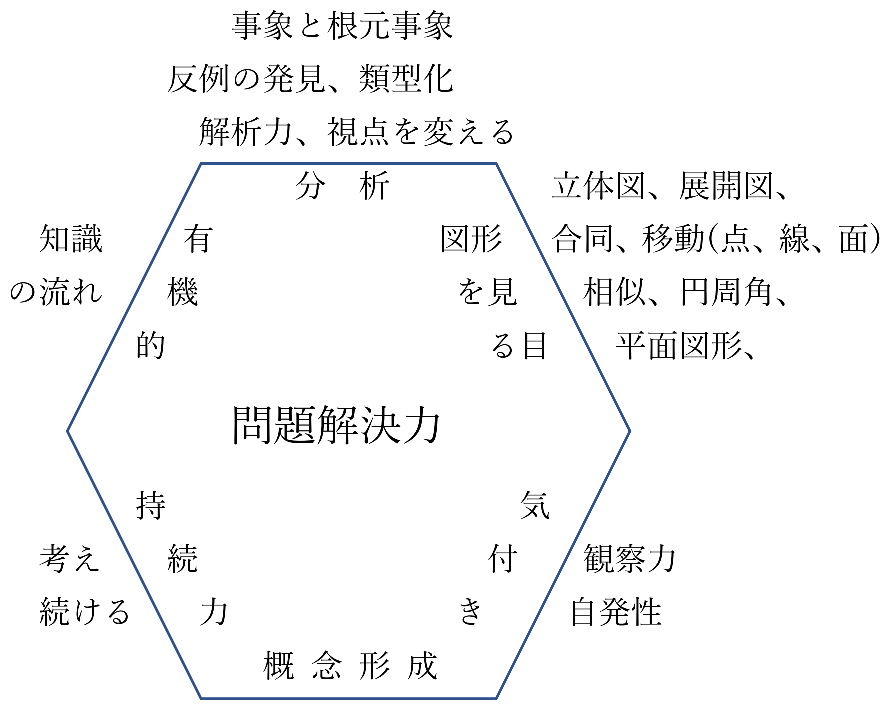
[6] 宇喜多義昌･茂木勇ほか 19 名，中学数学 3，教育出版，1981.

[7] Yamamoto, Y., Hara, K., & Matsuzaki, A., Towards the development of teaching materials for functions of inverse proportion to the square on the premise of using scientific calculator: Through an experiment by measuring the brightness of the projector light. Oral presentation at 10th Research Conference on Science and Mathematics Education, Online, December 2022.

[8] 山本柚・原健太郎・松嵜昭雄，関数電卓使用を前提とする 2 乗に反比例する関数の授業構想に向けて－「プロジェクター」問題を題材とした大学生対象のワークショップの実践報告－，2023 年度第 27 回数学教育学会大学院生等発表会予稿集，印刷中.

コアー課程の固有の考え方

問題解決力を得るために！



◎現象を数式化する　情緒的から理論的へ

自然や宇宙と対話する言葉は数学!!

⌘ 概念形成　既知の概念を修得し更に新い概念を作り出す。

▷用語の理解　　言葉の定義の深い意味

☆教科書を自力で読む

♘観察力と流れで数学の概念を習得する　←暗記しないために

2021 年度の共通テストの問題を上述の視点で見てみる。

数学ⅠA―5 （選択問題）

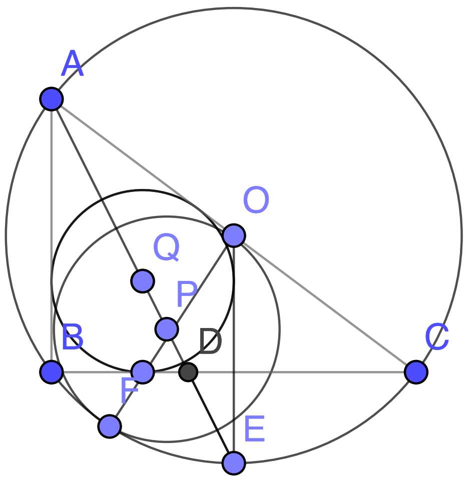
△ABC に於いて、AB=3, BC=4, CA=5 とする。(これは直角三角形です)

∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とすると　BD=アイ, AD=ウ√エオ である。

また、∠BAC の二等分線と△ABC の外接円 O との交点で点 A とは異なる点を E とする。

△ABC に着目すると AE=カ√キ である。

この問題では自分で図を書かねばなりません。(ここも勝負所)



ある程度正確に描くことが大切です。次に以下の事柄を考えます。

1．弧の上にたつ円周角　E が弧 BC の中点

2．三角形の内角の二等分線と対辺の内分の関係

3．三角形の相似を多用

4．方べきは使わないで求められる

5．内接円の半径は△ABC の面積を使い得られる

　後半

△ABC の２辺 AB と AC の両方に接し、外接円 O に内接する円の中心を P とする。円 P の半径を r とする。さらに、円 P と外接円 O との接点を F とし、直線 PF と外接円 O との交点で点 F とは異なる点を G とする。このとき

　　AP=√ク r,　PG= ケ-- r

と表せる。したがって、方べきの定理より r= コ/サ　である。

△ABC の内心を Q とする。内接円 Q の半径は シ で、AQ=√ス である。

また、円 P と辺 AB との接点を H とすると、AH=セソ である。

以上から、点 H に関する次の(a),(b)の正誤の組み合わせとして正しいものは

ク である。

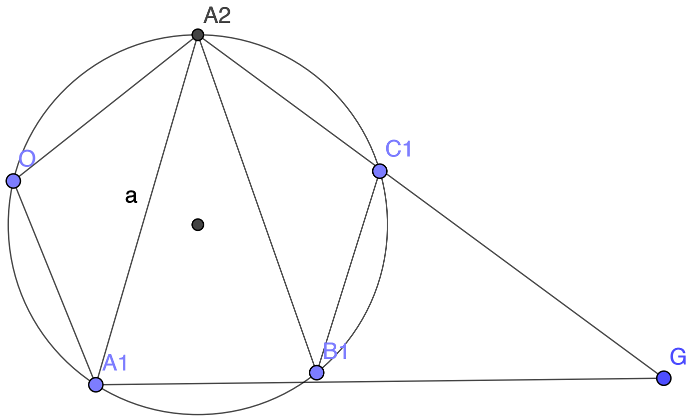
(a)点 H は３点 B,D,Q を通る円の周上にある。

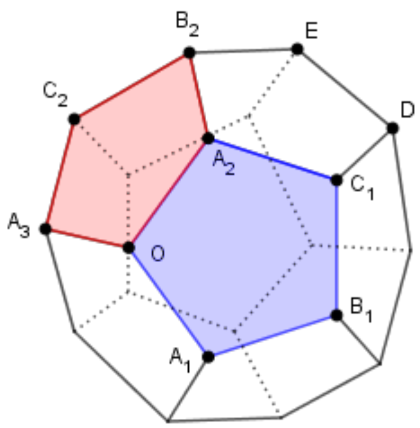
(b)点 H は３点 B,E,Q を通る円の周上にある。

2021 年の共通テストのこの問題や数学ⅡB の選択５の正五角形の問題も特に難しくない図を眺めて気づくことと簡単で基礎的な知識があり使えることが大切です。

同じことが共通テストの数学 IIB の５番（選択問題）でも言えます。
正五角形と正十二面体の問題です。前半の正五角形は中学校の教科書にも出ている問題ですがベクトルを使い難しくしています。後半の正十二面体の問題も取ってつけたような問題で最後の問も勘でできます。問題は提示しません。今年の問題をご覧ください。

1．正五角形には合同、相似の三角形が多々ありそれらから簡単に対角線の長さを求める。共通テストはわざと難しくしている。
2．正十二面体も本質的なことは聞いていない。





此処までは Word ですが、ここから先は式が多いので Tex になります。

高等学校コア

1． 方程式・不等式（同値性を意識して方程式・不等式を解く）
図や直観に頼らずに論理で答えを求める。不等式を扱うために因数分解が必要になる。
2． 指数関数，対数関数（e^xの微分）
3． 三角比，三角関数（正弦，余弦の微分（2 階微分））
4． ベクトル（内積を含む）
5． 数列，Σ，定積分（区分求積）
6． 微分，微分方程式
7． 順列・組合せ，確率，統計（正規分布による近似を除外）
場合の数を求める数式（漸化式）を作ると確率分布を計算できる
（正規分布による近似不要）

『論叢』玉川大学教育学部紀要　第21号　2021，pp. 35～51

［原著論文］

ICT利用を前提とした数学教育内容の開発と実践
――Excelを使った台形の求積公式の応用を例に――

守屋誠司*・高山琢磨**

要　約

1976年頃から元山梨大学教授横地清によりYHPプログラム電卓利用を前提とする学校数学の開発と教育方法の研究が始まった。1979年からはPC利用を前提にする研究も加わり，多くの研究成果が公表されてきた。ところで，現在推進されるICT利用では，教育内容には手をつけずに教師や児童・生徒の教育・学習方法のツールとしての使い方が中心となっている点が，当時とは違う。ICTを利用するならば，従来の方法では難しいため，又は，指導に手間が掛かるため等の理由で指導したくてもできなかった数学内容を授業で扱える。それらは1980年代では実験的授業であったが，現在は普通に実践できる時代となっている。教育内容の再構築例として，Excelリテラシーを前提にした，小学校から積分までの気軽に授業できる面積の指導内容を紹介した。

キーワード：ICT利用，教育内容と実践，Excel利用，台形の求積公式

1．はじめに

図1　PET2001

1976年頃から横河ヒューレットパッカード社のプログラム電卓（YHP55，YHP25など）の利用を前提とする学校数学の内容の再構築と教育方法の研究が横地清により始まった（横地（1983））。1979年からは，前提が当時はマイコンと言われていた図1のPET（コモドール社）の利用に移行し，カラー表示ができるNEC社のPC8001・PC6001やPC6601・PC8801・PC9801に続いた。数学教育学会（現会長：砂田利一）では，横地清（元山梨大学教授）・鈴木正彦（大阪教育大学名誉教授）の山梨大学グループ，町田彰一郎（埼玉大学名誉教授）の埼玉大学グループ，岡森博和（大阪教育大学名誉教授）の大阪教育大学グループが先進的な研究を行っていた[1)]（図2参照）。

所属：*教育学部教育学科　**東京都大田区立志茂田中学校　受理日　2022年2月25日

黒板とノートによる従来の指導方法では内容が抽象的過ぎて児童・生徒の理解が難しいため，又は，指導に手間と時間が掛かるため等で指導できなかった数学内容を，PCを含むICTを利用して授業で扱えるようになることを明らかにしてきた。1980年代ではこれらを実験的授業で実証してきたが，現在はそれらを普通に実践できる時代となったのである。

図2　数学教育関係のPC書籍

しかしながら，現在は，学習内容はそのままにして，教授・学習方法としての教師や児童・生徒のツールとしての使い方が推進されている。ICTの利用は，これだけで良いのか？　学校数学の内容の開発と構築やカリキュラムの再構成が必要となっているときが来ているのである。そこで，数学学習をより充実するためにExcelリテラシーを前提にした小学校から積分までの面積の指導内容を紹介する。

2. 数学教育におけるICT利用の原則について

GIGAスクール構想一色の時期であるからこそ，1970年代からICTの数学教育利用の研究を行ってきた数学教育学会，その中で中心となっていた横地の考えを再確認するためにまとめてみたい。

横地（1982a，図3参照）では，

「電卓やパーソナル・コンピュータの普及は，当然，数学教育にも大きな影響を及ぼすことになる。それは，次の方面にあらわれてくる。

第1は，電卓やパーソナル・コンピュータが授業に生かされ，授業の展開が変わる。

第2は，教師はもとより，子どもや生徒が電卓やパーソナル・コンピュータを活用し，自然や社会の数学的諸問題に，計画的に取り組むようになる。

第3は，第1，第2の影響と組みになって，電卓やコンピュータの活用を前提にしての，教育課程や教育内容の再構成が試みられる。

図3　PC利用の初期の書籍

第4は，コンピュータを活用して，子どもや生徒，それぞれの進度，それぞれの関心に応じた，個人別，グループ別の，学習や研究が進められる。

電卓やコンピュータの普及は，上に述べた諸方面への影響を予想させる。数学教育の発展を願う私どもとしては，遅れることなく，こうした変化に対処しなければなるまい。」

と，まだ少数のマニアがPCを手にし始めた頃に，数学教育への影響と利用について提言していた。なお，この時期は，数学教育学研究のフラッグシップ的な国立大学の著名な数学教育学研究者は，PCの数学教育利用が数学教育学の研究対象になるのか？　と疑問を呈していた時代でもあった。

1）現実から生データを収集できる。

教材・素材は机上だけでなく，特に量に関するデータは自分で実際に探して集めることから始まる。横地（1977）には，デジタルタイマー付き電卓（註：筆者は，プログラム電卓YHP55と聞いている）を使って，電車の速度を測った話がある。現在なら，スマホを使って，写真，動画，ラップなど，生のデータを簡単に収集できる。子どもでも同様な作業を通して量などの学習が可能である。

2）Real活動が原点である。

横地（2001，p.7）では，次の定義がされている。

「Real活動：手足を動かし，人と人とが，情をかわして，この現実の世界で進める実際的活動。

Virtual思考：情報機器が表現する，画像，音声などの表現に依存する仮想的な思考。

そして，算数教育の方向は，情報機器を，

（a）広範で高次の数学の学習に活用する。

（b）広範で高次のReal活動の促進に活用する。

（c）世界的な視野での，数学的研究と数学的活動（註：数学的作品の製作などを意味し，学習指導要領での使い方とは異質である）に活用する。

（d）広範な人たちへの成果の伝達に活用する。」

としている。そして，次の警句で締めくくっている。

「本来，Real活動でこそ可能となる，数学的研究（数学的概念や法則の獲得など）や数学的活動（数学的作品の製作など）を，さらに一段と広範囲で高次なものにするためにこそ，情報機器を活用する。別様に言えば，Real活動に果たす手足や現実世界の役割を奪い，Virtual思考でくらませるために，情報機器を活用するのではないのである。加えて言えば，数学的思考や数学的活動を堕落させるために，情報機器を活用するのではない。」（横地（2001），p.11）

3）問題解決の過程でPCを利用する。

横地（1982b）では，プログラム電卓を使った問題解決の過程を示している。現在なら，PCを含めたICT利用と言い換えられる。

問題化 → 数学化 → プログラム（電卓）化 → 実用化

実用化して求められた課題をさらに問題化すれば，その後に盛んに使われる数学的モデリング図や学習指導要領の算数・数学の学習過程イメージ図と重なる。

さらに，教員養成の数学教育で学生に指導の際にプログラム電卓YHP35Eを使わせた実践から，学生が，

「①数学が実際的なものになる。②数学の応用を容易にする。③数学を創るようになる。」

と，その効果を述べている。

4）学校数学の内容の開発とカリキュラムの再構成が必要である。

横地（1986）では，小学校1年生が，BASIC言語でプログラミングできることを実践的に明らかにしている。その結果は，数学内容における従来の学年配当に問題を投げかけている。つまり，PC利用を前提とする，新たな数学カリキュラムの再構成の必要性に迫られているのである。小学校に関しては以下が考えられる。

① 小学校1年生でもアルファベット（英語のLINE，PRINT，PAINTなど）に抵抗がなくプログラミングができる。英語の指導時期の再考を迫っているが，英語教育が推進されている現在では，1年生からアルファベットを使用することは全く障害にならないであろう。
② 200 × 320ドットの座標系を使える。座標概念の指導時期の再考を迫る。
③ プログラミングの中で変数概念を使える。①と同様で，□や○を使うのではなくて，文字xや文字式を低学年から指導できる（守屋（2014）参照）。

