

数学教育学会

学会課題 Study Group 研究報告

Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学
の構築と教員養成・研修の実施とその評価

2023～2024 年度

数学教育学会

学会課題 SG

Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の実施とその評価

代表 白石和夫（文教大学名誉教授）

E-mail : shiraishi@bunkyo.ac.jp

前々年度 SG「Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み」で示された 5 つの課題

- (1) 数学の使い方を軸にする数学科カリキュラムの再構成
- (2) 学ぶ人の観点から自然な流れを作る
- (3) 必要な数学がより早く学べる体制を作る
- (4) 教員の意識改革
- (5) 文理の融合へ

の実現にむけ、さらに、次の解決すべき課題を示し検討を重ねた。

(1) 高度化する数学需要への対応

1960 年の数学教育現代化では、抽象的枠組みを教えることで多くのことを効率よく学ばせようと試みたが、それは失敗であった。共通する要素を代表する典型例を中心に学ぶことでそれを実現しなければならない。

(2) 学ぶ意義のわかるカリキュラム

数学教育現代化の経験から得られる教訓として、数学科のカリキュラム構成は、学ぶ意義のわかるものとすることが不可欠である。準備のためとして基礎を早めに学ぶカリキュラムを作ることをしてはいけない。有用性が分かるようなまとまりを作ることカリキュラム構成の原則とすべきである。

(3) 教員養成・研修のための数学周辺教材作成

教育学部における教員養成では、数学の基礎を深く理解すること、また、数学の周辺領域において数学がどう使われているか知ることのいずれにおいても十分なものとなっていない。少ない授業時数のなかでそれを望むのは不可能であるが、選択教材として用意しておくなどの手段をとって補完できるようにしておきたい。

Society5.0 は数学が問題解決の主役となる時代である。現代社会が数学に支えられている現実を広く知ってもらうための具体事例を広く教材化していきたい。数学を知らなくても生活できる。けれど、新しい時代を作るために数学を学ぶことが不可欠であることを学ばせたい。

目次

概要

白石和夫（文教大学名誉教授）	1
数量関係	6
幾何学	69
確率統計	135
記述統計	156
コンピュータ	168
集合と論理	256
複素数を見直す	293
変容する社会を生きる日本型社会の市民に向けた算数・数学教育 町田彰一郎（埼玉大学名誉教授）	314
学校現場での教育研究の実践的方法について ー繰り下がりのある引き算を例にー 守屋誠司（京都教育大学名誉教授）	325
数学教育学会 2024 秋季例会オーガナイズドセッション 次世代の数学教育を担う教員の養成ー何が問題なのかー 守屋誠司（京都教育大学名誉教授）	333
Erlangen・Nürnberg 大学の教員養成の実際と日本への示唆 守屋誠司（京都教育大学名誉教授）	347
職業教育に繋がる中等教育における数学教育についてードイツの職業教育の紹介 守屋誠司（玉川大学）	350
ドイツ・バイエルン州の基幹学校(Hauptschule)の数学教育について ー教育目標と卒業試験問題から 守屋誠司（玉川大学）植村友紀（京都教育大学教育学研究科）	364
離散数学（幾何・情報通信）からの学習題材の提案 酒井利訓（東海大学）	374
学会課題 Study Group における学校数学全体像研究の系譜	393
後記	394

1 概要

1.1 数学の時代

現代社会は、デジタル化によって多大な進歩を実現した。けれども、今、学校で学ばれている数学だけでは、社会を前に進めるために必要とされる数学のほんの一部しか学べない。無駄を省いて、必要とされる数学をより早く、より深く学べる体制を作らなければならない。特定の課題に特化した数学ではなく、汎用性のある数学を学ぶことを優先しなければならない。学校数学という閉じた世界でしか通用しない知識・技能を学ぶのでなく、数学を現代社会を生きるための知識・技能として学ばせなければならない。数学で学んだことが他教科の学習に生かされ、数学の重要性が認識されるものでなければならない。

数理科学の素養を持つ人を如何に多く育てることができかに社会の興隆がかかる時代となった。数学は“科学の言葉”であり、STEM の中核を担う教科である。理科、社会など、他教科との関連を重視して数学教育を考えなければならない。

知識基盤社会が現実のものとなった今日、学校教育の課題は、従来、定型業務を担うことで社会を支えてきた人たちへの教育である。数学が使える人に育てることで社会において活躍する人が育つことを目指したい。

1.2 学び方の転換

まず全体像を学び、その数学がどう使われるのかを知った後に、細部を詰めていく学び方への転換が必要である。

近年の学校数学は、枠が定まると、その枠に特化して試験の点数が上がるように進化してきた。たとえば、区分求積の考えを教えるのを止め定積分を原始関数で定義し、ベクトルの考えを教える代わりにチェバ・メネラウスを教え、 2×2 行列の n 乗を計算するのに便利なケーリー・ハミルトンの定理、……などなど。最近のはやりは、「きはじ」の公式である。特定の課題には効果を発揮する教え方であるが、数学を多様な現実場面に適用することにつながらない。どのような技能を学ばせるのか、そして、どのような枠組みを用意したらそれが実現できるのか、議論を深めていかななければならない。

数式で記述することができれば、解ける問題であればその厳密解を、そうでないときでも近似解を求めるのにコンピュータが使える。だから、数学学習の中核は、微分方程式や区分求積などを用いて、数式で現象を記述出来るようにすることである。答が簡単に求まらなくても、数式で表すことに価値があることを学ばせなければならない。

ICT の発達は Adaptive Learning(個別最適な学び)の可能性を広げた。人によって理解に至る経路が異なってよい。それを許容する、多様性を許すカリキュラムが求められる。数学をなぜ学ぶのか。その理解の仕方も人によって様々である。

1.3 数学の学び方

考えることを放棄するという意味での「数学離れ」は小学校算数から始まっている。基幹部分の論理を平易なものに改め、考えればわかるものにしなければならない。算数・数学は論理によって組み立てられた体系なのだから、すべて理屈でわかる。その体系で現実の現象を記述することに自然科学などの数理科学に対し数学が存在することの意義がある。

考える人を育てることが最重要課題である。PBL(Project-Based Learning, Problem-Based Learning)で学べるものに体系を組み替えよう。具体的な問題の解決を通して数学の理論を構築する。しかし、その結果が数学的に整理されたとき、様々な領域への応用が可能なものとなるのが数学の特徴である。

数学は断片的な知識の集まりではなく、大きな幹に連なる知識体系に整理できる。そのことが数学の学びやすさ、使いやすさを支えている。数学を断片的な知識の集まりとして教えるようなことをしてはいけない。

1.4 文理融合の数学教育 STEM と統計

数学は、他教科との関連で学ぶことが重要である。理科、社会など他教科との関連を考えてカリキュラムが作られなければならない。たとえば、負数や対数は現行よりも学習時期を早める必要がある。物理との関連でいえば、ベクトルや微積分、三角関数も重要な内容である。数理科学で用いられる数学の多くは、物理数学に由来する。今後もその傾向が続くことが予想される。物理学などの数理諸科学を学ぶことも、数学を使える人を育てる上で欠かせない。

確率や統計は、算数・数学の他の領域と比較的独立している。しかし、確率・統計を算数・数学の他領域の学習に呼応して学ぶカリキュラムとしなければならない。数学は断片的な知識の寄せ集めではない。

1.5 数学を学ぶための基礎技能

数学を学ぶために習得しなければならない基礎技能は、数式の読み書き、論理、プログラミングである。数式の計算ができることは新しい数学を作るための基礎技能として不可欠である。面倒な数式の計算をコンピュータの数式処理に委任する技能も含まれる。数学が汎用性を持つのは、論理によって構築され、公理的な性格を持つからである。数学が実際に役立つことを検証し、また、新たな数学的事実を探究するためには、コンピュータによる計算が欠かせない。数学を学ぶ過程でこれらの技能が身に付くように数学教育のカリキュラムが設計されなければならない。