一方で，この時期に，PC上のLOGO言語を使ったタートルグラフィックスの実践も盛んに行われていた。ここでは,角と角度,内角と外角について幼児から扱えることが示されていた。現在では，第5学年でScratch言語を使って正多角形を作図する内容となっている。その授業では，

④ 低学年から角と角度，内角と外角概念，
⑤ 負の数を含めた座標系，
⑥ IF文に相当する論理，
⑦ 等号，不等号の意味と使い方，

などを抽象的・理論的でなく，スプライトを操作するという具体的活動を通して学べる。

3. ICT利用を前提とした数学内容と教員養成での実践について

台形の求積公式は,現行の学習指導要領では小学校第5学年で指導される。2000年代初めは,学習指導要領の指導内容から外れて高校で扱われることになったが，検定教科書上では数年で元に戻った。公式を覚えてもその後に使うことはない台形の求積公式を何のために教えるのか？　台形の求積公式の教育的意義を再確認する必要がある。

そこで，意義の一つとして，台形の求積公式を中学校，高校で利用して，最終的に定積分を近似計算する区分線形近似への発展を考えてみたい。その際に，単なる近似計算の方法を知るだけでなく，死海やアラル海の面積変化，オゾンホールの面積変化，北極海の氷の面積変化を

扱い，台形の求積公式が環境問題の分析にも使えるという，実生活との関連を学ばせたい。

ICTとしては，学校に普及しているExcel等の表計算ソフトウェアを使う。曲線の円弧近似では，中心角の大きさを求めるために逆三角関数（ACOS（ ））と，ラジアンと度の変換関数であるDEGREES（ ）とRADIANS（ ）を使う。このように，今まで内容が難しい，指導の時間が掛かる，手計算に時間が掛かる，手計算がそもそもできないなどの理由で，学校数学の内容から外されていた数学が,ICT利用で手が届く内容となる。教員養成の教科指導法の中では，教育実践例を示してデータを分析させ，その上で，数学的活動を追体験させ，指導上の留意点をまとめる講義をしたいと考える。

不定形の面積を台形の積み重ねで近似して求める実践は，1987年頃は，BASIC言語を使って行われた（図4）。1990年代になると表計算ソフトのLotus1-2-3やExcelを使って実践された（図5）。しかし，一般には普及していなかった。原因は明らかで，教科書に載っていないからである。PCが普及していない学校があるため,教科書にそれらを載せられない実態があった。しかし，今は違う！　今こそ，どこででも実践できる内容である。

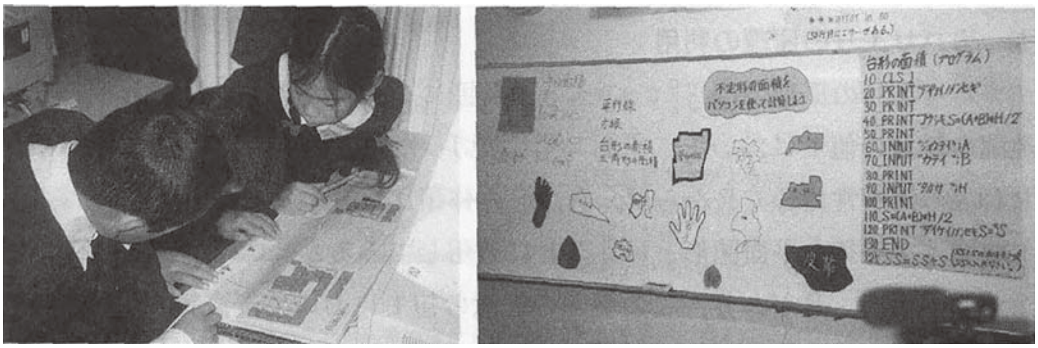


図4　1987年の小学校5年生の実践，プログラムを自分で入力する

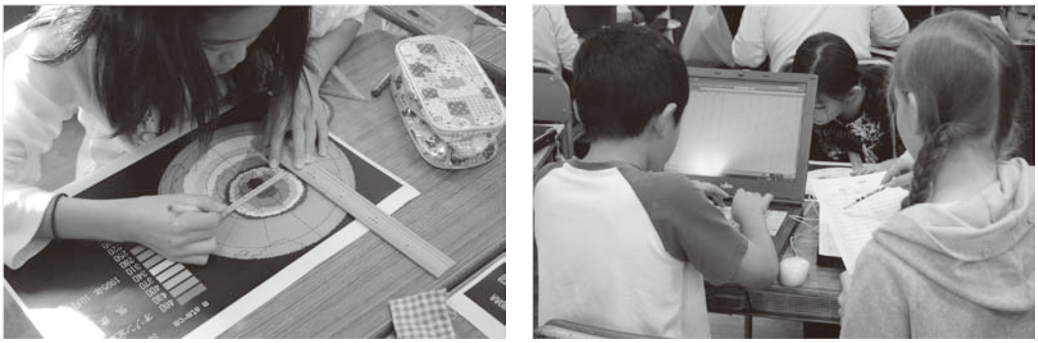


図5　2003年，小学校6年生によるオゾンホールの広がりを調べる実践

カリキュラムの簡易提案

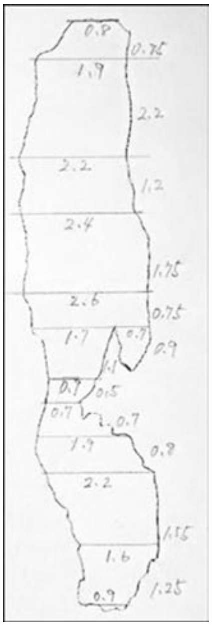
守屋（1990）では，パソコンの利用は，問題解決のための方法を多様にすることができる点で重要であるとして，パソコンを使った問題解決の手順のモデルを示し具体的な例として不定形の求積を採り上げた。直線での近似，円弧での近似について数学的解析を行い新たな教育内容を提案している。これをもとに小学生と大学生を対象とした教育実験を行い，モデルが妥当であり内容が適切であることを検証している。守屋（1990）に数学的解析内容が詳しいので参考にして欲しい。ここでは簡単に紹介する。

●ステップ1　小学校高学年

図6の様に不定形を台形の積み重ねで近似する。不定形を平行線で区切り，個々の台形の面積を求めて合算する。Excelを使う。

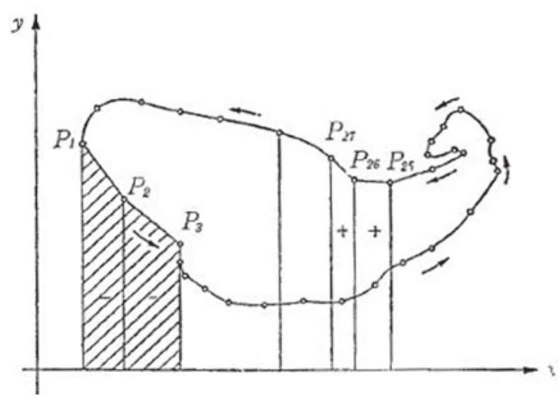
●ステップ2　中学校

解析的方法として座標を導入し，台形を多角形で近似する。座標を使うことで，計算をExcelで行え，台形近似による面積を求められる。このときの注意点として，多角形の頂点にあたる各点P_iを取る際には，図7の様に不定形を時計の反対回りで取るとする。



	A	B	C	D	E	F
1	死海の面積					
2						
3		1931年				
4		上底	下底	高さ	面積	
5	1	0.8	1.9	0.85	=(B5+C5)*D5/2	
6	2	1.9	2.2	2.20	4.51	
7	3	2.2	2.4	1.20	2.76	
8	4	2.4	2.6	1.75	4.20	
9	5	2.6	2.4	0.75	1.31	
10	6	1.7	0.9	1.10	0.94	
11	7	0.7	0.0	0.90	0.63	
12	8	0.9	0.7	0.50	0.70	
13	9	0.7	1.9	0.70	1.02	
14	10	1.9	2.2	0.80	1.40	
15	11	2.2	1.6	1.55	2.40	
16	12	1.6	0.9	1.25	1.00	
17				全体	22.01	cm^2
18		15km => 2.2cm				
19		1cm => 15/2.2=6.82km				
20		1cm^2 => 6.82*6.82km^2=46.51km^2				
21		1cm^2=	46.5	km^2	1023.8	km^2

図6　小学校での例



	A	B	C	D	E	F
1	山中湖の座標と面積					
2	p(i)	x(i)	y(i)	s(i)		
3	p(1)	1	5.2			
4	p(2)	2	3.9	=(C3+C4)*(B3-B4)/2		
5	p(3)	3.2	2.9			
6	p(4)	3.3	2.6	-0.14		
7	p(5)	3.3	2.2	-0.07		
8	p(6)	3.8	1.9	-1.04		
9	p(7)	4.4	1.6	-0.94		
10	p(8)	5.2	1.5	-1.29		
11	p(9)	6.1	1.6	-1.39		
12	p(10)	7	1.6	-1.44		
13	p(11)	7.7	2	-1.24		

図7　中学校での例

図8の多角形の例で説明する。$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$とするとき，台形$P_1x_1x_2P_2$の面積S_1を，$S_1=(y_1+y_2)(x_1-x_2)/2$とする。こうすると$x_1<x_2$なので面積はマイナス値となる。P_3P_4の面積は$x_3>x_4$なのでプラス値となる。最後に，各台形の面積を加えると，プラス・マイナスが相殺されて求める多角形の面積となる。

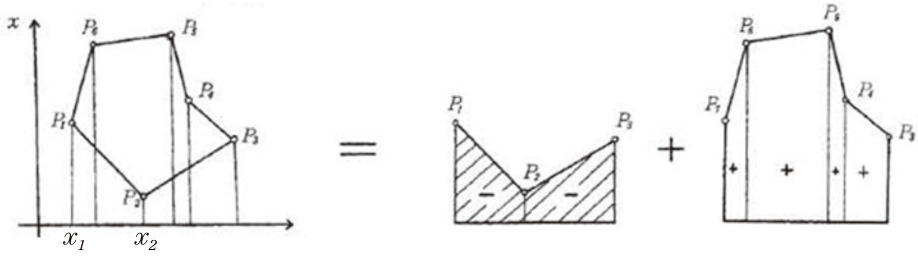


図8

●ステップ3　高等学校

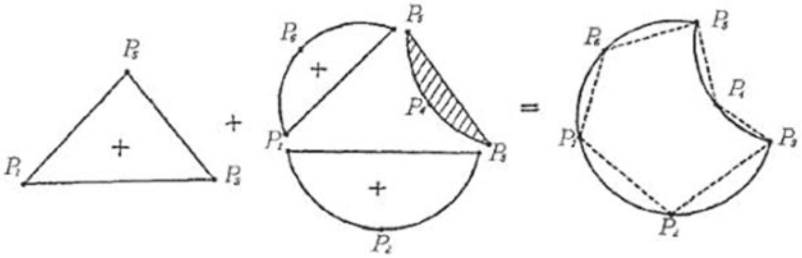


図9　高等学校での例

曲線で囲まれた不定形の面積をより正確に求めるために，曲線部分を円弧で近似する方法を導入する。ステップ2の方法で不定形の座標を読み取り，まず，台形近似によって多角形の面積を求める。次に，多角形からはみ出した部分を円弧近似してプラスの面積の弓形を求める。多角形の内側に入ってしまう弓形はマイナスの面積として求める。最後に多角形分の面積と弓形分の面積を加えれば，曲線で囲まれた不定形の面積を近似的に求めることができる。

円弧近似を行う場合には，不定形の周上の3点P_{2k-1}，P_{2k}，P_{2k+1}を決めると，作図で3点を通る円O_{2k}の中心と半径r_kを求められる（図10参照）。ここでは，3点の座標から中心座標(a_k, b_k)と半径r_kの長さを計算する。さらに，弦$P_{2k-1}P_{2k+1}$の長さと半径から，余弦定理を使って中心角θ_kを求められる。このとき，cos^{-1}が必要になるため，逆三角関数を指導する。最後に，扇形$O_{2k}P_{2k-1}P_{2k+1}$から三角形

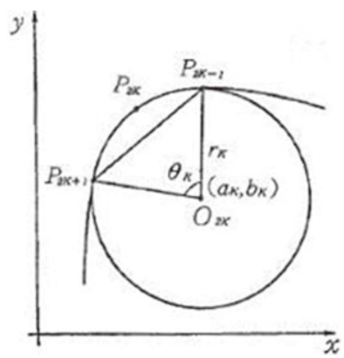


図10

$O_{2k}P_{2k-1}P_{2k+1}$を引けば，弓形$P_{2k-1}P_{2k}P_{2k+1}$の面積が求められる。なお，目測で中心角$\theta_k < 180°$となる座標を取らないと，正しい中心角を求められないため，座標を取る際の注意が必要である。この方法は，3点の取り方によって，次に示した①②③の方法の順で難しくなる。

①　3点P_1，P_2，P_3のうち1点P_1を原点$(0, 0)$に，もう1点をx座標上$P_3(x_3, 0)$とする。高校1年生ならば，円の方程式は使わず，弦の垂直2等分線の交点が中心となることから，弦P_1P_2の垂直2等分線の式を求めた上で，$\frac{x_3}{2}$をこのxに代入することで中心の座標を求められる。中心角の大きさを求めるのには余弦定理とcos^{-1}を使う。

②　3点のうち1点を原点$(0, 0)$とする。高校2年生ならば，円の方程式を利用して，二元連立方程式を解くことで，中心の座標を求められる。

③　3点とも原点を含まないとする。高校3年生ならば,円の方程式と3×3行列・行列式を使い,三元連立方程式を解くことで中心の座標を求められる。数式は複雑になるが，Excelに式を入力しておくことにより，3点の座標入力するだけで，弓形の面積を求められる。なお，プログラミングができるのであれば，画像の周囲をクリックするだけで多角形近似ができ，周長と面積を求めることが可能である。

●ステップ4　高等学校

区分求積から積分を導入する。また，数値計算によって実際値を求め，積分を実用に応用する。

さて，このカリキュラムでの指導の意味をまとめると次のようになる。

1）小学校5年生のときに学んだだけで，それ以後は一生使わないと思われている台形の求積公式の使い道を継続的に学ぶ。

2）細かに切って求積してそれらを合算するという求積方法を学ぶ。後の積分の区分求積や区分線形近似の基本的な考え方を学んでいることになる。

3）図形を処理する場合の，解析的方法や解析幾何の導入となる。

4）覚えても無駄だと思われている台形の求積公式や入試でしか使わない余弦定理(他の数学も)が，現実世界の問題解決に使えることを学ぶ。例えば，死海やアラル海の縮小の様子を調べられ，環境問題の理解につなげられる。

5）Excelを利用することによって，計算に煩わされないで数値計算できる。

6）Excelを利用することによって，逆三角関数でも数値解が求められる。

Excelは，表計算ソフトとして成績処理などを題材に大学では指導されるが，このように数値計算でも利用でき，プログラミングよりも指導が容易であるというメリットがある。

4. 教員養成での指導事例

算数科指導法・算数・数学科指導法での指導事例

教員養成では，小学校教員免許取得課程の学生にはステップ1で死海の面積変化を求めさせている。図11はExcelを使わずに面積を求めたときのレポートであるが，最近は入学時に自分のPCを持つため，Excelを使って計算させている。