2 算数・数学の中核部の設計案

2.1 概要

数学の用いられ方の変化に対応し、コンピュータ環境や Adaptive Learning などの新たな教育手法を有効に活用するためには、算数・数学の学習システムのコア部分の組み直しが避

けられない。

幾何は早期に座標幾何に移行する。三平方の定理と三角比・三角関数を直交座標と極座標を結びつけるものと位置付ける。

関数や代数領域ではコンピュータによる計算を前提としたカリキュラムを構築する。現実世界を抽象し理論化する過程を数学的活動の中核に位置付ける。

自然科学や社会科学との関連を重視してカリキュラムを作る。統計の枠にとどまらない「データの数学」を実現する。

2.2 小学校

2.2.1 数と量

計算の意味理解を指導目標とし、定型的な筆算の指導は廃止する。計算を、(中学校における $\sqrt{a}$ のように) 手間暇さえかければ実行できるアルゴリズムとして理解できるように指導する。そして、計算を現実事象に適用すること(文章題)に注力する。実際の計算には電卓・コンピュータを利用する。

負の数を小学校から指導し、日常の事象の表現で利用しながら負数に馴染ませる。

比を同値類の意味で導入し、連比も扱う。比例する量は等しい比を持つ。比の概念を利用して割合を定義する。

余りを考えない除算を乗算の逆算として扱い、割算とは逆数を掛けることと理解できるようにする。

統計グラフや平均などの統計数値から必要な情報を読み取れるようにする。比(割合)の応用で、標本から全体を推計することができるようにする。

2.2.2 図形

図形教育の基本は、体験的に学び、直観を育てることである。特に、空間認知の発達には、適齢期での指導が欠かせない。

計算指導の縮小によって、作図や工作を通して図形の性質を学ばせることにより多くの労力を掛けることが可能になる。1点を中心とする拡大・縮小で2点間の距離が同じ割合で大きくなったり小さくなることの経験や、展開図をもとに立体を組み立てたり、投影図で、いろいろな角度から立体図形を見る経験が以後の学習に欠かせない。

平面上の位置を直交座標で表すことを学ぶ。負の数を用いる。また、空間座標への伏線として、座標平面からの高さで点の位置が定まることも指導できる。

小学校だと錐体の体積などを実験的な方法で学べる。実験結果に対して、なぜだろうかと考える子供を育てたい。

2.3 中学校

数学を数理科学の記述言語として学び、数学が社会に果たす役割について理解を深める。

数量関係(代数と関数)、図形(幾何)を別個の物として学ぶのではなく、座標平面(方眼紙)を介することで並行的に学ぶものに変える。

初めに概要を学び、学年が進むごとに細部を学ぶ学び方への転換を図る。たとえば、現実事象を加減乗除で表せるとき、それらを考察の対象として学び始め、1次関数、2次関数などの特徴と、それら関数に特有の技能を学ぶのは学年が進んでからとする。

2.3.1 数量関係

2量の関係を方眼紙に表す。 x, y に関する方程式・不等式を満たす点の集まりを図示して問題解決に利用する。方程式の式変形によって方程式を満たす x, y の値がどう変化するか、考察し、問題解決に生かす。

文字(変数)で表すことに利点があることを学ぶ。加減乗除で様々な現象を記述することができる。それをグラフに表し、課題を解決する。世の中にある関数関係のいろいろを知る。また、各種関数の特徴を調べる。たとえば、1次関数、2次関数、3次関数のグラフを描いて、それぞれの関数の特徴を抽出する。

正の数を表すのに、 $a \times 10^n$ の形の便利さを学ぶ。それを、 10^x の形に書けるように指数の定義を拡張する。それを土台に常用対数を定義して、対数グラフが表す内容を理解し、対数グラフを用いて関数関係を調べることができるようにする。

平方完成を利用して、2次関数の問題、2次方程式・2次不等式が解けるようにする。平方完成ができれば、因数分解ができなくても差し支えないし、解の公式に習熟する必要もない。

2.3.2 図形

算数での学習を継承し、幾何学が現実問題の解決に有用な技術であることを学ぶ。平行や合同、相似の意味を定義し直すことをせず、座標幾何に移行し、直交座標と極座標(平面)を学ぶ。三平方の定理の導入を早め、三角比・三角関数を学ぶ。また、座標幾何を学ぶことが、ベクトル概念への導入となることを目指す(ベクトル記法を教えるかどうかは検討課題)。さらに、3次元の空間座標(直交座標)を導入して、空間認知を助ける。

2.4 高等学校

高校数学の基幹部を文理融合の視点で構成する。多くの生徒が数学を深く学べる体制を作らなければならない。そして、多様な学習系統を受け入れるカリキュラムとしなければならない。学習系統が科目で分断されるのを避けなければならない。数学の各領域は相互に関連を持っている。それを分断して学ばせるのは、深い学びを阻害するだけでなく、学習効率も悪い。

高校数学の主要な目標は、微積分と線形代数、確率・統計。その前段階として、数列、指数・対数、三角比・三角関数が必須。微積分は、微分方程式で記述すること、関数を多項式で近似すること(テーラー展開)や、正弦・余弦で近似すること(フーリエ級数展開)を目標として学ぶ。積分法は、区分求積を原始関数の計算に置き換えて計算する技法である。コンピュータによる計算では、区分求積の問題はそのまま計算で処理する方が都合がよい。また、再帰的な思考法が、コンピュータに計算させる問題解決の手法として重要で

ある。漸化式に表せば計算できることの経験をさせたい。

幾何学は、ベクトルや行列を用いて記述する。幾何の探究であると同時に、線形数学への入門でもある。そして、複素数は、ベクトルや行列を前提として学ぶものに改めたい。

線形数学の出発点は、数列 Σ である。 Σ の線形性の応用として、最良近似直線を求めることができることを学ばせたい。

行列は多様な応用を持つ。だからといって、初めから抽象的な線形代数を教えても成功しないだろう。幾何であれば、回転や鏡映，拡大・縮小を表すものとして行列が便利に使える。どの分野で学び始めるのが適切なのだろうか。

記述統計は、線形数学の文脈の下に統合して教えられるものに変えなければならない。また、確率・統計，特に、検定と推定は、コンピュータによる計算を前提とすることで、2項分布などをそのまま計算し、より直接的に理解しやすいものに変えることができる。

文理融合の視点から、多変数関数の微積分，特に、偏微分を学ばせたい。現状で、経済系，あるいは、データ・サイエンス分野で求められるのは、複素数ではなく、多変量を扱う数学である。

現在、整数を数学 A で学ぶことになっている。整数は学びやすく、数学的な手法を学ぶのにも適した題材である。整数論をはじめとする離散数学を理系向きの教材として再編したい。

3 後記

数学を学ばせる目的は、数学が数理科学の共通言語としての地位を占めているからであって、思考力を高める陶冶材だからなのではない。数学を正しく学ぶことが思考力育成に寄与することは間違いないけれども、思考力向上につながるかどうかは学ぶ側の構え次第である。学ぶ価値があると感じられる魅力ある題材を提供することが重要である。

数学が使える人を育てるために大切なことは、考える人を育てることである。指示された公式を覚えて適用するのが最もコスパのよい学習法だという枠組みを取り除くために知恵を絞らなければならない。

人類は新たな道具を得ることでより大きな仕事が出来ようになってきた。目指すのは、コンピュータの計算力を仕事に使える人を育てることであって、コンピュータを使って教えることではない。新たな内容に入れ替える努力が必要である。社会が変化するスピードは予測を超えている。社会の変化に追い付く努力なくては、その差が広がるばかりである。

算数・数学を指導する教師は、世の中，とりわけ数理科学や理工学において数学がどのような役割を担っているかを知っていなければならない。この SG は、新時代に対応する学校数学の教育を担うことになる人たちを主要なターゲットとして研修教材案を作成した。有効に利用されることを期待したい。

数量関係とデータの活用

2025.02.08 白石和夫

数学は科学の言葉

数理科学的手法が、従来、数学と無縁とみなされてきた領域にまで拡大している。数学を仕事で使える人を育てることが数学教育の重要な課題となる時代が到来した。

数学は系統的に学ぶと学びやすい教科である。断片的な知識の寄せ集めとして学ぶのでは効率が悪い。数理科学の記述言語としての数学を学ぶ体系に作り変えよう。そして、数学を学ぶことで世界が広がることが実感できるものにしよう。数式で表すことができれば、必要な精度で近似解を求めることは難しくない。数式で表すことに価値があることを学ばせなければならない。一方で、公式の誤用が重大なトラブルを生み出すこともある。たとえば、リーマン・ショックも公式の過信から発生している。数学を、意味を理解して学ぶものに変えなくてはならない。

時代背景

コンピュータの数式処理（コンピュータ代数）技術は完成の域に達している。厳密解が求まらない問題に対して近似解を求めるのにもコンピュータが使える。また、将来的には、数学の言葉だけで書かれた問題は厳密解をコンピュータが見つけてくれる時代が来るかも知れない。人がなすべきことは、直面する問題を数学の問題に置き換えることである。そして、仕事をコンピュータに委ねる術を学ばなければならない。コンピュータにできること＝アルゴリズムである。アルゴリズムとは何かを学び、アルゴリズム記述の技能を習得しなければ、コンピュータに仕事をさせることはできない。

知識基盤社会において、人の仕事は新たな知識を生み出すこととなった。特定の問題を手際よく解く数学の優位性は失われている。数学の抽象性が、ある分野で開発された手法を他分野に流用することを可能にしている。学ぶべき数学は、広範な問題解決に有効な汎用性のある数学である。

機械学習という手法で人工知能が進化している。教科書に書いてあるような文章題であればAIが解いてくれる時代が到来したといつてよいかもしれない。しかし、機械学習を土台とする人工知能が出してきた結果については、人がそれを検証しなければならない。現状では、人工知能は示唆を得る手段のひとつである。数学を知らずにコンピュータに頼ることはできない。

学び方改革

コンピュータによる計算に解決を委ねることで、数理的手法の有効な場面が増大している。しかし、数理的手法を支える数学の全体は膨大なものである。それをいかに効率よく学ぶかを考えなければならない。

手計算でできることで数学の世界を広げていくのには限界がある。コンピュータによる数値計算を利用して数理的な現象を観察することを通して学ぶ道筋を作ろうではないか。それは、数学が実際に使われる場面を再現して学ぶ道筋でもある。

コンピュータを全知全能の神のように捉える誤解が生じることがないように扱うことも必要である。人が地道に計算することを単に効率的に実行しているだけと認識されるよう

に指導しなければならない。このことは、人工知能が発達した今日において重要な視点である。ただし、知識という点において人はコンピュータにかなわない。けれども、どのような知識体系を利用してその答えを導いたのかが理解できる形でコンピュータを利用するものでなければならない。

面倒な計算は機械に委ねることが可能な時代となったけれども、絡み合った複雑な論理は人の手に頼らざるを得ない。数学の学び方を変えるべきときが訪れている。

多様な学び方

近年の算数はやたらと理屈っぽく、その理屈が押しつけがましい。その理屈は児童の体験にもとづく思考と合致しているのだろうか。もっとと自然で、子供の考え方にあう学習経路を選択できるようにしておかなければならない。

数学を学ぶのにも多様なルートがある。算数・数学を日常経験を土台に現実問題の解決に有用な体系を構築するものとして学ばせたい。伝統的な算数・数学教育理論が子供たちの発達段階に即しているとは限らない。学ぶ順序を入れ換えて、学ぶ意義を理解しながら算数・数学を学ぶものに作り変えたい。実際に使う経験を通して有用性を知ることが優先し、理論の細部を学ぶのは後という学び方に変えたい。数学教育の難しいところは、数学は必要となってからあわてて学ぶのが難しい教科であるにもかかわらず、先の見えない学習を強いられる教科だという点にある。どうしたら、より進んだ数学を学ぶことの必要性を自覚させられるかを考えてカリキュラムを作らなければならない。

先の見えるカリキュラム

数学を学んだら何が出来ようようになるのか想像できるように教えていかなければ数学離れをなくすことはできない。

まず、事象を数式で表すことの利点を学び、そして、数式で表す技能の習熟を優先して学ばせるべきである。1次関数、2次関数の特徴は、3次関数を参照しなければ明らかにならない。各関数の特徴を取り出して学ばせても、先を知らなければその意義は理解できないし、場合によっては、それが次のステップに進むときに足枷になってしまう。たとえば、1次関数の学習で関数の基本として傾きと切片を叩き込まれるから、2乗に比例する関数でも傾きと切片を考えることから始めなければならないものと誤解してしまう。

現行カリキュラムでは、中学校では、中1で比例と1次方程式、中2で1次関数と連立1次方程式、中3で2乗に比例する関数の順に学ぶ。計算技能を学ぶのが目的であれば合理的な配置かもしれないけれども、数学の有用性を知るにのには適さない。加減乗除を学んでいれば、次数に関係なく関数や方程式に記述できる。大方の問題は、グラフを描いてみれば、およその答が求まる。方程式は、対応する関数と並行して学ぶのが合理的である。たとえば、2次方程式の代数的な解法は、2次関数のグラフが書けて、平方完成の計算ができるようになってから学ぶのが合理的である。

何を学べばよいのか

対数グラフはコンピュータを使うと簡単に描ける。対数グラフから2量の関数関係を読み取ることができる。たとえば、片対数グラフを描いて直線になったら両者にはどういう関数関係があるのか。そこから指数関数の学習を始めることができる。数学教育現代化の

時代に試みられたように指数・対数を形式的に逆関数として学ぶのでは、ものごとの本質の一部しか学べない。

方程式に表すことができれば、結果を出すことはコンピュータに委ねられる。方程式を立てる技能を持つことは役に立つ。方程式の解き方に習熟する必要はなく、コンピュータが出してきた答を検証する技能さえ持てば十分である。たとえば、微分方程式であれば、解の一意性が保証させる状況のもとだったら、微分して確かめることができればよい。理想は、コンピュータが答を出すのに用いるアルゴリズムを理解して使うことである。そうすれば、コンピュータが出してきた答えを安心して使える。

最大の難関は、やさしい数学 ≠ 現実に使われる数学 だということである。現実に使われる数学をやさしく学ばせることが必要なのだ。現実問題は複雑でややこしい。複雑でややこしい論理を解きほぐす力の育成がこれからの数学教育の中心的課題の一つになる。

科学の言葉としての数学

足し算から始まって累加で乗算が定義され、加算の逆算として減算、乗算の逆算として除算が定義される。乗算から比例の概念が生まれ、比の概念を経由して倍の概念が小数倍、有理数倍へと拡張される。数直線上の位置記述の必要性から負数が生まれ、数の体系が減法について閉じたものとなる。数を測定値の記述に用い、その変化を述べるのに、差や比率が用いられる。変化の割合が一定であるとき、その結果を乗算を繰り返すことで表し、累乗（指数）の概念が生まれる。大きな数や小さな正数を 10 の冪を利用して表すことから常用対数の概念が生まれる。平面上の位置を表すために直交座標とともに極座標を用いる。極座標と直交座標の変換のために三角比・三角関数が定義される。