良くできる学生にはレベルを上げてステップ3の①の円弧近似を使って北海道の周長を求めさせた。

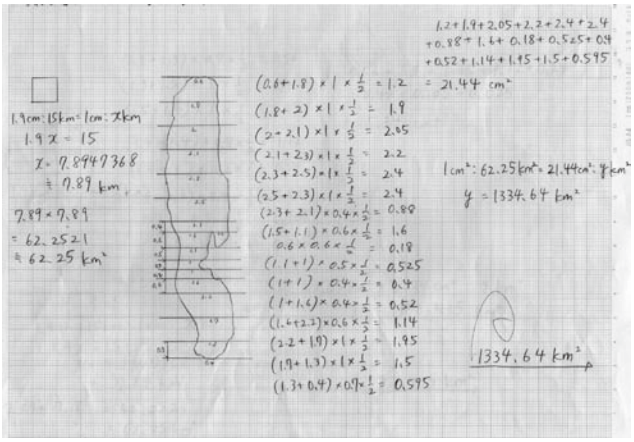


図11　死海の面積変化の考察の一部

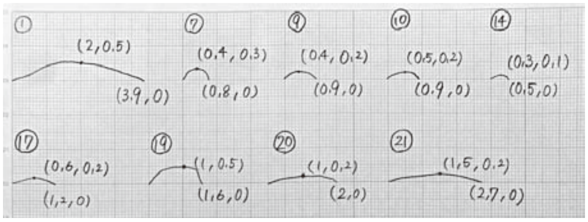


図12　北海道の周長を曲線と直線で区切り，座標を取る

F3 =(B3^2+C3^2-B3*D3)/(2*C3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	弧の長さを求める										
2		X1	Y1	X2	a	b	r	cosθ	θ	弧P0P1P2	実長
3	1	2	0.5	3.9	1.95	-3.55	4.05	0.54	57.56	4.07	150.64
4	2									0.10	3.70
5	3									1.20	44.45
6	4									0.20	7.41
7	5									0.30	11.11
8	6									0.15	5.56
9	7	0.4	0.3	0.8	0.40	-0.12	0.42	-0.84	147.48	1.07	39.71
10	8									0.90	33.34
11	9	0.4	0.2	0.9	0.45	-0.40	0.60	-0.12	96.73	1.02	37.63
12	10	0.5	0.2	0.9	0.45	-0.40	0.60	-0.12	96.73	1.02	37.63
13	11									0.40	14.82
14	12									1.00	37.04
15	13									0.30	11.11
16	14	0.3	0.1	0.5	0.25	-0.25	0.35	0.00	90.00	0.56	20.56

図13　Excelによる北海道の周長の計算

図12で，①⑦⑨⑩⑭は円弧で近似し，②～⑥⑧は直線と見なして近似している。

数学科指導法の中・高等学校教員免許取得希望の学生への指導では，図14のように，ステップ2とステップ3の②③を扱っている。

点	x	y	a	b	r	θ	l	円近似の各長さ	直線での各長さ	各台形面積
P0	0	0	9.992857	5.847619	11.57808	24.35027	4.920694	1233.639916		1.17
P1	1.3	-1.8							556.6655513	5.4
P2	3.3	-3.6	4.493137	-3.50294	1.197078	85.67794	1.790064	448.7861003	674.5904205	1.185
P3	3.6	-4.3							190.9347089	4.05
P4	4.5	-4.7	5.9	-5.15	1.470544	53.1301	1.363629	341.8747018	246.920276	0
P5	4.5	-5.6							225.6385998	1.16
P6	4.7	-6	8.046396	-3.00946	4.487951	75.44628	5.909592	1481.591199	112.1207217	9.925
P7	6.2	-7.1							465.3467302	27.495
P8	10.1	-7	11.24017	-4.24653	2.990199	68.93981	3.585854	899.0079797	978.0686355	14.1
P9	12.1	-7.1							502.0454933	8.71
P10	13.4	-6.3	16.75851	-8.88936	4.2406	43.43529	3.214903	806.0069451	382.6915273	6.38
P11	14.5	-5.3							372.7065485	8
P12	16.1	-4.7	-27.15	29.72059	55.27512	4.375527	4.221215	1058.299997	428.412676	5.006
P13	17.4	-3							536.5418787	2.58
P14	18.6	-1.3	17.675	-1.225	0.928036	67.38014	1.091375	273.6180534	521.6927902	-0.105

点	1つ飛ばしの台形面積	扇形の面積	三角形の面積	扇形－三角	凹凸判断その1	凹凸判断その2	各誤差
P0	5.94	28.48550507	27.63571429	0.849790786	1	1	0.849790786
P1							
P2	4.98	1.071423443	0.714460784	0.356962658	1	1	0.356962658
P3							
P4	1.07	1.002637954	0.865	0.137637954	1	1	0.137637954
P5							
P6	35.1	13.26097895	9.747657658	3.513321291	1	1	3.513321291
P7							
P8	21.945	5.343278899	4.14416185	1.19911705	1	1	1.19911705
P9							
P10	14.85	6.816881275	6.182446809	0.634434466	-1	1	-0.634434466
P11							
P12	7.5	116.6640992	116.5507353	0.113363926	1	1	0.113363926
P13							
P14	-0.425	0.506417242	0.3975	0.108917242	1	1	0.108917242

図14　3点の座標で円弧を近似する

5. 中学校での実践事例

1）研究の目的

本実践研究の目的は，①表計算ソフト（グーグルスプレッドシート，以下スプレッドシートと略）を用いて直線で囲まれた図形の面積を求められるか。②その活動を通して，積分につながる面積計算の概念獲得ができるか。③数学の有用性に気づけるかを実践を通して検討することである。

2）授業の実際

①　授業の目標

本授業は3時間扱いの授業であり，それぞれの時間の目標は以下のとおりである。

(1) スプレッドシートの基本操作の習得および，スプレッドシートを用いて台形の面積（1次関数とy軸と平行な2本の直線，そしてx軸とで囲まれた図形の面積）を求められる。

(2) スプレッドシートを用いて，xy平面上における直線で囲まれた図形の面積が求められる。

(3) スプレッドシートを用いて，アラル海の面積を求めることができる。

②　対象と授業日

都内公立中学校2年生，3つの発展クラス（合計84名）を対象に，2021年12月下旬の期末試験後の比較的自由な時期に各クラスとも3時間ずつ実施した。

④　指導内容と実際

共著者の高山が授業者となって一斉授業の形態で実施した。スプレッドシートは，Excelと同等のグーグルスプレッドシートを利用した。

1時間目は，スプレッドシートへ台形公式を入力した。スプレッドシートの基本操作を習得することと，スプレッドシートを用いて台形の面積（1次関数とy軸と平行な2本の直線，そしてx軸とで囲まれた面積）を求められることを目標とした。

1クラス目は台形の公式の復習を行ったのち，1次関数とx軸とで挟まれた面積を求める関数をスプレッドシートに打ち込ませた。しかしながらその過程において理解が難しい生徒がい

たため，2クラス目からは，先にスプレッドシートに入力された台形の求積公式の式を示して，その意味を考えさせた。こちらの指導方法が生徒にとって，理解し習得しやすくなることが明らかとなった。

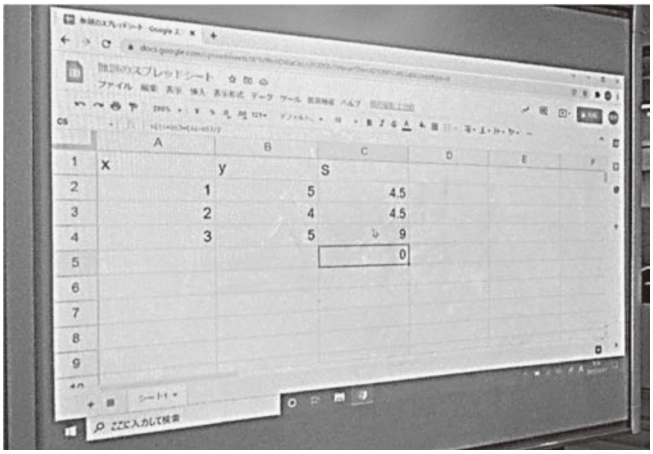


図15　台形公式の入力練習

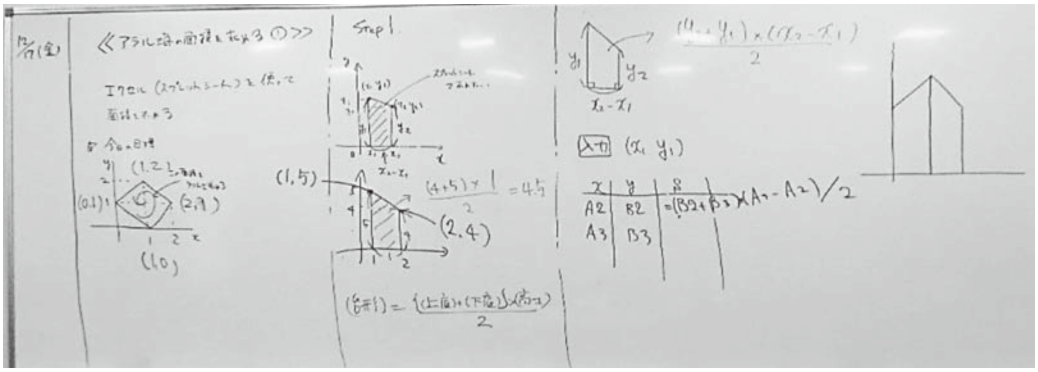


図16　ひし形を例にして求積方法を学ぶ

2時間目は，前時のスプレッドシートを用いて，ひし形の4点をスプレッドシートに入力し，4つの台形の面積を求め，2つの台形の面積の和から，残りの2つの面積の和を引くことで求めることができるようになること，そしてその意味を理解することを目標とした。教室前方の電子黒板に生徒のスプレッドシートを投影しながらの説明で，すべての生徒がひし形の面積を求めることができた。さらに，形を自由に変えて面積を求める活動を行った。なお，スプレッドシートの折れ線グラフ作成機能を使うと座標の値から元の図形を描画できることも扱った。

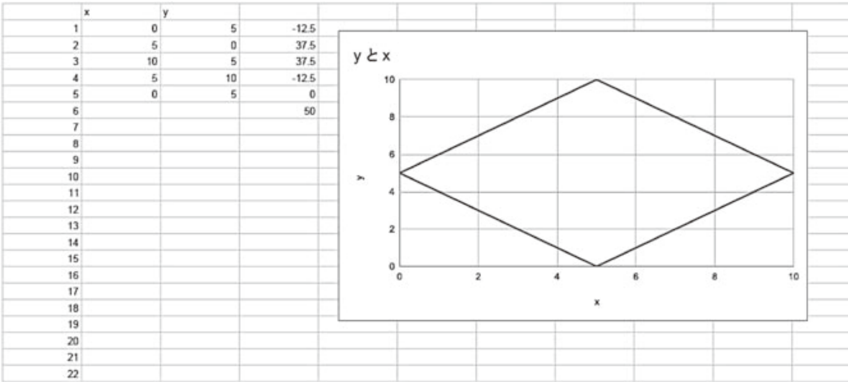


図17　スプレッドシートと座標からの描画

3時間目は，アラル海を座標上に置き，周囲の座標を取ってスプレッドシートに入力し，面積を求めた。次に，地図の縮尺に従って地図上の面積をkm^2に換算できることを目標とした。

今回は，1960年と2014年のアラル海の面積を対象に，3班ずつ担当を決めてスプレッドシートを共有にすることで共同編集を行い,手分けして面積を求めた。そして，その値をもとに実際の面積を求めた。あらかじめ教師がアラル海の画像を描画ソフトGeogebraに取り込み,座標上の地図を印刷して配布した。さらに,点の座標もあらかじめシートに記入しておくことで,入力作業の時間を短縮して授業を行った。スプレッドシートには前時の面積を求める関数を入力したシートを各班にグーグルクラスルームを通して配布し，4人で分担し入力した。そして，縮尺を考慮してアラル海の面積を求め，代表の生徒がホワイトボードに出て説明を行った。入力の過程では，生徒はスプレッドシートの折れ線グラフ機能を用いて概形を確認し，入力ミスを発見し修正する班もあらわれた。

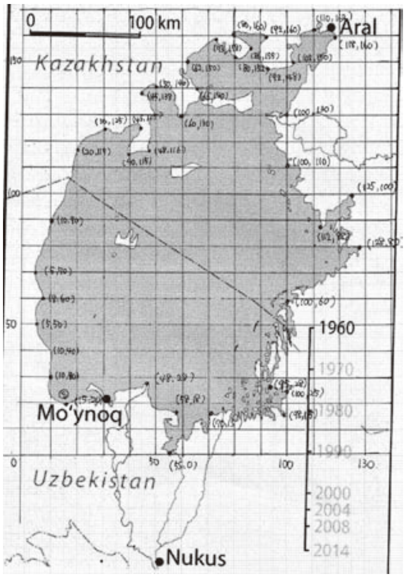


図18　1965年のアラル海の資料
（Wikipediaのアラル海資料を加工）

スプレッドシートの結果がそれぞれ，1960年は114.8cm^2，2014年は14cm^2であった。地図の縮尺は100kmが4cmで概算したことから,1cmが25kmとなった。従って,1960年の面積は,$114.8\times25\times25=71{,}750km^2$となり,2014年は$14\times25\times25=8{,}750km^2$と算出された。この結果は,クラスの代表が説明を行い全体で共有した。概算のため，実際の統計とは多少異なる値となったが，アラル海の面積が約10分の1に縮小していることは理解された。

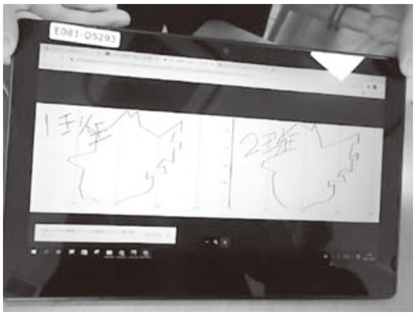


図19　入力座標が正しいかを確認する

図20　km^2への変換の説明場面

3）授業後のアンケート結果と自由課題

授業後にグーグルフォームを用いて授業アンケートを実施した。その結果，スプレッドシートの使い方の理解，スプレッドシートに座標を入力し面積が求まることの理解については，おおむね目的が達成されたと考えて良い。また，数学の学習の大切さについても84％の生徒が感じることができた。しかしながら，アラル海の面積縮小に対する社会問題については，扱う時間の関係からあまり興味関心を高めることができなかった。そのため，授業終了後の冬休みの課題として，アラル海の縮小に関する自由研究を課題として課すこととした。

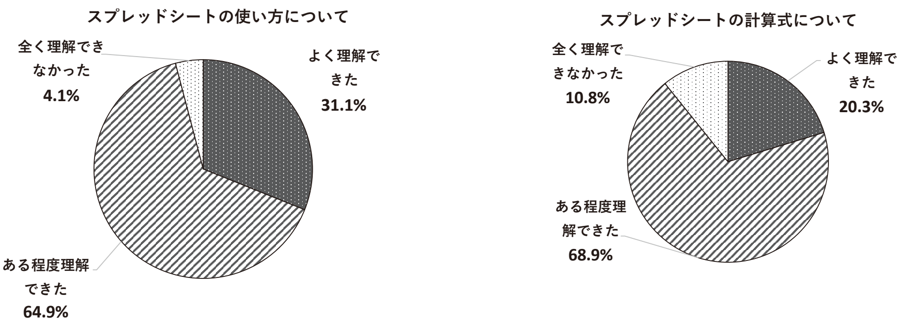


図21　スプレッドシートの理解について

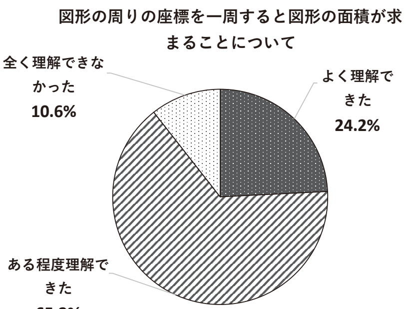


図22　数学内容の理解について

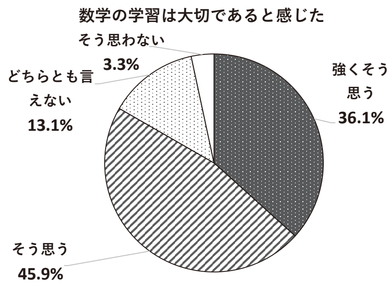


図23　数学学習の重要さについて

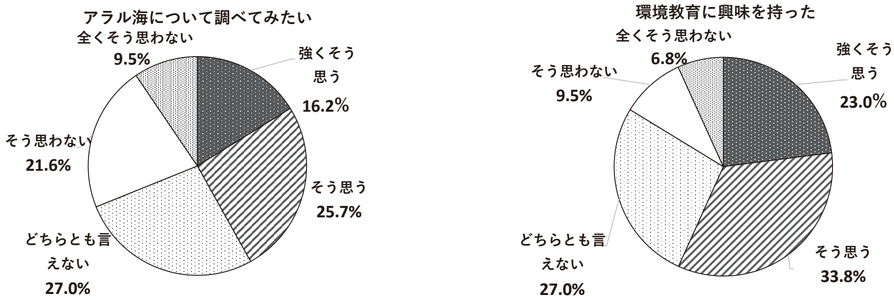


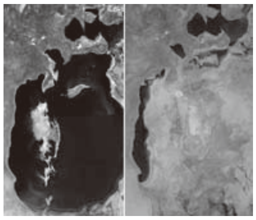
図24　数学と社会事象の関わりについて

授業終了後の冬休みの課題の提出はグーグルクラスルームからの提出としたところ，図25のようなレポートが提出され，興味関心を持って調べた生徒が多数いたことが分かった。

アラル海の面積減少の原因　解決策

アラル海の面積の減少の原因
・ソ連がアラル海に流れ込む２つだけの川、アムダリヤ川やシルダリヤ川から灌漑の水をとって、乾燥地帯を農地に変えようと水をとったのが原因となってアラル海の面積の減少になった。

昔のアラル海
・河畔の湿地帯にはヨシや林が広がり、ペリカンやフラミンゴなどの渡り鳥が飛来し、アラル海は「シルクロードのオアシス」と呼ばれるほど、生態系が豊かな湖だった。



ウイキペディア「アラル海」より

解決策

昔からすべときだったこと

・アムダリヤ川やシルダリヤ川だけから灌漑の水をとって、乾燥地帯を農地に変えようとするのではなくもっと違う川から水をとってきて農地に変える。
・乾燥地帯では、農地を作ろうとするのではなく、その地にあった産業をして、なるべく環境に悪影響を及ぼさないようにする。

今からすべきこと

・海水を淡水に変えて湖に水を入れる。
・別の川から水を引き入れて湖の水を増やす。
・灌漑する水の量を制限して、湖をもとの状態に戻す。

まとめ
・昔は、シルクロードのオアシスと呼ばれていたアラル海の面積が減少したのは、人間が川から灌漑をしたからだ。だから、今からでもアラル海の自然環境をもっと改善していくべきだと思う。
参考・引用文献：ウイキペディア「アラル海」

図25　生徒のレポート

4）実践授業研究のまとめ

今回の実践を研究目的ごとに振り返る。

①　スプレッドシートを用いて図形の面積を求められるか。

図21にあるように，スプレッドシートの操作や数式による自動計算については，問題なく理解できる内容であった。ただ，スプレッドシートの関数をあらかじめ示したのちに，その意味を生徒に考察させる指導が効率的であり，生徒の理解もしやすいことが分かった。なお，グーグルクラスルームで配布し，共同編集できるスプレッドシートは班活動に有効であった。

②　積分につながる面積計算の概念獲得ができるか。

定積分を近似計算する方法の一つである区分線形近似については理解できたと思われる。しかし，図22から，一周すると求積できることを全く理解できなかった生徒が10.6％いたことから，凸多角形のひし形での説明に加えて，簡単な凹多角形を使ったより丁寧な説明が必要であると考える。

③　数学の有用性に気づけるか

図23から，ここで学んだ数学を有用と思っていない生徒がまだ7%ほどいるが，80%の生徒は数学を有用と思っており，目標はおおむね達成できたかと思われる。アラル海の面積の縮小という社会的課題を皆で考察，討論する時間を取れれば，そこで使われた数学の有用性をより意識できると思われる。なお，図24からは，この授業を通して社会事象への関心が向けられ，生徒の興味関心を高め，取り組みに良い影響を与えることができたと考える。

6. まとめと課題

横地がプログラム電卓を使った数学教育や数学科指導法教育を始めたときに，筆者は学生として直接に指導を受けた一人である。一般の電卓持ち込み可能であった統計学の試験で，購入したばかりのプリンタ付きプログラム電卓（HP19Cで，当時の新採用教員の初任給（約10,000円）と同額）を持参した。データを入力するだけで10×10の相関表が作成でき，各種基本統計量や相関係数，回帰直線の係数がプリントアウトされるプログラムを組んでの参加である。データを処理する問題はすぐに終わり，監督の教官も興味を持って横で見ていた。これからは統計教育や数学の授業が変わるなと思ってから，40数年。やっと，時代が追いついてきた！教授学習方法の改善として，既製動画を見せたり，子どものノートを書画カメラで撮り電子黒板等に映して発表させ，話し合わせたりして良い。教師と児童・生徒の教授学習ツールとしてICTを大いに使うべきである。ただし，その中では，頭脳の延長となりうるICTを使って，数学を問題解決に使えるまで学べるような指導を普及させなければならない。

1980年代は実験的試みであったが，あれから40年！　大手を振ってPCを使った実践ができる時代になった。そこで，喫緊の課題は，GIGAスクール時代に合わせ，従来の枠にとらわれずに新たな教育内容とカリキュラムを再構築しなくてはならないことである。

付記

本稿は，2021年度数学教育学会秋季例会「Organized Session A「ICTを利用した数学の教育内容の視点」」で発表した内容を元に，実践内容を加えてまとめ直した。

註

1）1980年代になると山梨大学・埼玉大学・大阪教育大学の研究グループからは，研究成果を報告する論文が多数発表される。また，研究成果は以下の書籍として出版されていた。
横地清編著『現在算数・数学講座4　コンピュータと電卓の活用』ぎょうせい，1982
町田彰一郎編著『パソコンと数学教育 その利用と限界』みずうみ書房，1984
横地清編著『ぼくとわたしのパソコン初級，中級，上級』共立出版，1984，1985，1985
横地清編著『教師のための授業に生かすパソコンⅠ，Ⅱ，Ⅲ』共立出版，1986，1987，1988

岡森博一編著『算数教育とパソコン』ぎょうせい，1987
岡森博一編著『数学教育とパソコン』ぎょうせい，1987
町田彰一郎編著『教材ソフトと実戦事例 基礎編，算数・数学編，入門編』ホープクリエイト，1988

参考・引用文献

横地清『大人のための算数教育』ぎょうせい，1977
横地清「はじめに」『現在算数・数学講座4　コンピュータと電卓の活用』横地清編，ぎょうせい，1982a，iii
横地清「プログラム電卓の意義と活用」，同上，1982b，215-271
横地清「実数と解析の教育をどう改めるか―円曲線と放物線曲線を例として―」『現在算数・数学講座2　数・代数・解析の体系化と実践』横地清編，ぎょうせい，1983，139-254
横地清編著『教師のための授業に生かすパソコンⅠ』共立出版，1986
守屋誠司「問題解決とパーソナル・コンピュータの利用」『研究集録 第23号』兵庫女子短期大学，1990，38-49
横地清「情報社会における算数教育」『算数を中心とする情報教育の展開』横地清・守屋誠司編著，明治図書出版，2001，7-35
守屋誠司「小学校低学年からの代数の指導について―カザフスタンの教科書を参考にして―」数学教育学会『数学教育学会誌』2013/Vol.54/No.1・2，2014，35-48
ウィキペディア「アラル海」，https://ja.wikipedia.org/wiki/アラル海（2022.2.25.確認）

Development of Teaching Materials for Mathematics Education Using ICT and Their Practice: Application of the Formula for Finding the Area of a Trapezoid Using Excel

Seiji MORIYA, Takuma TAKAYAMA

Abstract

Around 1976, Kiyoshi Yokochi, a former professor at the University of Yamanashi, began developing teaching materials and researching educational methods for school mathematics using the YHP programable calculator. Since 1979, research on the premise of using a PC has been added, and many research results have been published. By the way, the current use of ICT is different from that of those days in that it focuses on the use of ICT as a tool for teaching and learning methods for teachers and students, without changing the educational content. With the use of ICT, we can teach mathematics content that is difficult or time-consuming to teach using conventional methods. What was an experimental class in the 1980s can now be practiced in regular classes. As an example of restructuring the content of mathematics education, we introduced the content of teaching area from elementary school to integral calculus, which can be easily taught on the premise of Excel literacy.

Keywords: ICT use, Educational content and practice, Excel use, Trapezoidal quadrature formula

プログラミングを関連付けたユークリッド互除法の指導法に関する一考察

大田区立志茂田中学校　　　高山　琢磨

E-mail：170000325@edu.ota-school.ed.jp

概要：ユークリッド互除法はアルゴリズムの複雑さ，そして指導法の問題点から生徒の理解が難しいとの指摘がなされてきた。本研究ではその指導上の問題点を整理し，指導改善を行う手立てを考察した。その問題点を解決する一つの手立てとして，プログラミングを関連関連付けることで，生徒の理解が促進され，さらに不定方程式，中国剰余定理とプログラミングを関連づけることでそれらの理解を深める教材となることが明らかとなった。ユークリッド互除法とその活用に関するカリキュラムの在り方についても試案を述べる。

検索語：ユークリッド互除法，プログラミング，中国剰余定理

1. はじめに

ユークリッド互除法の理解と数学史に対する関心を高めること，そして不定方程式の特徴づけを理解し，連立合同式の解法に対する理解を促進するための手立てについて考察する。特に，本研究では，プログラミングを通して，ユークリッド互除法に対する理解を深め，その有用性に気付くことをねらいとし，ユークリッド互除法と不定方程式に単元における新たなカリキュラムの提案を行う。

2. ユークリッド互除法指導の問題点

現行の学習指導要領（検定教科書）では，高校1年生の教科書数学A第3章整数の性質，第2節「ユークリッドの互除法」として扱われている。ユークリッド互除法はアルゴリズムの複雑さから，生徒の理解に困難性を抱える単元の一つであり生徒の理解に困難性があることがしばしば指摘されている。筆者はその原因として6点の問題点を挙げている。（2021 高山）

3. 教材開発とその実践

ユークリッド互除法は，最古のアルゴリズムとして知られる。プログラミングへの活用と理解の促進を目指した指導法として，図を用いた互除法の理解を促す指導法を一例として挙げている。（2021 高山）

3.1 ユークリッド互除法とプログラミング

最大公約数を求める Basic プログラム

```
10 INPUT "x=" x
20 INPUT "y=" y
30 a=x/y
50 c=x-y*INT(a)
60 IF c=0 THEN
    GOTO 100
ELSE GOTO 60
    60 x=y
    70 y=c
    80 GOTO 30
    100 PRINT y
```

図1

上述の面積図を用いたユークリッド互除法のアルゴリズムをプログラミングに取り入れることで，ユークリッド互除法への理解を深める。（図1）（2021 高山）

4. 不定方程式の指導改善

4.1 不定方程式の指導法の改善

（1）解の存在条件について

二元一次方程式 ax+by=c…①について a と b の最大公約数を G とする。 （1）c が G の倍数ならば，①の整数解は無数 に存在する。 （2）c が G の倍数でないならば，①の整数解 は存在しない。 特に，a と b が互いに素のとき，①の整数解は 必ず存在する。それを理解した上で，不定方程式の活用として，中国互除法のアルゴリズムとそのプログラミングを考察する。

4.2 二元一次方程式の整数解を求めるプログラミング

（1）左辺が 1 の場合
105x+38y=1
（右辺が 1 の場合）のプログラミングは図 2 のようになる。左辺が 1 でない場合はこのプログラムを改良することで得られる。

```
10 INPUT "a=",a
20 INPUT "b=",b
30 x=1
40 y=(1-a*x)/b
50 z=INT(y)
60 IF y-z=0 THEN
    GOTO 100
ELSE GOTO 70
    70 x=x+1
    80 GOTO 40
    100 PRINT x
    110 PRINT y
    120 END
```

図 2

（3）不定報定期の連分数による解法
不定方程式には次のようなアルゴリズムがあることが知られている。
例えば，
105 x ＋38 y ＝1 について，

$$\frac{105}{38}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}$$

と連分数展開できる。

ここで，最後の$\frac{1}{2}$を省いて，

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$$

$$=\frac{47}{17}$$

$$\frac{105}{38}-\frac{47}{17}=\frac{105\times 17-38\times 47}{38\times 17}$$

この式より，

$$105\times 17-38\times 47=-1$$

がえられる。

5. 不定方程式の活用として中国剰余定理

中国剰余定理の問題は次のよう問題である。
「2 で割ると 4 あまり 3 で割ると 5 あまる数を求めよ。」
x≡2（mod 4)…①
x≡4（mod 5)…②
⇒x≡-6≡14（mod 20）

5.1 この連立方程式を解くアルゴリズムは 2 つの不定方程式が同時に満たされる解を求めればよい。従って，不定方程式のプログラムを 2 回行うことで解を求められる。（図 4）

5.2　連立合同式の解の公式を用いたプログラミング（図 3）
(n,m)=1 のとき
x≡y（mod　n）
x≡z（mod　m)
nb+ma=1 を満たす a,b を求めて
x≡may+nbz（mod nm）
が解となっている。

```
10 INPUT "y=",y
20 INPUT "z=",z
30 INPUT "n=",n
40 INPUT "m=",m

50 a=1
60 b=(1-a*m)/n
70 c=INT(b)
80 IF b-c=0 THEN
    GOTO 100
ELSE GOTO 90
    90 x=x+1
    80 GOTO 60
    100 PRINT a
    110 PRINT b
    120 x=m*a*y+n*b*z
    130 PRINT x
    120 END
```

図 3

5.3 連立合同式の解の周期性に関する考察
「2 で割ると 4 あまり 3 で割ると 5 あまる数を 5 つ求めよ。」
次のように，結果を並べて表示するプログラムを作成することで，連立合同式の解が周期的に表れることが観察される。（図 4）

```
10 INPUT "y=",y
20 INPUT "n=",n
25 INPUT "z=",z
27 INPUT "m=",m
29 p=0
30 x=1
40 a=(x-y)/n
50 b=INT(a)
60 IF a-b=0 THEN
    GOTO 90
ELSE GOTO 70
    70 x=x+1
    80 GOTO 40
    90 c=(x-z)/m
    100 d=INT(c)
    110 IF c-d=0 THEN
        GOTO 200
    ELSE GOTO 120
        120 x=x+1
        130 GOTO 40
        200 PRINT x
        205 x=x+1
        210 p=p+1
        220 IF p<5 THEN
            GOTO 40
        ELSE GOTO 300
            300 END
```

```
y=2
n=4
z=4
m=5
14
34
54
74
94
OK
```