変化を記述するために関数の概念が生まれ、局所的な変化を表す数値として微分係数が定義される。指数関数は変化の割合が自身の値に比例する関数であり、微分方程式 $\frac{dy}{dx} = ky$ を満たす。正弦関数・余弦関数は微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} = -ky$ ($k > 0$) を満たすことから振動現象を記述するために必須の関数となった。一方、微小量を合算することで計量を行う区分求積の考えから、積分法が生まれ、平面上、あるいは、空間で定義される関数に対して面積分や体積積分などの概念が生まれた。

☆は、想定する学年レベルを超える注意であり、その内容を教えることを意図しない。

1 関数関係

現象を記述する道具として関数は重要な役割を担う。

局所的な性質から全体を把握する微分方程式や区分求積の考え方を知り、使いこなすことを目指したい。

5 次以上の代数方程式の多くは代数的に解けないし、不定積分の多くは初等関数で表せない。けれども、方程式は（代数方程式も微分方程式も）解析的手法によって近似解が求まることを学ばなければならない。

展望

微分方程式，多項式による近似（テーラー級数），正弦・余弦による近似（フーリエ級数）を高校で学ぶことを目指したい。

ただし，微分方程式を解くことは数式処理や数値計算による近似計算に委ねることを前提に，微分方程式で記述することの意義を学ばせるのが目的である。

1.1 数

1.1.1 加減乗除（整数）

減法が用いられる場合

小学校学習指導要領 算数第1学年

(ア) 加法及び減法の意味について理解し，それらが用いられる場合について知ること。

指導要領に「減法が用いられる場合」と一括して指示されているため，求残，求差が一括して指導されている。しかし，求残が加法の逆算であるのに対し，求差は2数の比較のために差を用いる方法である。同列には扱えない。他国の教科書を見ると，求差の扱いは一様ではない。2数の比較を考えるとところで扱う指導法が選択肢にあってもよい。なお，2量の比較には，割合による方法もある。

掛け算九々

九々の表を作ったら，以後はその表を見ながら学ぶ学び方も選択肢にあってよい。

九々の表から割り算の答が求まることを理解させよう。

筆算は不要

原理的に計算できることが分かれば実際の計算は機械にまかせればよい。現行の筆算は，一部に暗算を利用して効率よく（早く）計算できるように工夫されたものである。それを習得すれば計算が速くできるようになることが期待できる一方で，計算の意味を筆算形式で捉えてしまう誤解を招く原因にもなっている。たとえば，小数で割る割算で，被除数と除数に10や100を掛けて計算することが指導される結果として，そこに出てきた余りが考えるべき除算の余りだとされてしまうことが多い。計算の意味とアルゴリズム（その根拠となる原理を含む）が理解できたら，それ以後の計算は計算機にまかせ，計算の利用に焦点を絞って学ぶことにしたい。

加法

各位の数を足して，1の位の数の和が10以上になったら，10を10の位に移す。

例 $25 + 38 = 20 + 5 + 30 + 8 = 20 + 30 + 5 + 8 = 50 + 18 = 50 + 10 + 8 = 68$

☆ 筆算に替わる適切な教具（あるいは書式）を工夫することが課題。

減法

筆算で引き算を上手にこなせるのは減加法だけれども，減加法は，大きな数を引く計算から入るという不自然さを伴う。自力で考えようとする子供を伸ばすために，筆算のことを考えずに，自然な発想を引き出す指導法に転換すべきときが来ている。

減々法

$$15 - 5 = 10$$

$$15 - 6 = 15 - 5 - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$15 - 7 = 15 - 5 - 2 = 10 - 2 = 8$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

1 の位から引いていく

$$\text{例 } 76 - 48 = 76 - (40 + 8) = 76 - 40 - 8 = 36 - 8 = 20 + 16 - 8 = 20 + 8 = 28$$

減加法

$$15 - 10 = 5$$

$$15 - 9 = 10 + 5 - 9 = 10 - 9 + 5 = 1 + 5 = 6$$

$$15 - 8 = 10 + 5 - 8 = 10 - 8 + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$(a + b) - c = a - c + b$$

10 の位から引く

乗法 掛算は加法の累積。たとえば,

$$14 \times 23 = 14 + 14 + 14 + \cdots + 14$$

$$= (14 + \cdots + 14) + (14 + \cdots + 14) + (14 + 14 + 14)$$

$$= 14 \times 10 + 14 \times 10 + 14 \times 4 = 140 + 140 + 56 = 336$$

分配法則に繋がる考え方を経験させる。

乗法の交換法則

乗法の交換法則は、長方形状に並べたものの個数をかぞえることから見出される。

除法（包含除）

$a \div b$ の計算は, a から b を引く計算を繰り返して q 回引くことができたなら $0 \leq a - b \times q < b$ 。
 q を商, $a - b \times q$ を余りという。

例 5L の水を 1.8L 瓶に詰めると, 何本できて何 L 余るか?

除法（等分除）

a を n 等分するのに, それが実現したらその答えを $\square$ として $a = \square \times n$

包含除の計算で $a \div n$ の計算を実行して割り切れるときその商を q として $a = n \times q$

乗法の交換法則を用いて $n \times q = q \times n \quad \therefore \square = q$

このようにして, 等分除の問題を包含除の問題に置き換えて解くのが現行の算数。

a を n 等分することは, $a = x \times n$ となる x を求めることだから掛算の逆算。

現行だと掛算九々の範囲で答を求めることに相当する。

これは, 掛算九々の表を大きく広げさせれば原理的に実行可能。

1.1.2 乗法の意味の拡張

小数倍・分数倍

n を自然数, a を正の数とすると, n 倍して a になる数を $a \times \frac{1}{n}$ で表す。すなわち,

$$\left(a \times \frac{1}{n}\right) \times n = a$$

m, n を自然数とすると, 正の数 a の $\frac{m}{n}$ 倍を $a \times \frac{m}{n} = \left(a \times \frac{1}{n}\right) \times m$ で定める。

このように定めると, たとえば,

$$a \times \frac{6}{3} = \left(a \times \frac{1}{3}\right) \times 6 = \left(a \times \frac{1}{3}\right) \times (3 \times 2) = \left\{\left(a \times \frac{1}{3}\right) \times 3\right\} \times 2 = a \times 2$$

となって自然数倍の積の意味の拡張になっている。

面積・体積

面積・体積は、単位正方形、単位立方体の個数をかぞえている。「長さを掛ける」ように乗法の意味を拡張しているのではない。

乗法の交換法則

小数倍に拡張したときでも交換法則は成立することを説明するのに一番簡単な方法は計算の過程で交換法則が成立する計算（九々）を使っていること。計算指導を省力化するとその手が使いにくくなる。縦横が小数の長方形の面積で説明するのがいいのではないだろうか。

1.1.3 除法の意味

割算の筆算のために包含除を置いておく必要はない（包含除それ自体の存在意義はある）。

除法を、余りを考える割算と余りを考えない割算に分類する。

余りを考えない割算を乗法の逆算として教える（除数を小数、分数に拡張後）。

余りを考える割算

a を b で割った商が q 、余りが r であるとは、

$$a = b \times q + r, \quad q \text{ は整数}, \quad 0 \leq r < b$$

この割算は、掛算を加法の累加の意味にとどめる範囲での乗法の逆算（被乗数は小数・分数でもよいが乗数は整数）。

乗算の逆算としての割算

$a \div b$ は、 b を掛けると a になる数、すなわち、 $\square \times b = a$ となる $\square$ 。

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ は、 $\square \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ となる $\square$ を求めればよい。

$\frac{d}{c} \times \frac{c}{d} = 1$ であることを利用すると、 $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