図 4

6. 和算のアルゴリズムのプログラミング

6.1『孫子算経』には「ある数を 3 で割ると 2 余り，5 で割ると 3 余り，7 で割ると 2 余るという。その数は何か」という問題が載っている。
解法として，「3 で割ると 2 余る数に 140 があり，5 で割ると 3 余る数に 63 があり，7 で割ると 2 余る数に 30 がある。この三つの数をすべて加えると 233 となるが，この 233 から

105 を次々に引いて行くと 128，23 となり，23 が条件を満たす最小の数である」

x≡2（mod 3)…①

x≡3（mod 5)…②

x≡2（mod 7)…③

このアルゴリズムをプログラムで表すと図５のようになる。

```
10 INPUT "y=",y
20 INPUT "n=",n
25 INPUT "z=",z
25 INPUT "m=",m
27 INPUT "w=",w
29 INPUT "l=",l


30 x=1
40 a=(x-y)/n
50 b=INT(a)
60 IF a-b=0 THEN
    GOTO 90
ELSE GOTO 70
    70 x=x+1
    80 GOTO 40
    90 a=(x-z)/m
    100 b=INT(a)
    110 IF a-b=0 THEN
        GOTO 140
    ELSE GOTO 120
        120 x=x+1
        130 GOTO 40

        140 a=(x-w)/l
        150 b=INT(a)
        160 IF a-b=0 THEN
            GOTO 200
        ELSE GOTO 170
            170 x=x+1
            180 GOTO 40
            200 PRINT x
            120 END
```

```
y=2
n=3
z=3
m=5
w=2
l=7
23
OK
```

図５

6.2　吉田光由『塵劫記』のアルゴリズム□□

「ある数を 3 で割ると 2 余り，5 で割ると 1 余り，7 で割ると 2 余るという。その数は何か」

x≡２（mod 3), x ≡ 1(mod 5), x ≡ 2(mod7)

5×7=35 は 5 と 7 で割り切れ，3 で割ると 2 余る。3×7=21 は 3 と 7 で割り切れ，5 で割ると 1 余る。3×5=15 は 3 と 5 で割り切れ，7 で割ると 1 余るので，その 2 倍の 30 は 3 と 5 で割り切れ，7 で割ると 2 余る。

```
10 INPUT "y=",y
20 INPUT "n=",n
25 INPUT "z=",z
25 INPUT "m=",m
27 INPUT "w=",w
29 INPUT "l=",l
30 p=m*l-n*INT(m*l/n)
50 q=l*n-m*INT(l*n/m)
60 r=n*m-l*INT(n*m/l)
70 s=m*l/p*y
80 t=l*n/q*z
90 u=n*m/r*w
100 PRINT p
110 PRINT q
120 PRINT r
130 f=s+t+u
200 PRINT f
120 END
```

この 3 つの数を加えた

```
y=2
n=7
z=1
m=5
w=2
l=3
86
OK
```

35＋21＋30＝86 は 3 で割ると 2 余り，5 で割ると 1 余り，7 で割ると 2 余る。（図６）

図６

7. ユークリッド互除法のカリキュラムの試案

ユークリッド互除法の理解と数学史に対する関心を高めること，そして不定方程式の特徴づけを理解し，連立合同式の解法を理解する。そしてプログラミングを通して，その有用性に気付くことをねらいとして次のカリキュラムを提案する。

（1）ユークリッド互除法の導入…面積図
（2）ユークリッド互除法の証明
（3）ユークリッド互除法のプログラミング
（4）不定方程式と最大公約数
（5）不定方程式 ax+by=c の特徴づけ
（6）不定方程式 ax+by= c の代数的解法
（7）不定方程式 ax+by= c のプログラミング
（8）中国剰余定理の代数的解法
（9）中国剰余定理のプログラミング
（10）和算との関連について

引用・参考文献

[1] 高等学校検定教科書　数学 A　数研出版（2011）

[2] 文部科学省（2017）：中学校学習指導要領解説 技術・家庭編.

[2] 高山琢磨（2016）：数学科における BASIC プログラミングによるアクティブ・ラーニングに関する一考察，日本科学教育学会年会発表論文集 40，307-308.

[3] 高山琢磨(2018)：数学教育におけるプログラミング的思考に関する一考察，日本科学教育学会年会発表論文集 42，517-518.

[4] 高山琢磨，武沢 護，渡辺暁生（2019）：干支を利用したプログラミング的思考に関する一考察，日本科学教育学会年会発表論文集 41，307-308.

[5] 高山琢磨(2020)：中学校数学科におけるプログラミング的思考を育成する教材開発に関する一考察，早稲田大学数学教育学会，P22-38.

[6] 高山琢磨(2020)：Scratch を利用したプログラミング的思考に関する一考察，日本科学教育学会 年会論文集，P627-628.

[7] 高山琢磨(2020)：ユークリッド互除法の指導法に関する一考察（2）数学教育学会冬季研究会発表論文集（印刷中）

現実場面への円周角の定理の活用を目指した実践の提案

大田区立志茂田中学校　　　　　　高山琢磨

takumata@outlook.com

概要：一人一台端末が実現した今，数学の授業におけるタブレットを用いた数学的活動は重要な課題となっている。本稿では，中学校3年次における円周角の活用場面において，徳島県の高校入試に出題されたラグビーのゴールキックの問題を取り上げ，GeoGebra を用いて円周角に対する考察する活動を行った。そこでの学習者の考察ならびに，その過程における GeoGebra による作図についての実践の紹介を行う。

検索語：円周角，GeoGebra，作図

1. はじめに

円周角の活用については，学習指導要領では次のように述べられている。「図形領域の学習では，三角形の相似条件などを基にして図形の基本的な性質を論理的に確かめたり，平行線と線分の比についての性質を見いだし，それらを確かめたりできるようにするとともに，相似な図形の性質を具体的な場面で活用できるようにする。さらに，円周角と中心角の関係や三平方の定理を見いだし，それらを具体的な場面で活用できるようにする。」その活用場面については，「日常生活で円周角と中心角の関係を活用する場面として，例えば，中心の分からない丸い木材の直径を見積もる方法がある。大工道具の『さしがね』を使うと，円の直径を定めることができ，それを基に，その木材からとれる角材の１辺を定めることもできる。ここでは，丸い木材の断面を円とみなし，円周角が直角になる場合について円周角と中心角の関係が利用されている。」と述べられている。しかしながら，円周角の学習場面においては，同一円に対する考察がそのほとんどであり，大きさの異なる円において同じ長さの弧に対する円周角の大小にはあまり触れられていない。

そこで，本研究ではラグビーのゴールキックを題材として，異なる大きさの円に対する円周角が最大となる場合を，ICT を用いた数学的活動を行うことで生徒が見いだし，その結果を作図することで理解を深める活動を実践した。

河野（2000）は 2 定点 A，B と直線ℓがあるとき，ℓ上の点 P で，∠APB が最大となる点に関する考察を行う実践を紹介している。また，竹内・愛木（2008）はサッカーのフリーキックを題材として，ゴールラインに垂直な直線上のある点からのゴールの両端を弦（弧）とする円周角が最大となるときについて考察を行う授業を提案している。

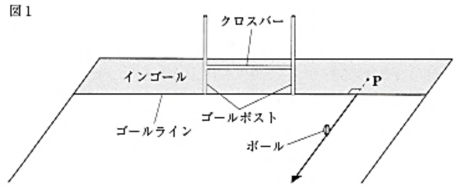
本稿で取り上げる題材は，2019 年に徳島県の公立高校入試において出題されたラグビーのゴールキックの場所の選択に関する以下の問題である。

5 あやこさんは，日本でラグビーワールドカップ2019が開催されることを知り，ラグビーについて調べた。(1)・(2)に答えなさい。

(1) あやこさんが住む地域のラグビー大会は，参加する５チームが総あたり戦を行う。総あたり戦では，５チームがそれぞれ１回ずつ対戦する。試合数は全部で何試合になるか，求めなさい。

(2) あやこさんがラグビーについて調べると，トライをした後にゴールキックをすることがわかった。このゴールキックは，トライをした地点からゴールラインへひいた垂線上のいずれかの位置からボールを蹴る。あやこさんは，図１の点Ｐの位置にトライをしたとき，矢印(⟶)上のどの位置にボールを置くとゴールキックが最も成功しやすくなるかを考えた。

図１



(注) トライ：相手チーム側のゴールラインの向こう側(インゴール)にボールを持ち込み，地面にボールをつける得点方法。
ゴールキック：ボールを蹴り，クロスバーの上で２つのゴールポストの間の空間を通す得点方法。

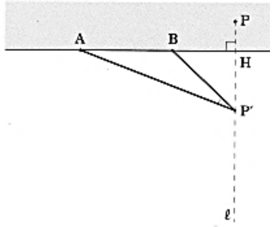
図２・図３は競技場を真上から見た図である。図中の２点Ａ，Ｂはゴールポストの位置であり，直線ℓは点Ｐを通る直線ABの垂線で，点Ｈはその２直線の交点である。また，点P′はボールを置く位置で直線ℓ上にあり，直線AB に対して点Ｐの反対側にある。(a)・(b)に答えなさい。ただし，ボールは，必ずゴールするのに十分な強さで蹴られ，まっすぐに飛ぶものとする。

(a) あやこさんは，図２の∠AP′Bが最も大きくなる点P′の位置が，ゴールキックが最も成功しやすい位置になると考えた。そこで，直線ℓ上の適当な位置に点P′をとり，３点A，B，P′を通る円を作図してみることにした。

３点A，B，P′を通る円の中心をOとして，定規とコンパスの両方を使って円の中心Oを解答用紙に作図しなさい。ただし，作図に使った線は消さずに残しておくこと。

また，定規やコンパスを持っていない場合は，作図の方法を文章で書きなさい。

図２



(b) あやこさんは，点P′の位置を変えながら３点A，B，P′を通る円をいくつかかき，∠AP′Bの大きさについて考えていると，３点A，B，P′を通る円が，点P′で直線ℓと接するとき，∠AP′Bが最も大きくなることに気づいた。

〰〰〰 線部の考えが正しいことの根拠として，図３で∠AP′Bが∠AQBより大きくなることを証明しなさい。ただし，図３で円O′は，２点A，Bを通り直線ℓに点P′で接している。また，点Qは直線ℓ上にあり，点P′とは異なる点で，直線ABに対して点P′と同じ側にある。点Rは線分AQと円O′との交点で，点Aとは異なる点である。

図３

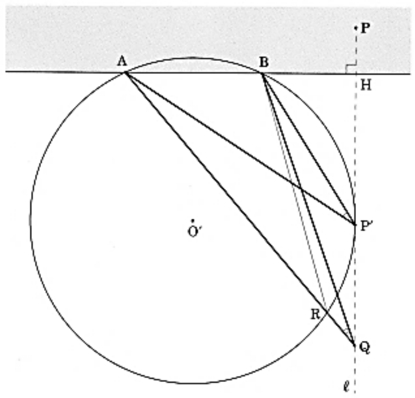


図１　徳島県公立高等学校入試問題（2019）

この問題は，円周角の活用に関する問題として大変興味深いものである。しかしながら，トライの位置からタッチラインとの平行線に接する円をなぜかくのかという必然性が明らかになっていないように思われる。円が接するときに，円周角が最大となることを生徒自らが見出す活動こそが必要であると考える。

本研究では，一人一台タブレットを有効に活用し，GeoGebra を用いることで，生徒自らが，円周角が最大となる場所がラインに接する円となることを見出す活動を行い，その理由を考えること，そしてそこからどのような数学的知見を得られるかを考察する。

２．本時の目標

本時の目標として以下の２点を挙げる。

(1) 各自が GeoGebra を用いて円周角の活用に関する考察を行うことができる。

(2) ２つの異なる大きさの円の一部の弧に対する弦の長さが等しいとき，それぞれの弧に対する円周角の大きさの大小関係は，円の大きさの大小関係と関係することを，現実場面の考察を通して見出す。

３．本時の流れ

以下の流れで授業を行った。

(1) ラグビーのルールを簡単に紹介した HP を利用して，ルールの確認を行う。

トライをする場所は相手のインゴールの中であればどこでもOK。 でもそのあとのコンバージョンキックはトライをした場所（ボールをグランディングした位置）で決まります。 トライボールをグランディングした位置からタッチラインに平行に伸ばした線上であればどこからでもコンバージョンキックができます。（はじめてのラグビー）

(2) どのような条件でキックを行うことが，キックの成功率を高めるかを考察する。

(3)タブレットで GeoGebra を開き，どの場所からのゴールキックがゴールポストに対する角度が大きいかを各自考える。

①ラグビー場の画像を生徒の google classroom に送る。

②送られた画像を各自 GeoGebra に取り込む。

③ゴールポストに２点を取り，その２点を通る直線を引く。

④トライの地点を各自決めて点を打つ。

⑤トライの地点を通り，ゴールラインに垂直な線分を引く。

(4) どのような地点で一番角度が大きくなるか GeoGebra を使って考察する。

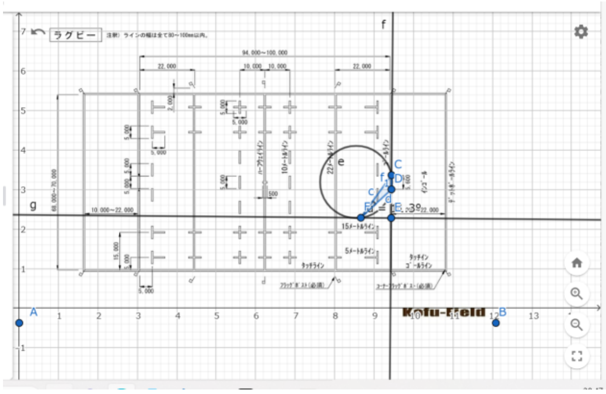


図２　GeoGebra による考察の様子

４．考察

課題１

１つの線分を共通弦とする大きさの異なる２つの円を，その中心が弦に対して同じ側にあるように描く。そのとき，図３のように中心を含む側の弧の上の点とその線分の両端を結んだ円周角について，大きい円の方が円周角が小さくなることを GeoGebra を用いて考察し，それを証明しましょう。

（1）GeoGebra を用いて，共通の弦を持つ２つの円の大きさと，その弦に対する弧の円周角の大小関係について考察してみましょう。

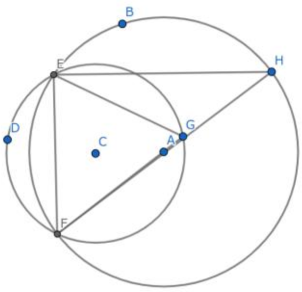


図 ３　大きさの異なる円における共通弦の円周角の大きさの考察

課題２

実際にコンパスと定規による作図を行い，ゴールキックの場所を特定しましょう。

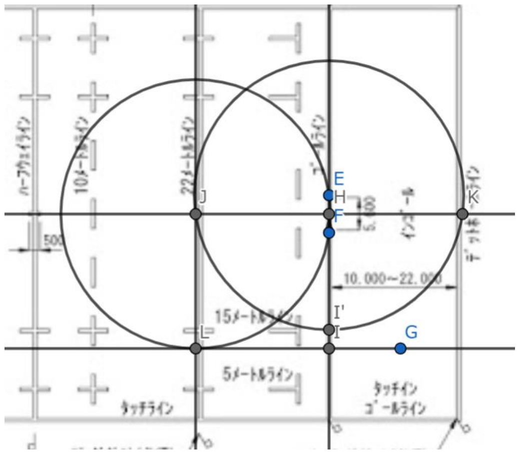


図４　生徒の GeoGebra による作図

なお，図４の作図において，等しい長さをとるという作業を GeoGebra の「同じベクトルだけ点を移動する」という機能を用いた作図により行っている。

５．まとめ

一人一台端末を有効に活用する教材として，ラグビーのゴールキックの場所を GeoGebra により考察する実践の紹介を行った。実践の過程で，次の２点が明らかとなった。

・同一の弦と円に対する円周角の大きさの関係についての考察は，GeoGebra を用いて点を移動させることで考察する数学的活動が有効である。

・GeoGebra を用いた作図においては，「同じベクトルだけ点を移動する」という機能を有効に使用することが有効である。

今後は GeoGebra を用いた作図について新たな方向性を探る必要がある。

引用・参考文献

[1]はじめてのラグビー，https://rugby-shoshinsha.com/mikata/tryplace.html（2023 年１月 15 日確認）

[2]河野芳文，直線上の点から２定点を見込む角の最大値について，広島大学付属中・高等学校研究紀要，第 47 号，2000.

[3]竹内洋平，愛木豊彦，円周角の定理の有用性を実感できる教材の開発，岐阜数学教育研究，Vol.7，87-94，2008.

[4]徳島県教育委員会，平成 31 年度公立高等学校入学学力検査問題 数学，大問 5，2019.

付記：徳島県公立高等学校入試問題の掲載に当たっては，徳島県教育委員会の使用許諾を得ている。

四角形の包摂関係の理解向上を目指したプログラミング教材の開発とその実践

大田区立志茂田中学校　高山琢磨

Tel : 03-3732-9318

概要：四角形の包摂関係の理解の困難性については，様々な指摘がなされている．本研究では，四角形の包摂関係をプログラミングを用いて学習することで，①包摂関係，②特殊と一般，③補集合，④条件の付加の 4 点において理解が促進されるのではないかと考えた．本研究では，包摂関係のフローチャートを作成し，scratch による包摂関係のプログラミングを行う教材開発とその実践ついて述べる．

検索語：四角形，包摂関係，プログラミング，scratch

1. はじめに

中学校第 2 学年で学習する四角形の包摂関係の学習は，高校における「集合と論理」につながる重要な学習事項である．学習指導要領第二学年における内容の取扱いでは，「中学校数学科では，正方形，ひし形，長方形，平行四辺形の定義に基づき，『平行四辺形になるための条件』などを手掛かりとして，正方形，ひし形，長方形，平行四辺形の間の関係を論理的に考察し，整理できるようにする．例えば，右のような図を用いて整理したり，平行四辺形で成り立つ性質は，その特別な形である長方形や正方形などでも成り立つことを確かめたりすることが考えられる」と述べられている．先行研究も多岐にわたる．小関他（1986）は，「認知の発達的研究」において，中学校 3 年生の平行四辺形認知の発達とその様相について調査を行っている．國宗（2000）は「図形の論証に関する理解度の変化」において，四角形の包摂関係を学習することで，例えば平行四辺形についてのある命題が証明済みであれば，長方形については証明することなしにそれを適用できる点にあると述べている．また，村田（2018）は「四角形の包摂関係の拡張過程に関する一考察」において，外接四角形や楕円四角形という概念を取り入れて，四角形の包摂関係について深く考察している．

四角形の包摂関係を題材とした，プログラミング的思考を高めようとする授業プランとしては，プログラミングを行うことなくカード等を用いたアンプログラミング活動を行うことでプログラミング的思考を高める授業が考案実践されている（早川，2021）．しかしながら，四角形の分類をプログラミングで判定する活動は管見の限り見当たらない．現在，ICT 環境の整備が進み，一人一台のタブレット環境が整備される中，小学校では scratch，中学校では BASIC，高等学校では Python，R を用いたプログラミングを授業内で行うことが可能になりつつある．

2. 数学において包摂関係を学習する意義

（1）本研究（四角形の包摂関係とプログラミング）を行う目的

フローチャートの作成ならびに，プログラミングを行うことで，四角形の包摂関係とそれにかかわる概念理解はどの程度高まるのかを調査する．

（2）四角形の包摂関係とプログラミング

筆者は，以下の 4 点が包摂関係のフローチャートとプログラミングにより理解が促進されるものと考えられる．

① 四角形の包摂関係の理解 例えば，「正方形の集合（あつまり）は長方形の集合

（あつまり）に含まれる」等の包含関係ならびに，条件の付加による包含関係の理解等について理解

② 四角形の包摂関係の特殊と一般の理解
例…「ひし形は平行四辺形の特殊な場合である」あるいは，長方形は正方形の一般の場合であることに対する理解

③ 補集合に当たる部分の図形的理解
例えば，「ひし形でも長方形でもない平行四辺形」あるいは，「正方形でない長方形」のように補集合を言葉で正確に表現することで，補集合の意味の理解

④ 条件の付加に関する理解　例えば，「長方形」に「4 つの辺が等しい」という条件を付加することで「正方形」となるといった包摂関係に条件を付加することで，概念が深化することに対する理解

上記の①～④の中で，特に③および④についてはプログラミングを行うことで理解が促進されると考える．すなわち，

・プログラムは間違いが一つでもあるとエラーとなり作動しない，すなわち，自らモニタリングしながら緻密に理解しておくことが要求される．
・包摂関係の理解が十分である必要がある．プログラムを完成させたのちのフィードバックがある．すなわち，試行錯誤の過程が保証される．
・プログラミングの過程において自分の考えをモニタリングしながら論理的に考察し，試行錯誤し，緻密に理解をすることが要求される．

3．実践の概要

（1）実践の概要

対象生徒；東京都内公立中学校 3 年生 27 名
実施時期；
事前調査；7 月 11 日（月）
1 時間目；7 月 14 日（木）
2 時間目；7 月 15 日（金）
事後調査：7 月 15 日（金）
定着調査：9 月 12 日（月）

事前調査・事後調査・定着調査では，次の 3 点を調査する．

① いろいろな四角形の定義の理解の確認，
② 「正方形はひし形である」といった包摂関係の順序の確認
③ 「平行四辺形である四角形にどのような条件（言葉）を加えれば長方形になるか」といった条件の付加に関する理解の確認を行う．

（2）1 時間目

1 時間目…各四角形の定義ならびにベン図の確認後，「四角形の包摂関係の分類のフローチャートを作成する活動」

本授業は 2 時間とも「スクールタクト」という教育支援クラウドを使用した．このソフトは生徒の各自のタブレットに教材を配信し，全体で活動状況を共有することが可能である．

授業の流れは以下の通りである．初めに，四角形の定義について復習を行った．その後，プログラミングについての説明を行った．Scratch は経験がある生徒が，2 割程度であった．その後，ベン図とフローチャートの関係について，簡単な例を用いて考察した（図 1）．

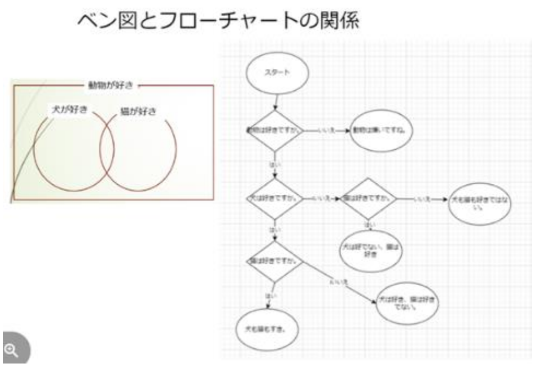


図１　ベン図とフローチャートの確認

次に四角形の包摂関係の補集合の部分についての考察（図 2），四角形に包摂関係に条件を付加することについて考察した（図 3）．

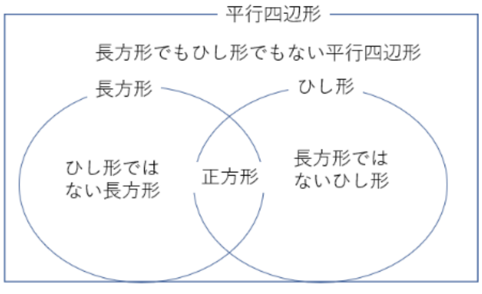


図２　ベン図と付加する条件の確認

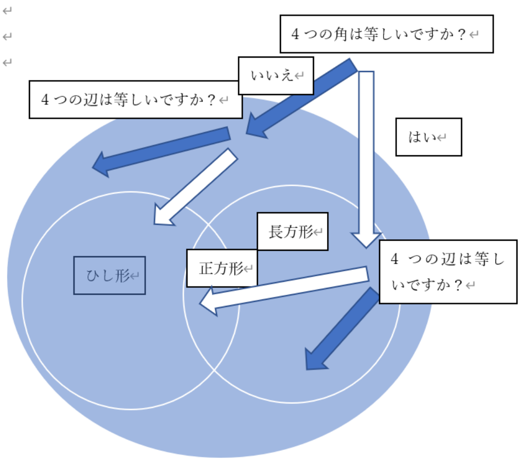


図３　四角形に包摂関係に条件を付加

（3）２間目…「包摂関係のフローチャートをもとにプログラミングを作成する活動．」
初めに，四角形の包摂関係の YESNO チャートを作成する．（図 4）

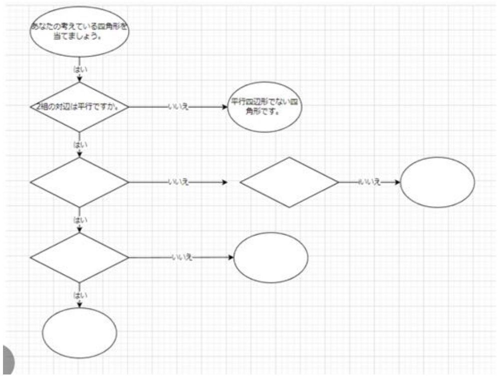


図４

四角形の包摂関係の YESNO チャート

① scratch で作成したプログラムの一部を，フローチャートとともに紹介する．

図５　メッセージ機能の説明

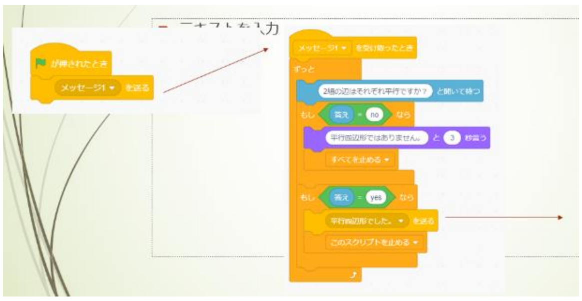


図６　平行四辺形の確認プログラム

② 生徒がプログラムを完成させる活動

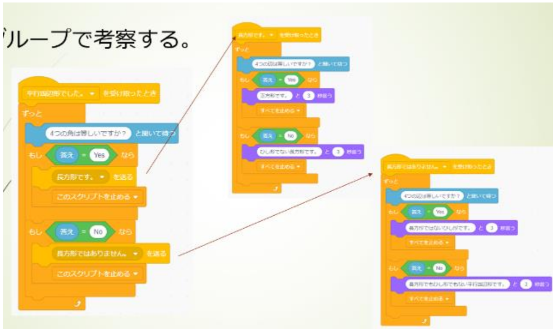


図７　プログラムの完成例

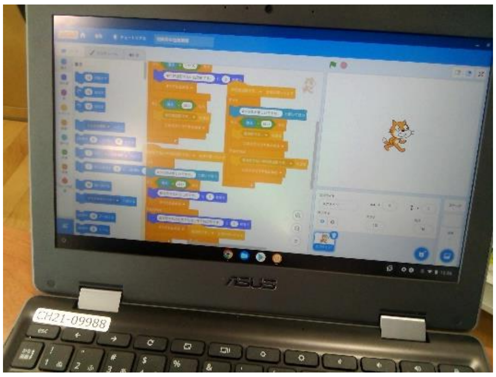


図８　生徒の活動のタブレットの画面

③ できた生徒は三角形の包摂関係の分類プログラムにも取り組む（図 9）．

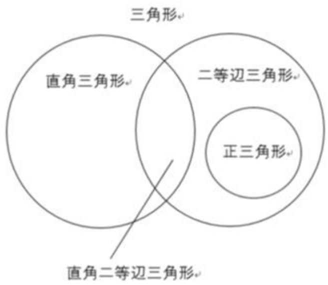


図９　三角形の包摂関係

引用・参考文献

[1]小関照淳，家田春行，國宗進，図形認知に発達的研究－「平行四辺形」の概念の形成過程について，数学教育学論究，Vol. 41，42，pp. 3-23, 1986 年.
[2]國宗進, 図形の論証に関する理解度の変化，日本数学教育学会誌，Vol. 82，No. 3，pp. 2-12, 2000 年.
[3]村田翔吾, 四角形の包摂関係の拡張過程に関する一考察，日本数学教育学会誌，Vol. 100，No. 3，pp. 3-10, 2018 年.
[4]松尾七重．算数・数学における図形指導の改善．東洋館出版社，2000 年
[5]早川裕貴「既存の授業でプログラミング的思考力を高める指導方法の工夫 －４年「垂直・平行と四角形」の授業を通して－」教育実践研究　第 31 集（2021）43－48

算数・数学の授業力を持つ教員を育成する試み

守屋　誠司
（数学科）

An attempt at raising teaching ability in mathematics teachers and teacher trainees

Moriya Seiji

2007 年 11 月 30 日受理

抄録：今日の教員養成カリキュラムやスタッフ数では，数学教育学を基盤とした算数科・数学科教育の指導は難しい。特に小学校教員を目指す学生の数学教育の素養を高める必要があるが，学部の授業だけは不十分である。そこで，現職教員の研修を充実させるという，大学卒業後のケアが重要となっている。筆者が取り組む算数・数学の授業力を持つ教員を育てるための実践例を紹介した。

キーワード：数学教育学，授業力，教員養成，教員研修，

Ⅰ　はじめに

算数・数学の学力低下が言われて久しい。この論文が公になるころには，新学習指導要領が発表されているはずである。算数・数学の指導時間が増えて内容も 1990 年代の量に戻り，さらに，算数的・数学的活動が強化され，新しい内容が付加されていることであろう。喜ばしいことだが，これらの変化に学校現場の先生方が対応していけるのかを心配する。今までの 10 年間は何だったのか，この間に学校教育を受けた子どもたちはどうなるのだろうかという思いに至る教師は多いと思われる。なぜ，教員は学習指導要領が変わるたびに右往左往してしまうのであろうか。おそらく，数学教育学を基盤にした数学教育の実践が行われていないためであろうと思われる。しかし，これを実践できる教員を養成しようとしても，今日の教員養成カリキュラムやスタッフ数で，学生に数学教育学を基盤としながらの算数科・数学科教育の指導を行うことはかなり難しい。特に数学専攻以外の小学校教員を目指す学生の数学教育の素養を高める必要があるが，叶えられないでいる。そのため，守屋(2007)でも述べたが，大学教員は，卒業した学生のケアや現職教員の研修に積極的に関わり，それらを充実させなければならないであろう。

本論文では，教員養成の問題点を指摘し，算数・数学の授業力がある教員をどのように育てるかについての試みを述べる。

Ⅱ　大学での「数学教育(学)」教育関連科目の減少

私は，1976 年から 1980 年に，山梨大学教育学部の小学校教員養成課程にあたる教育科学科・数学科教育専修（学部で「専修」という名称を使っていた）に在学した。当時の数学教育科目を振り返ると，通年で初等数学科教育法（2 単位）と中等数学科教育法（3 単位），初等数学科指導法（2 単位），小学校専門科目（算数）に相当する数学緒論第Ⅲ（3 単位）があった。また，半期単位では，数学緒論第Ⅰ・Ⅱ（各 2 単位），数学教育史（2 単位），比較数学教育学（2 単位），数学学習の心理（2 単位），初等数学教育特論（1 単位），数学的認識論（2 単位）があった。これ以外の卒論用セミナーは，通年の数学科教育研究（2 単位）であった。さらに，一般教養科目にも，数学や統計学があり，小学校教員を目指す学生は，本人が希望すれば数学教育学や数学を大いに勉強することができた。