だから、 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

$\square \times a = 1$ となる $\square$ を a の逆数という。

割り算は割る数の逆数を掛ければよい。

1.1.4 負の数

現在、負の数を中学校1年で一気に学ぶ。負数の意味理解が不十分なまま計算技能を学んでいる。負数を小学校から段階を踏んで学ぶカリキュラムを作れないだろうか。負数そのものは、数直線上に表せるから、目に見える形で存在を示せる。たとえば、川の水位は、基準点を0mとして測る。たとえば、-90cmから30cmだけ増水したら今何cmだろうか。現実的な問題に即して負数の利用と、正負の数の加減までは容易に学べる。難しい

のは、負数をかける掛け算である。負数を掛けることの意味は中学校で学ぶというようにすれば、より理解を深めることができるのではないだろうか。

英国では、日本でいう1階が0階、日本の2階が英国で1階となっていて、負数を学ぶのに都合がよい。実際、負数が小学校の早い段階から学習されている。

日本の例では、小学校社会科で全国各地の年間の気温変動を学ぶ。負数を学ぶ必要性を知るのに恰好な教材である。

負数の導入の難しさ 負号は減算からの借用

負数が西洋で認知されたのは比較的新しい時代であるため、負号‘-’は減算からの借用である。数字の列と小数点は密に結合し一つの数を表すのに、負号‘-’の結合順位は、加減算と同等である。たとえば、 $1.23a$ は、 $1.23 \times a$ を表すのに、 $-1.23a$ は $-(1.23a)$ を意味し、 $(-1.23) \times a$ ではない（代数的には等しいが、文法的には異なる）。

負数を数として記す記法がないのが負数の学習を困難にしているかもしれない。たとえば、負数を表すのに -12 のように書いて、負数の導入を図る試みがなされることがあるが、そうしても、すぐに負号を用いた表記に移行を余儀なくされる。単項マイナスの $-a$ の結合順位を加減算と同等におく現行の記数法に依らざるをえない現状では、 $0 - a$ の略記と考えて負数の指導手順を考えるしかないように思える。

負数の負号は、引き算を意味するから、負数を含む式では、負数を括弧で括る。たとえば、 $2 + (-3)$ の括弧を省かない。

☆ 負号を負数専用の記号として用意すれば、たとえば、 $2 + ^-12$ のように書ける。

1.1.5 文字式

文字式の記法は、英語（西欧語）の構造が土台になっていて、日本人はハンディを負っている。たとえば、 $10a$ は英語だと‘10個の a ’を意味するから、英語では $10a - a = 9a$ は自然に読める。

文字式で難しいのは、負数の代入である。文字に数を代入するときは、その前後に括弧を追加して行うのが基本だけれど、正の数のときには括弧を書かずに済むから、負数の代入でつまづく。負数も数の仲間だとする認識が十分に深まった後に文字式を学ぶという戦略もあるのではないか。

1.2 比と比例

1.2.1 比

比が等しいことの意味

2数 a, b に対し、 $a : b$ を比といい、 a を前項、 b を後項という。

前項と後項に同じ数を掛けて得られる比は等しい。

たとえば、 $a : b = a \times 2 : b \times 2 = a \times 3 : b \times 3 = \dots\dots$

この比の定義は、2量が同種の量であるか異種の量であるかを問わない。

たとえば、酢と油の量について、

$100\text{ml} : 80\text{ml} = 200\text{ml} : 160\text{ml} = \dots\dots$

$$100\text{ml} : 60\text{g} = 200\text{ml} : 120\text{g} = \dots\dots$$

計測単位が異なる 2 量（たとえば、一方で cm でもう一方が寸）にも適用できる。たとえば、

$$1.8\text{m} : 2\text{寸} = 90\text{cm} : 1\text{寸}$$

☆ 酢、油どちらも体積のときは同種の量、酢を体積、油を重さで計測するときは、異種の量？。それとも、酢と油は同じ単位で計測しても異種の量？、それとも、計測単位が異なっても液体は同種の量？

小数倍と分数倍

n を自然数とするとき、 $a : b = na : nb$ である。 $na : nb$ の側から見て $a : b$ が同じ比であるというためには、乗数を分数に拡張する必要がある。すなわち、 $a : b = \frac{1}{n}a : \frac{1}{n}b$ 。

その結果として、必然的に、 $a : b = \frac{m}{n}a : \frac{m}{n}b$ でもある。

比例

いろいろな値をとって変わる数量を表す文字を変数という。

2 つの変数 x, y は、 $x : y$ がいつでも同じであるように変化するとき、 x と y は**比例**するという。

例 一定の速さで走る車の走行時間と走行距離は比例している。

例題 1 時間に 40km で走る車が 60km 走るのに要する時間を求める。

1 時間 : 40km = x 時間 : 60km となる x を求める。

60km は 40km の 1.5 倍なので、 x 時間は 1 時間の 1.5 倍、すなわち、

1 時間に 40km で走る車が 60km 走るのに要する時間は 1.5 時間。

比とは？

x と y が比例関係にあるとき、比の性質 $x : y = 2x : 2y = 3x : 3y = \dots$ を満たすのは当然だけれども、比例関係にない 2 量についても、測定方法を変更するとき、比の性質が現れる。

たとえば、 $2\text{L} : 3\text{L} = 2000\text{mL} : 3000\text{mL}$ だから、 $2 : 3 = 2000 : 3000$ 。

もの個数を数えるとき、2 個ずつ束にするか、3 個ずつ束にするかで

$$12 : 18 = 6 \times 2 : 9 \times 2 = 6 : 9$$

$$12 : 18 = 4 \times 3 : 6 \times 3 = 4 : 6$$

などとなる。

単位量当たり

同じ比を与える同値類のうち、一方が 1 のときを考える。

例 60km 走るのに 1.5 時間かかるとき、前項、後項を 1.5 で割って

$$60\text{km} : 1.5\text{h} = 40\text{km} : 1\text{h}$$

1 時間だと 40km 走る。ただし、走行距離と時間は比例するものと仮定。

さらに、後項を 1h で割って 1 にする。

$$60\text{km} : 1.5\text{h} = 40\text{km/h} : 1$$

1 時間あたりの走行距離（速さ）を求めておくと、(距離) = (速さ) × (時間) の計算で時間から距離を求めることができる。

連比

3 つ以上の項を持つ比を連比という。

各項に同じ数を掛けて得られる連比は等しい。すなわち、

$$a : b : c = a \times 2 : b \times 2 : c \times 2 = a \times 3 : b \times 3 : c \times 3 = \dots\dots$$

例題 酢, 油, 塩を混ぜてサラダドレッシングを作るとき, それらが同じ比であるとき同じ味になる。酢 400ml, 油 500ml, 塩 1g と同じ味のドレッシングを作る。酢 1000ml のとき, 油, 塩をどれくらい用いたらよいか。

☆関数 $y = f(x)$ の枠組みで考えるかぎりは $\frac{y}{x} = \text{一定}$ を比の定義にして支障ない。けれども, 相似な三角形の 3 辺の長さの比や, 空間ベクトルの向きなど, 連比として捉えないと認識しづらい事柄もある。たとえば, 相似な三角形では対応する辺どうしの長さの比が等しいことから, 三角形の 3 辺の長さの比の概念が生まれる。3 辺の長さの比の概念が形成されないと, 正弦定理を $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ と捉えることができない。

☆ 確率は, 全体を 1 とする割合であるが, その本質は連比である。

☆ 比と比の値

比 $a : b$ に対し, $\frac{a}{b}$ を比の値という。比が等しいとき, 比の値も等しい。

そして, 比の値が等しければ比が等しいこともいえる。現行の算数教科書の多くは, 比の値が等しいことを比が等しいことの定義に採用している。これは多くの人にとって考えにくい定義なのではないだろうか。たとえば, 同じ味のドレッシングを作るとき, 酢の量を油の量で割算して比の値を求めて考える人がどれほどいるだろうか。しかも, ドレッシングには, 酢と油だけではなくて, 塩, 胡椒も入れるのが普通であり, そうすると, 同種の量の割合とか異種の量の割合とかも絡んできて面倒なことになる。