30 年たった今日では，例えば本学では，初等算数科教育と小学校教育内容（算数）（選択）がそれぞれ半期 2 単位，さらに半期 2 単位の中等数学科教育Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・Ⅳがあるものの，筆者が学んだ時代と比べて授業科目数は少なくなっている。特に小学校教員になる場合，大学 4 年間で半期 2 単位の初等算数科教育を取るだけで良いという状態である。小学校教員 2 種免許状を取得する場合には，この授業を選択しなくて良く，在学中に全く数学関連科目を履修しなくても小学校の先生になれるのである。さらに，筆者の大学時代は小学校の主免だけで 6 週間あった教育実習が，現在は 4 週間になっている。当時は 20 時間近い教壇実習ができたが，現在は 6 時間程度，平成 20 年度からは更に少なくなる予定で 4 時間となる。このような状況は，他の教員養成系大学でも同様であろう。

さて，この状況で卒業した学生は，卒業直後の 4 月には，担任となり算数の授業をしなければならない。しかし，そんなことが可能なのであろうかと心配する。おそらく，小学校の若い先生方にしっかりとした算数科教育を期待すること自体が現在では無理なのであろうと思われる。

打開策としては，せめて国語と算数の教科教育法は，通年にして，4 単位又は 3 単位を必修とすべきであると考える。1990 年代の山形大学教育学部では小学校の教科教育法の全科目とも通年 2 単位が必修であった。その気になれば，本学でも実行できるのであろう。ただし，本学でも初等教育実践論が平成 20 年度から開講され，名目上は通年になる。しかし，教科教育の内容を深化させるというより，教科の指導方法を充実させるということに重きが置かれている。これ自体を否定するわけではないが，教科内容の理解が不十分のままで，指導方法だけが独立して上手になるのであろうかと疑問ではある。教科書に書いてある内容の背景や行間を理解したうえで教科指導ができる者が，プロの教員と言えるのではないだろうか。残念ながら，本学卒業直後の教員に’70 年代の教科授業力を期待することは難しい。

横地（2006）は，「数学教育は，普遍的な「数学教育学」を基盤として発展し実践されるものである」とし，次に示した 9 分野ある数学教育学の専門分野を述べ，算数・数学の先生を目指す学生には，これらの内容を学ばせる必要を説いている。

A　中心分野
　A1：教育課程論（目標を含めて教育課程の研究をする），
　A2：教育内容論（分数の四則演算，空間幾何学など，個々の内容を研究する），
　A3：授業論（毎日の授業の研究をする），
B　基礎分野
　B1：数学，　B2：認知論
C　素養分野
　C1：日本の数学教育史，C2：世界の数学教育史・比較数学教育学，C3：数学の文化史，C4：数学史

横地氏は，1976 年～ 1988 年に冒頭で述べた山梨大学で数学教育学の教授を務めていた。氏が在職中の数学教育科目は，氏が理想とする内容に近かったのであろうと考えられる。山梨大学には 2 人の数学教育学教員がおり，1 学年 12 名の数学教育専修学部生がいた。入学時からこの専修に配属された学生らは，1 年次から数学教育に関連する授業科目を履修する。そして，数学教育について専門的に学んだ小学校教員となる。なお，その他の専修の学生でもその専修科目を専門とする小学校教員となるが，それでも，初等数学科教育法（必修 2 単位）と数学緒論Ⅲ（小学校専門科目算数に相当，小専算数 3 科目の内の選択必修 3 単位）のそれぞれ通年の数学教育科目を最低は履修していたのである。

ドイツ・バイエルン州のエランゲン－ニュルンベルグ大学教育学部における教員養成カリキュラムを見ると，日本の小学校にあたるグルントシューレ教員の養成では数学教育として，数学の初歩Ⅰ，数学の初歩Ⅰ演習，数学教育実地教育事前指導，数学教育教育実習事前指導，卒業試験用セミナー，数学の初歩Ⅱ，数学の初歩Ⅱ演習，教育実習事前セミナー，数学教授実地教育演習，数学教育初級セミナー，数学教授法概論，数学教育学主セミナー，情報学演習があり，選択科目の中に 18 個の数学科目もある。また，大学に進学できる中等学校に相当する

ギムナジュウムの数学教員の養成では，数学教育として 2 科目が，驚くことに数学としては 37 科目が必修である。専門学校等に進学することを目的とする中等学校のリアールシューレの数学教員の養成では，数学教育は 5 科目，数学は 28 科目が必修である。これら科目を 4 年から 6 年かけて履修し卒業した後に，さらに 2 年間の現場実習があり，その上，最終試験を受けて，成績上位者から本採用の教員となっている。やはり，今日の日本での数学教育科目の少なさが印象づけられる。

嘆いていただけでは仕様がないので，この問題を解決するために，取り組んでいる内容を次節から紹介する。

Ⅲ　教員養成段階での数学教育学

2001 年に筆者が本学に赴任した当時，中等数学科教育を受講している学生 31 名に，小学校・中学校で実験などをしながら数学を勉強した経験があるかを問うと，経験者は 0 名であった。この授業の受講者は，将来，数学教育を専門とする先生になろうとしている学生である。その学生が，数学を座学としてしか学んできていない。2002 年 4 月から施行されている現行学習指導要領には，「算数的活動」，「数学的活動」という言葉が目標に付加されている。これら活動を何も経験していない学生が教員になり，児童・生徒に「活動」させることができるとは思えない。そこで，将来教員になる学生に数学的活動を経験してもらうために，本学附属学校と協同で行っている研究成果を織り交ぜながら「活動」を大いに取り入れた講義を試みてきた。

筆者と同僚の渡邉伸樹准教授とで実施している初等算数科教育のシラバスを資料にしたので参照して欲しい。1 年かけるともっと内容を充実できるが，本学では半年単位の授業が原則なので，このようになっている。初等算数科教育・中等数学科教育の講義では，１)歴史的観点，２)認知的観点，３)教育方法的観点（ICT の利用を含める)，４)教育内容的観点の各観点から講義をしている。学生が教員になったときに，自分で算数・数学の内容を考え，教材を開発し，上手に指導するための基本的内容である。

１）歴史的観点

現在の数学教育の問題の多くは，今，突然起きてきたわけではない。その歴史的経過を明らかにすることで，解決方法を探すことができる。日本の近代数学教育は，1872 年より始まった。1900 年頃には一定した教育内容となった。代数関係はドイツ留学した藤沢利喜太郎，幾何関係はイギリス留学した菊池大麓の思想によって内容が決められた。それぞれの留学先での研究や数学教育を色濃く受けた内容となっている。1910 年代から日本でも数学教育の改造運動が起こるものの，1945 年の終戦まで彼らの影響は続く。戦後の数学教育史は，学習指導要領の改訂を時代区分にして語られる場合が多い。しかし，数学教育は学習指導要領だけで規定され進められてきたわけではない。数学教育学会等の学術団体や民間教育団体が行ってきた研究活動をも含めた時代区分が重要である。特に近年は，総合学習が盛んであるが，この学習と戦後に行われ 8 年ほどで消えていった生活単元学習との相違を明らかにしながら，学生には総合学習の成果を高めるための知見を身につけさせる必要がある。

２）認知的観点

数学教育は 0 歳から始まるという立場で，幼児教育からの講義内容が必要である。また，認知心理学や教育心理学からの知見を紹介し，心理学的な研究方法も講義する。例えば，求差型減法はなぜ難しいのか，それはどのように指導したら良いかなどを扱う。これは，子どものつまずきを発見した場合にどのように教材研究を行ったら良いのかの研究方法モデルを提供している。

３）教育方法的観点

小学校 1 年生用の「分解と合成」教具などを製作させているが，ICT の利用は数学教育では避けて通れないことなので，情報化社会に対応した数学教育，具体的には，コンピュータや Web の教育利用と遠隔教育について扱う。

日本とドイツの小学校の児童同士でテレビ会議システムを使って「模様の数学」（これ自体も初等算数科教育

の中で扱う）を協同学習したときのビデオを視聴させる。この遠隔協同学習は，子ども達にも異文化と出会う機会を多く与え，その中で創造的な学習を行いながら，創造力を獲得させる教育方法の一つであることを知らせる。大人なら，研究会や学会等で自分達と違う発想に出会い，討議する機会を得やすいであろう。しかし，学校での日常の学習場面では，このような機会はほとんどない。そんな学習環境を今日の情報機器を利用すると改善できることを紹介するのである。なお，中等数学科教育ではこれらについて「活動」を通しながら丁寧に指導できる。

４）教育内容的観点

日本の教育内容は，1955 年頃から学習指導要領によって規定されてきた。50 年以上この傾向が続いたために，教師の中には，「教育内容は国が決めることで我々が考える必要はない。我々はそれを教える指導方法だけを研究すればよい」といった考え方が蔓延してしまった。しかし，子どもは本来何ができるのかを調査研究した上で，時代に応じた教育内容を創り出す必要がある。現行学習指導要領の内容は最低基準という位置づけになったが，では，それ以上に何をしたら良いかを教師自身が考え出さなければならない。その観点を身につけることが必要なのである。例えば，文字式を使った代数は何年生から教えるか，曲率は何年生で教えるか，立体の幾何はどのように教えるかなどである。さらに，数学が文化とどのように関わってきたのかも教える必要がある。

速さの指導でのつまずきをどのように克服するかを例に教育内容の開発について述べよう。周知の通り，算数には，昔から指摘されてきているつまずきやすい単元がある。例えば，5 年生の割合や 6 年生の速さは，その典型であった。中学生でも，速さを題材にした一次方程式の立式は難しいとされる。

子どもたちがつまずく原因には，一般に，教師の指導方法が適切でない場合があるが，これは，教師自身が気をつければ何とか解決できる。しかし，もっと深刻なのは，教材の学年配当自体に問題がある場合である。これは，教科書を丁寧に説明してもなかなか解決できない。

OHP やパソコンを使って，「ドラえもん」と「のびたくん」らを登場させ，競争させながら「どちらが速いかな？」という速さの導入の授業を何回か見たが，これでは，子どもは分からないであろうと思う。これは，つまずくリスクを負った指導方法であり，前者の例である。しかし，「速さ」は，むしろ後者による典型的なつまずきであると考える。一般に算数の内容は，教育課程にスパイラル方式を採用している。低学年で簡単に扱い，素朴的な概念を作り，それを発展させながら上の学年でしっかりと扱うことが多いのである。しかし，「速さ」という教材に関しては，この法則が適用されておらず，いきなり 6 年生で扱われる。距離，時間，小数のわり算，平均を扱った後，準備は整い満を持して「速さ」を扱い，先生は「速さ＝道のり／時間」を力説するのであるが，そのわりに，子どもたちはなかなか理解してくれない。

速さに対する認識は，次に述べるように低学年から少しずつ変化しながら発達してくる。その認識レベルに合わせて，やはり低学年から「速さ」の学習も積み重ねる必要がある。

1 年生にとって，速い，遅いは，ビューやゴーといった音や目の前をサーと通りすぎる様子など，耳や目で捉える感覚的な存在である。次に，30 m走のように距離を一定にした場合の，到着順序などで速い，遅いが決まることを体験する。でもまだ速さ自体が量化できる対象であることは分からない。30 m走の経験を積むと，先生が計って教えてくれる「**秒」と言う言葉に関心が移る。数字が小さいほど速いことが分かり，何秒かかるかという，時間による速さの量化が始まる。このような，速さや時間に大変興味がある時期に，速さを測る体験をさせたら良い。

中学年での速さは，測る対象によって測り方が変わる。例えば，「北風の速さを測ろう」と題して，どのようにして測ったら良いかを工夫させてみる。風車の回転の様子から一定時間の回転数で調べたり，写真 1・写真 2 の帆かけ車や転がり車の進む様子から一定距離を何秒で進むかを調べたり，風船の飛んでいく様子から一定距離を何秒で飛ぶかを調べたりするなど，小学校 3 年生でも様々なアイデアを出して測定具を工夫しながら速さを量化するのである。この発想を豊かにするために，風で帽子がとばされるアニメを見せることも良い。試行錯誤を繰り返し，写真 3 のように，風船に 5 メートルの紐をつけ，ぱっと放して紐が伸びきるまでの時間を計る方法が，

手軽で良いことを見つける子どももいる。ところで，亀の速さを測るのもおもしろい。亀はまっすぐに進まないので，距離一定で時間を計る方法は適さない。時間を一定にしてその間にどれだけ進んだかを測る。蛇行しながら進む亀の後に印を付け，後からこの曲線の長さを測るのである。亀は止まっていることもあるが，時間はそれにかまわず進んでいるという経験も大切である。この学年では，速さは測られる対象ごとに存在しているので，亀の速さと北風の速さを比べるということは子どもには意味のない事である。さらに進めば，距離又は時間が違う場合の比較では，距離か時間のどちらかを揃えるために倍概念を使うこともできる。

以上の経験を積んでから 6 年生になれば，速さに関する十分な下地ができているため，速さが「道のり／時間」で定義されることも理解され，対象に依存して存在していた速さが，一般化された「速さ」になり，いろいろなもの同士の速さを自由に比べることができるようになる。

本来は，前述のような体験を低学年から積んで置くのであるが，目の前の 6 年生はそうではない。そこで，遅まきながら，巻き尺とストップウオッチを持たせて，「速さ調べ」をさせたら良い。対象も，カタツムリや芋虫などの速さや，エレベータやエスカレータの速さなど，子どもの興味を大切にして計測させたら良いであろう。

この様な内容を講義することで，つまずきは確かに存在するが，どうしてつまずくのかを根元まで研究することが，新しい教育内容の開発につながっていくことを理解して欲しいと願っている。

写真１　帆かけ車による測定

写真２　転がり車による測定

写真３　風船による北風の速さの測定

Ⅳ　現職教員の再教育での取り組み

ここでは，現職教員の再教育について，大学院の場合や官制の教員養成の場合，私的な研究会の場合の事例を紹介したい。

1. 大学院での現職教員の再教育

2 節で学部授業の実態を紹介したように全く時間が足りない。そこで，学部卒業後のケアを真剣に考えるべきであり，現職教員の再教育に大学教員が果たす役割と責任は大きい。本学では 2006 年度より現職教員向けの大学院の授業を開講した。これらは，正規大学院生とならなくても科目等履修生制度を利用して大学院の授業科目を受講できるようにと，夜間・土曜日の開講である。現職教員のための数学教育に関する科目を表１に示した。この３科目を履修した学校教員は，大学から数学教育分野のマエストロとして認定される。

表１　2007年度開講科目

算数・数学科教育実践講座 ー現場で活きる Math マエストロ養成ー	算数・数学科教育実践総論 ー算数・数学教育学の奥深さの理解（現場で必要な知識・技術の獲得）を目指してー	本来の現場の教育（研究）の在り方を、歴史的・認知心理学的・教育学的・数学的・脳科学的等の背景を探りながら、体得する。
	算数・数学科教育実践演習 ー算数・数学小・中一貫のカリキュラム・教材開発方法の会得を目指してー	小学校の教員は中学校まで、中学校の教員は小学校までの数学(算数)カリキュラム及び教材の開発力が必須である。そこで、小・中学生が本当の学力を獲得できる、真のカリキュラム・教材開発を演習を行うことから体得する。
	算数・数学科教育事例研究 ー子どもが質的に発展する算数・数学教育の実践方法の体得を目指してー	小学校の教員は中学校まで、中学校の教員は小学校までの数学(算数)教育実践を行える力量が必要がある。そこで、さまざまな実践事例を検討することから、数学（算数）教育の実践とはどのようであるべきかを検討する。