連比の場合も含めて, 各項に同じ数を掛けて得られる比は等しいと約束することを先行して学ばせるべきではないだろうか。なお, x と y が比例するとき, 比の値は $\frac{x}{y}$ であるが, 比例定数は $\frac{y}{x}$ である。比の値を学ぶことが 1 次関数の学習に繋がることはあまり期待できないし, もしかすると, それを阻害するかもしれない。

英語では, ratio は b を基準量とする $a \div b = \frac{a}{b}$ のことである。有理数は, rational number で「比の数」を意味する。西洋では, 分数 $\frac{a}{b}$ は, 比 $a : b$ と同一視されている。その流れで, 基準量に対する割合 (比の値) のことも「比」と呼ばれる。

1.2.2 割合

全体に占める割合

全体を 1, あるいは 100 % として各部分が占める割合を求める。

水 475g に食塩 25g を溶かして 500g の食塩水を作ったとき, 食塩は全体の重さの何%だろうか。

水	食塩	計
475g	25g	500g
95%	5%	100%

合計が 100 % となるようにする。500g を 100 にするためのは、5g で割ればよい。

水、食塩も同様に 5g で割る。その結果、全体に占める食塩の重量比は 5% とわかる。

除算を利用する比較（割合）

2 量を比較するのに、差で比較する、比で比較する、方法がある。

差で比べるのが求差。

比で比較するとは、2 量の比が等しいとき、同じ割合とみる考え方。

2 量 a, b に対し $a : b = \frac{a}{b} : 1$ なので、 $\frac{a}{b}$ を後者を基準とする（基にする）ときの前者の割合という。

☆ 割合の背後に比例関係はない。意味的には等分除（ a を b 等分する）の拡張。

けれども、同値な比（比の値ではない）を先行して学び、比の扱いに習熟した後に比に擬態して割合を学ぶことで割合が学びやすくなるかもしれない。

参考 シンガポールの算数

5 年 Ratio → Rate → Percentage

6 年 Ratio and Fraction → Ratio and Proportion → Percentage → Speed

カリキュラム改定で多少の前後はあるけれど、Ratio を初めに学ぶことは一貫している。ここでいう Ratio は英語であるが、英国における Ratio（比の値）ではなく、同値類で定義される意味の比である。Singapore Method を標榜する英国向け教科書では比を比の値で定義しているのに、シンガポール国内では比の値で比を定義することをしていない。

参考 「学ぼう！算数」（西村和雄，岡部恒治 編著，数研出版）

3 年で比を扱う。比の定義は、前項と後項に同じ数を掛けて得られる比は等しい。

1.3 素朴な関数関係

1.3.1 比と比例

1.3.2 自然界に現れる関数関係

関数関係を利用して式に表すことが関数学習の主要な目標。どんな場合にどんな関数が現れるかを学習する。

2 次関数 面積＝縦 × 横。相似形の面積は相似比の 2 乗に比例する。

2 次関数のもう一つの側面。加速度一定のとき、速度は 1 次関数、変位は 2 次関数。

3 次関数

体積＝縦 × 横 × 高さ。相似形の体積は相似比の 3 乗に比例する。

反比例

積が一定数であるとき、その 2 量は反比例する。

2 乗に反比例

一定面積を通過する放射光は、光源からの距離の 2 乗に反比例する。これは、3 次元空間の特性。

その他、距離の増大とともに現象を生じさせるエネルギーが距離の 2 乗に比例して分散するため、2 乗に反比例する現象が自然界に見られる。たとえば、万有引力の法則、クーロンの法則。

1.3.3 比例

x の値が 2 倍、3 倍、……と変化するときそれに連れて y の値も 2 倍、3 倍、……と変化するとき、 x と y は**比例**するという。3 つ以上の変数の比例も同様に定義する。

2 つの変数 x と y が比例するとき、 x の値が 1 のときの y の値を a とすると、 $y = ax$ と表せる。このことから、2 つの変数 x と y が比例するとは、 $\frac{y}{x}$ の値が一定の値をとることだといえる。この一定値を**比例定数**という。

☆ 3 変数以上の場合、この捉え方 ($\frac{y}{x}$ の値が一定) は扱いにくい。

比例のグラフ

x と y が比例するとき、それをグラフに表すと x, y が表す点は一直線上に並ぶ。

逆に、グラフ上で x, y が表す点が原点を通る直線上にあるとき、 x と y は比例している。

比例式

$x : y = a : b$ のとき、 $ya = xb$ (内項の積 = 外項の積)

この関係は $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ から導くことができる。

比は

$$x : y : z = a : b : c \Leftrightarrow \exists k [x = ak, y = bk, z = ck] \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

が基本。この捉え方であれば、 $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ は無名数。

内項の積と外項の積

$a : b = c : d$ のとき、 $c = ka, d = kb$ とすると、 $k = \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ なので $ad = bc$ 。

☆ 伝統的な数学では、比の値を根拠にして $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ から $ad = bc$ を導く。

1.4 文字式

数を文字で表すときの表記に関する約束を学ぶ。

文字式の難しさは、単に表記上だけではなく、代数法則に基づく規約が複雑に絡むところにある。

数と文字

数字の列と、数字の列の間に 1 個だけ小数点の入った列は数を表す。数と文字が数式記述での基本単位になる。

(注意) 負の数を, 直接, 表す手段はない。

累乗 (べき)

数, あるいは, 文字の右肩に小さく数式を書いて, 累乗, あるいは, べき乗を表す。
 n が自然数のとき, a^n は, a の n 個の積 $a \times a \times \cdots \times a$ を表す。

積

文字と文字, 数と文字の積は掛け算の記号「 $\times$ 」を省いて書いてよい。

例 $a \times b \times c$ を abc で表す。

$23 \times a$ を $23a$ で表す。

注意 数が先頭にあるときにかぎり数に続く「 $\times$ 」を省く。数が先頭がないときは「 $\times$ 」を省かない。

例 $a \times 23$ を $a23$ とは書かない。

括弧で括られた文字式の積も掛け算の記号「 $\times$ 」を省いて書いてよい。

例 $(a+1) \times (a+2)$ を $(a+1)(a+2)$ で表す。

$23 \times (a+1)$ を $23(a+1)$ で表す。

商 (除算)

除法 $A \div B$ を $\frac{A}{B}$ で表す。除算を分数の形に書くとき, 分子, 分母を計算した後に除算を実行する。たとえば, $\frac{4 \times 3}{2 \times 3} = (4 \times 3) \div (2 \times 3)$, $\frac{1}{ab} = 1 \div (ab)$, $\frac{a+1}{a-1} = (a+1) \div (a-1)$ 。

文字と $\frac{A}{B}$ の形の文字式 (文字を含む式) の積は, $\times$ を省いて書いてよい。ただし, 省かないことが推奨される。

例 $\frac{1}{x+1} \frac{x+2}{2}$ は $\frac{1}{x+1} \times \frac{x+2}{2}$ を意味する。ただし, $\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x+2}{2}$ のように積を $\cdot$ で示すことが望ましい。

分数が先頭であるとき, 分数と, 文字の積は $\times$ を省いて書いてよい。たとえば, $\frac{1}{2}a$ は $\frac{1}{2} \times a$ を意味する。

注意 分数は商に分類される。分数のべきは, $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ のように括弧で括らなければならない。

注意 数と分数の積を書くとき $\times$ を省いてはいけない。数, 分数の順に書くとき, $\times$ を省くと帯分数と解釈される。たとえば, $3\frac{1}{2}$ は $3 + \frac{1}{2}$ を意味する。

代入

文字を具体的な数や別の文字式で置き換えることを代入という。

代入するときには乗算記号「 $\times$ 」や括弧 $()$ を補うことが必要な場合がある。代入するときは, $()$ を補うのが原則で, $()$ を挿入しなくても済む場合もあると理解したほうがよい。

例 abc の b に 25 を代入する。

$b = 25$ のとき, $abc = a \times 25 \times c$

例 abc の b に -25 を代入する。

$b = -25$ のとき, $abc = a \times (-25) \times c$

例 abc の b に $a + 2$ を代入する。

$b = a + 2$ のとき, $abc = a \times (a + 2) \times c$

1.4.1 一次関数

一次関数

関数 $y = ax + b$ を一次関数という。

$x = x_0$ のとき $y = y_0$ であるとする, $y_0 = ax_0$ なので

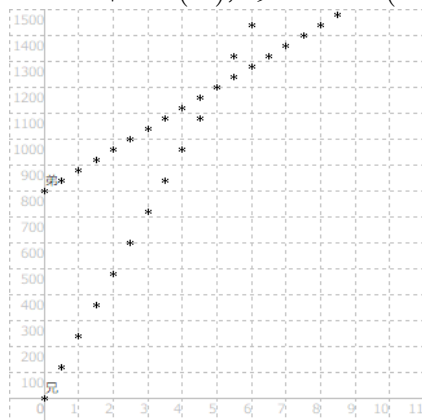
$y - y_0 = a(x - x_0)$ となつて, $y - y_0$ と $x - x_0$ は比例関係にある。

一次関数と一次方程式の学び方

一次関数のグラフを描くことによって一次方程式の問題を解くことを一次方程式の代数的解法に先行させたい。この活動を通して一次関数についての理解を深めることができる。

例題 1 弟が毎分 80m の速さで出発した 10 分後, 兄が毎分 240m の速さで弟を追いかけたとき, 何分後に追いつきますか。

解. 兄が出発したとき弟はすでに 800m 進んでいるので, 兄が出発した x 分後の位置は, 弟が $80x + 800$ (m), 兄が $240x$ (m) である。



□

Note. 上の図は, コンピュータを用いて計算して描いたものであるが, コンピュータによる作図は, コンピュータが答を知っていて, たとえば, 「一次関数だから直線を描けばよい」という知識に基づいて描いているのではなく, 地道に計算して描かれたものだという理解が必須である。手計算や電卓利用で計算しそれをグラフ用紙に表すことから始めて, 電卓利用の部分をプログラムで計算し, 最後にコンピュータの作図機能を用いて作図するという手順で指導することにしたい。

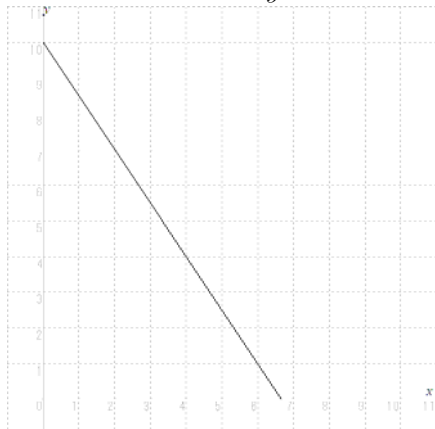
ただし, 実際にコンピュータが利用される場面では, コンピュータの作図が数学的知識に基づいてなされることもある。たとえば, ある種の変換では直線が直線に移ることが数学的に証明されていれば, 手抜きによって作図が高速化できる。

1.4.2 2元一次方程式

2元一次方程式の解直線を描く。それを利用して2元連立一次方程式の解を得る。

例題 2 1kg150 円の砂糖 x kg と、1L100 円の炭酸水 y L を買って 1000 円にしたい。それぞれどれほど買えるか。

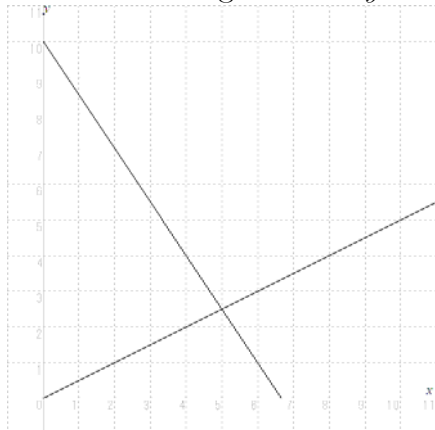
ヒント. $150x + 100y = 1000$



□

例題 3 砂糖 2kg に対し炭酸水 1L の割合で、1000 円で 1kg150 円の砂糖と 1L100 円の炭酸水を買いたい。それぞれどれだけ買えばよいか。

ヒント. 砂糖 x kg と炭酸水 y L を買うとき, $x : y = 2 : 1$, $150x + 100y = 1000$



□

一次不等式

一次不等式の解の領域を図示する。

さらに、連立一次不等式が表す領域を図示し、問題解決に利用する（線形計画法）。

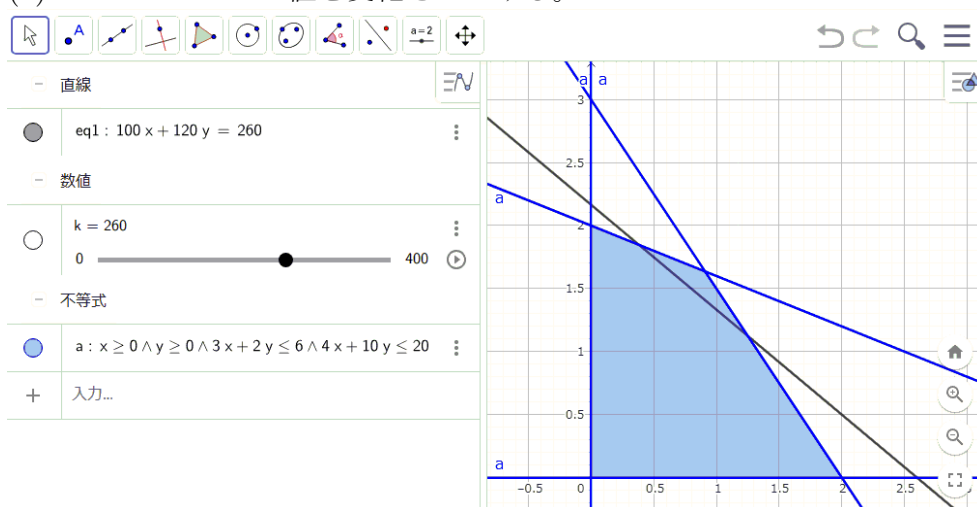
例題 4 ある工場で製品 A を 1kg 作るのに電気を 3kwh, 水を 40L 使い、製品 B を 1kg 作るのに、電気を 2kwh, 水を 100L 使う。電気は最大 6kw, 水は 1 時間当たり最大 200L まで使える。

- (1) 製品 A の重量を x kg, 製品 B の重量を y kg として, この工場で 1 時間に作ることが可能な製品 A, B の重量の範囲を図示しなさい。
- (2) 製品 A を 1kg 生産すると 100 円, 製品 B を 1kg 生産すると 120 円の利益がある。製品 A を x kg, 製品 B を y kg 作るときの利益を k 円とすると, 利益が k 円となるときの x, y を図示しなさい。
- (3) 利益が最大となるのは, 製品 A, 製品 B をそれぞれ何 kg ずつ作るときか。