算数・数学科教育実践総論が設置されたのを機会に，数学教育学の各分野を受講できるようにと，表２のように関西在住の数学教育学会会員を中心に講師を依頼し，それぞれの専門領域についての講義をお願いした。2006 年度には５名の現職教員が科目等履修生になり，内３名が１年間履修した。前期の授業内容をもとに，後期の実践演習では，各自がテーマを決め実際の授業を行った。この３名は，演習で得られた結果を数学教育学会の研究会等で発表するまでになった。安田(2007)は，小学校４年生に分数をどのように導入したらよいかをテーマにした。子どもたちが生活経験の中で獲得している素朴的な分割概念をてこにして，授業者が決めた単位を使いながら量分数から数直線への移行をスムーズにする授業実践を行い，新しく開発した分数指導の有効性を実証的に研究できた。田口(2007)は，中学校２年生を対象にして，指導が難しいとされている幾何の論証の有効な指導方法をテーマとした。公理・定義を定め，定理を積み上げるという，ユークリッド流の小さな体系を作り，それを丁寧に指導することで，「論理的に証明する」ということ自体を理解させようとした。その結果，論証問題で，何も書けない，何も書かないという答案が減り，仮定と結論を書き，証明しようとする生徒が多くなったことを報告している。寺本(2007)は，日タイ遠隔協同総合学習の成果をテーマとした。テレビ会議による交信授業では，「発表を受ける立場」で創造性因子の拡散性や論理性，積極性が向上し，「発表する立場」で向上する因子と違うことから，交信授業では，この二つの立場を経験させることが良く，さらに，この経験の後に３回目の交信授業を行う方法の有効性を提案している。

写真４　大学院での講義の場面

表２　2007年度授業計画の一部

【授業名】算数・数学科教育実践総論（前期）
ー算数・数学教育学の奥深さの理解(現場で必要な知識・技術の獲得)を目指してー

回	日程	授業テーマ	内容	担当者
1	4月14日（土）13:00～14:30	オリエンテーション	講座の概要説明（数学教育の本来のあり方（姿勢）について）	守屋誠司（本学教員）渡邉伸樹（本学教員）
2	4月14日（土）14:45～16:15	数学教育の評価	数学教育における評価について	守屋誠司（本学教員）
3	4月28日（土）13:00～14:30	指導要領・教科書と数学教育　1	指導要領・教科書と実際の数学教育のありかたについて等（小学校を中心に）	京都市教育委員会指導主事
4	4月28日（土）14:45～16:15	指導要領・教科書と数学教育　2	指導要領・教科書と実際の数学教育のありかたについて等（中学校を中心に）	京都府教育委員会指導主事
5	5月12日（土）13:00～14:30	数学教育の研究・実践のありかた１（総論）	本来の数学教育の研究・実践のあり方についての講義	横地清（北京師範大学客員教員）
6	5月12日（土）14:45～16:15			
7	5月26日（土）13:00～14:30	数学教育の研究・実践のありかた２（数理認識論から）	数学教育の研究・実践について、数理認識論からのアプローチを行う	船越俊介（神戸大学教員）
8	5月26日（土）14:45～16:15			
9	6月10日（土）13:00～14:30	数学教育の研究・実践のありかた３(脳科学から)	数学教育の研究・実践について、脳科学からのアプローチを行う	黒田恭史（佛教大学教員）
10	6月10日（土）14:45～16:15	数学教育の研究・評価を現場でいかす実際（小学校の現場について）		
11	6月23日（土）13:00～14:30	数学教育の研究・実践のありかた４（教育現場における教育改革の取り組み-教育評価システム-の実際から）	数学教育の研究・実践について、教育現場における教育改革の取り組み-教育評価システム-の実際からアプローチを行う	鈴木正彦（大阪教育大学教員）
12	6月23日（土）14:45～16:15			
13	7月14日（土）13:00～14:30	数学教育の研究・評価を現場でいかす実際（中学校現場について）	数学教育の研究を実際の現場に活かす展望について	柳本哲（関西国際大学教員）
14	7月14日（土）14:45～16:15			
15	7月28日（土）13:00～14:30	まとめ	まとめ	守屋誠司（本学教員）渡邉伸樹（本学教員）

短期間の講義なのでまだまだ不十分な点はあるが，現職教員に対して数学教育研究の方法と論文のまとめ方の指導が一通りできたと考えている。今後，これら科目の履修者が増えることで，学校現場で働く数学教育学研究者の育成が可能である。

２. 教育委員会主催の教員研修での再教育

2006 年８月に兵庫県の小・中学校算数・数学科教育指導講座の全７コマの内の１コマ分の講師を務めた。残りのコマは指導主事が講義と実習を行っている。生活とのつながりを生かす授業作りがテーマであったので，現在の数学教育の課題と，その打開策の一例として赤道型日時計作成の実習を行った。２時間の講義だったが，参加者や一緒に講義を聴いていた指導主事から大好評であった。そのせいか，2007 年度の講師も依頼され，今度

は2日間合宿で90分×8コマ全てを任されることになった。従来は，実習といっても，教師が2学期に使う予定の学習指導案を書き，相互検討会を行うという内容であった。しかし，今年度はそれをやめて，先生方に教材の製作活動を徹底的に体験してもらった。内容は，主に幾何を扱い，横地（2004，明治図書）『小学生に幾何学を教えよう』も参考書とした。先生方に持参してもらった物は，直定規（30cm），三角定規，分度器，コンパス，はさみ，糊，色鉛筆（12色），サインペン，ジャガイモ3個，リンゴ1個，新聞紙1部，カセットテープの透明ケース。さらに，研修所では，先の参考書，大豆，竹串，画用紙，地球儀（100円ショップで購入できる小いもの），ナイフ，セロハンテープを参加人数分を揃えた。担当指導主事は，これで何をするんだろうと考えていたそうである。20名の定員であったが，兵庫県各地から小・中学校合わせて44名の申込者があり，ほぼ全員が，研修所宿舎に宿泊した。

研修内容は，現在の数学教育の課題（講義），数の分解と合成教具の製作（数の導入），赤道型日時計の製作（空間の幾何），正方形模様の作成（群論の初歩），ヨーロッパで見つけた科学者・数学者（講義），滑り台の製作（平面から立体へ），ワゴンカーの製作（立体幾何，2面角と拡大図），兵庫県を北極にした地球儀作り（球面上の幾何）である。作業を中心とした研修は，先生方にとって初めての経験であった。皆，真剣に取り組み，研修時間が終わっても，1時間余り，熱心な先生方の質問攻めに合った。先生方が，教科書には載っていない，このような数学教育を欲しがっていることを強く感じた。ただし，授業実践が行えるようになってもらうためには，やはり学習指導案の作成や模擬授業まで経験してもらう方が良いと反省し，2008年度では，2日目の午後にそれらを入れる計画である。欲を言えば，実際に実践した内容を皆で討議できる機会があれば，もっと効果的な研修になるであろう。

以上で扱った研修内容は，本学の初等算数科教育，中等数学科教育の講義で扱っている内容から選んでいるが，オリジナルは数学教育学会会員がそれぞれに開発してきた教育内容や教材であり，研究者には特別に珍しいという内容ではない。しかし，鈴木(2006)が指摘する「教科書はバイブルに近い存在になっている」学校現場の教員や指導主事には，目から鱗の内容や教材なのである。なお，教科書のバイブル化の件に関して，驚くことに，従来から文科省寄りだった研究者からも「教科書から1ミリも外れないことに汲々としている」（伊藤(2007)）と，やっと批判が出てきた。ここまで言わせるほど，学校現場の実態は画一化が進んでしまったのである。


写真5　研修の様子


写真6　自作「数の分解」教具での演習


写真7　二面角を生かした滑り台


写真8　先生方の90度回転模様の作品

写真９　赤道型日時計作り

写真 10　自作日時計での時刻調べ

写真 11　ジャガイモ車の面取り

写真 12　ジャガイモ車と自作張りぼて車

写真 13　リンゴを使った緯度・経度の学習

写真 14　兵庫県を北極とした地球儀作成

３. 私的な勉強会での継続的教育

私が指導した学生や学校教員を中心として継続的に山形県で毎年勉強会を開催している。本学に転勤してからは，年１，２回の１泊２日で行っている。横地氏は指導者として何回も参加されている。近年は私以外にも，渡邉伸樹氏（京都教育大学准教授），岡部恭幸氏（大阪大谷大学准教授）が講義を担当される。勿論，参加の先生方も研究発表をする。後藤(2006)は，この勉強会を例にして教員研修の内容と方法について，講演内容を生かした何らかの活動や作業，模擬授業をするなど，参加者自身の「出しがある」ことで参加者の学習成果も現れてしまうのが特徴で，そのため教師も必死で勉強する。官制の研修のように参加することに意義があり，参加者にどれだけ実力が付いたかが評価されない研修とは大いに違うと述べている。毎回が厳しかったこの勉強会の参加者から学校現場の研究者も育ってきた。藤井克澄氏，丹野芳弘氏らは，明治図書から出版された教員用書籍に多く執筆している。丹洋一氏，加藤卓氏，後藤学氏，長澤義博氏は書籍への執筆の他にも，研究論文が学会誌等に掲載されるまでに実力が付いてきた。例えば，加藤(2005)は，この研修会で学んだ内容を元にして小学校 １ 年生に曲面体を指導している。空間の位置と曲率の概念，さらに骨格・筋肉について体系的に指導すると，小学校１年生でも写真 17・18 に見られるような作品を創作できることを示した。

写真 15　勉強会の様子

写真 16　渡邉准教授も教材を作成する

写真 17　研修内容を教育実践する

写真 18　1 年生の作品

V　おわりに

現在の教員養成での課題を指摘し，算数や数学を教える教師になる学生に対して初等算数科教育で何をどのように教えたら良いか，また，卒業後の現職教員へのケアはどのようにしたら良いかについて，私なりの試みを述べてきた。現在の問題点は，やはり学部での指導時間が少ないということである。特に初等算数科教育は半期 2 単位しかない。やはり 1 年間かけて教えたいし，教えなくては，きちんとした授業ができる授業力のある小学校教員になれないであろうと考える。

横地(1980)は，「日本における数学教育の研究は，余りに長く，因習的であり，管理の末端を充足するという形態を続けた。・・・・・・。数学教育学の研究者にしても，開拓の努力を続けるよりは，管理の末端の充足で，身を固め，安住する方がよいという傾向が，依然として強く存在する」と厳しい指摘をしている。しかし，これは真摯に受け止めなければならないであろう。そして，数学教育学関係者は，横地（1978)「数学教育の実践は，学校での子どもと教師の鋭い切り結びだけに閉じるのではなく，それを支えている社会的・経済的背景との対決，数学的内容を初め，教場での授業にかかわる細部の諸問題との対決なども含んだ」，広い意味での実践を行う必要がある。

参考引用文献

1.横地清，『算数・数学科教育』，誠文堂新光社，1978
2.横地清，「数学教育学を考える」，横地清編著『数学教育学序説 上』，1980，6-7
3.加藤卓,「小学校低学年における空間幾何学での位置関係と立体図形の指導について」,『数学教育学会誌』2004

/Vol.45/No.1・2，2005，39-50
4.横地清，「教員養成大学の任務・継続的研究の意義」，『現代教育科学』2 月号 No.593，2006，111-115
5.鈴木正彦，「教育現場の実践から投射した教員養成の実像とその課題」，『2006 年度数学教育学会秋季例会発表論文集』，2006，176-178
6.後藤学，「児童の数学的発展を実現する現職教育のあり方について－開拓的な研究会の実践例－」，『数学教育学会誌』2006/Vol.47/No.1・2，2006，21-35
7.伊藤説朗，「学力の保障と優先順位」，『新しい算数研究７』No.438，東洋館，2007，1
8.安田知沙，「小学校４年生における分数指導実践」，『第 70 回数学の文化史研究会発表論文集』，2007，7-12
9.田口聖，「論証の考え方と証明の書き方」，『第 70 回数学の文化史研究会発表論文集』，2007，13-16
10.寺本京未・守屋誠司・他，「日タイ遠隔協同総合学習の評価(2)」，『数学教育学会誌』臨時増刊　2007 年度数学教育学会春季年会発表論文集，2007，34-36
11.安田知沙，「もとの１を重視した小学校４年生への分数指導の実践効果」，『数学教育学会誌』臨時増刊　2007 年度数学教育学会夏季研究会（関西エリア）発表論文集，2007，25-28
12.守屋誠司，「ドイツの文化環境と教育制度から示唆される日本の数学教育の課題」，『京都教育大学教育実践研究紀要』第７号，2007，21-30

【資料】　**京都教育大学シラバス:科目情報**　　Page 1 of 1

科目情報

授業科目名	初等算数科教育(c)
担当教員名	守屋　誠司，渡邊　伸樹
授業の概要	数学教育の教材研究を自分で行えるようになるための基礎的知識と基本的技能を講義・演習する。児童が行う算数的活動を自ら体験しておくことは教壇に立った場合に役立つ。色々な文房具や材料を使うので忘れ物をしないようにすること。また、各演習課題ごとにレポートにまとめて提出してもらうので、講義メモはキチッととること。
授業の到達目標	1. 現在の数学教育へ至った歴史的背景を知る。 2. 数学教育の課題を知る。 3. 教材研究の具体的方法を体得する。
授業計画	１．オリエンテーション ２．数学教育史１（和算，明治から戦前・戦中） ３．数学教育史２（生活単元学習と現代化，情報化，国際化，総合学習） ４．心理学的話題（求差型減法はなぜ難しいか） ５．教育内容から１（調べ学習のための統計） ６．教育内容から２（新しい数学） ７．教育方法的話題Ｉ（Ｔ機器の教育利用） ８．子どもの描画認識 ９．　数計算 １０．新しい計算方法 １１．ミカンの表面積は？（区分求積） １２．ワゴン車の製作（展開図と三面角） １３．指導案の書き方＋数学教育の在り方 １４．予備 １５．期末試験
テキスト・参考書及び自学自習についての情報	テキスト：横地清「教師は算数授業で勝負する」明治図書、2006 参考書：横地清監修「新版21世紀への学校数学の展望」誠文堂新光社、1998 横地清監修「算数科発展学習」1－4巻 明治図書、2005 横地清監修「算数科の到達目標と学力保障」1－6巻 明治図書、2005 他、授業中に紹介する。
授業の形式	講義・演習
評価の方法（評価の配点比率と評価の要点）	(原則)期末試験60%、各課題のレポート30%、出席状況等10% 単位認定の条件は出席2/3以上，課題90%以上の提出とする。
本授業に関する情報	1. 受講生の人数や基礎学力に応じて、内容を変更することがある。 （前期・後期がある為） 2. 高校の数学Ⅱ・Ｂまでの学力があるという前提で講義する。
その他	(a)と(b)と(c)と(d)の受講条件が設定されているので要注意。 その他の受講条件がある場合は最初の授業で説明を行う。

数学教育学会　2021～2022 年度　課題 Study Group
「Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み」報告
補助資料

編　集　課題 SG 代表　白石和夫
発行日　2023 年 4 月 23 日
発行所　一般社団法人　数学教育学会
住　所　〒112-0012　東京都文京区大塚 1-4-15　アトラスタワー茗荷谷 105 (株)甲文堂内