ヒント. (1) $3x + 2y \leq 6, 40x + 100y \leq 200$

(2) $100x + 120y = k$

(3) GeoGebra で k の値を変化させてみる。



□

座標 (方眼紙) の活用

練習 5 1000 円以内で 110 円切手 1 枚以上と 140 円切手 1 枚以上のセットを作る方法は何通りあるか。

練習 6 $x \geq 0, y \geq 0, x + 4y \leq 10, 3x + y \leq 20$ のとき, $x + 2y$ が最大となる x, y を求めよ。

2 元一次方程式

$ax + by = k$ を満たす 2 数 x, y を座標平面上に図示する。

観察 7 (1) 方程式 $2x + 3y = 16$ を満たす点を図示する。

(2) 両辺を 2 倍した $4x + 6y = 32$ を満たす点を図示する。

(3) $k = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $2x + 3y = 4k$ を満たす点を図示する。

(4) 原点から $2x + 3y = 4k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) に下した垂線の足がどんな図形を描くか。

(5) $2x + 3y = 16$ を満たす整数 x, y の組を求め, その数値がどんな規則で出現するか調べる。

直線群 $ax + by = k$

定数 k の値を変化させて直線群 $ax + by = k$ を図示する。 k の値を一定間隔で変化させると、直線群は等間隔な平行線群になる。

2 元連立一次方程式

2 元連立一次方程式の解を座標平面上に図示する。

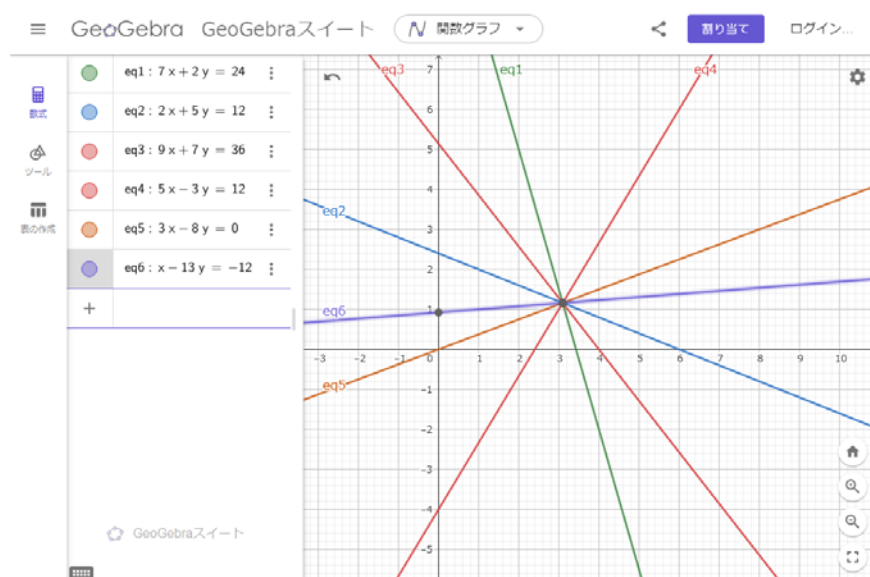
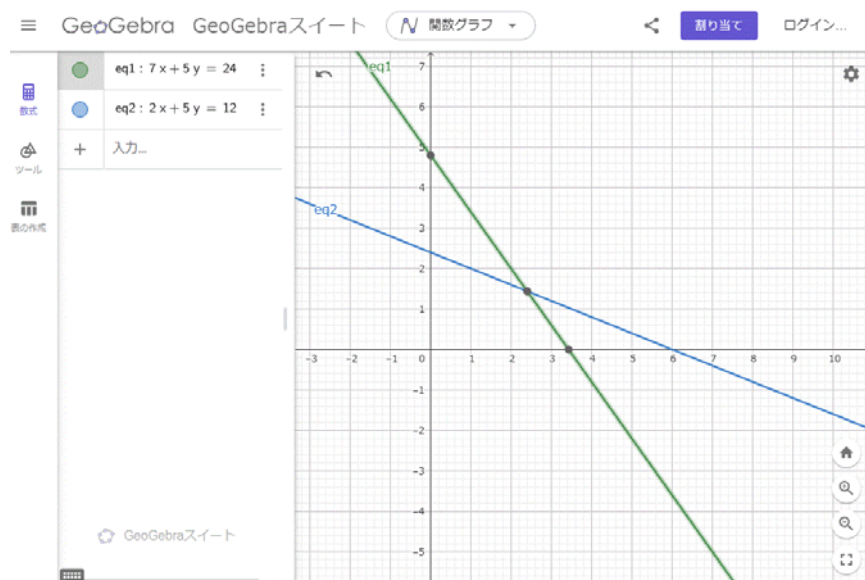
観察 8 連立方程式 $\begin{cases} 7x + 2y = 24 & (1) \\ 2x + 5y = 12 & (2) \end{cases}$ を考える。

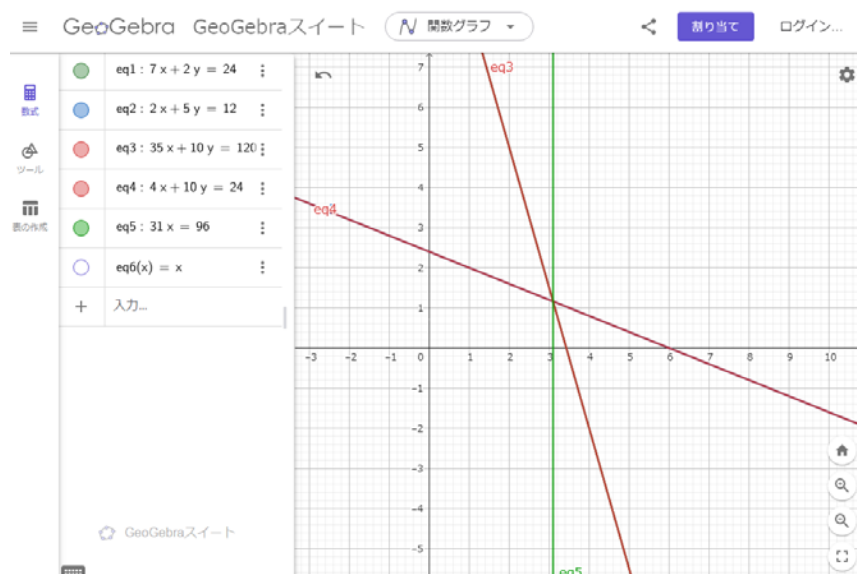
(ア) 2 直線 $7x + 2y = 24, 2x + 5y = 12$ を図示する。

(イ) $(1) + (2)$ $9x + 7y = 36$ を図示する。

(ウ) $(1) - (2)$ $5x - 3y = 12$ を図示する。

(エ) (1) 式の何倍かと (2) 式の何倍かを足したり引いたりして y の係数が 0 の式を作れないか？





1.4.3 不等式

不等式の性質

$a > b$ のとき, $c > 0$ ならば $ac > bc$, $c < 0$ ならば $ac < bc$

不等式の解

一次不等式

不等式の両辺に負数を掛けると不等号の向きが逆になる。

1.4.4 いろいろな関数

ここまで加減乗除について学んでいるので, 加減乗除の演算で記述可能な現象を数式で記述できる。

コンピュータを利用してグラフを描くことで

増加・減少, 最大・最小

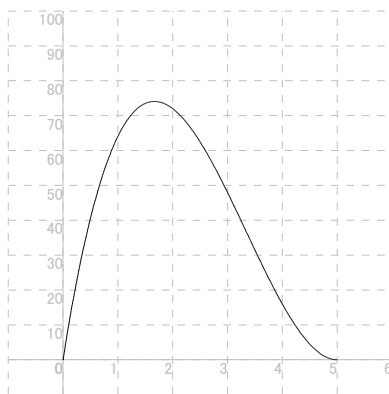
2つの関数について一方が他方より大きい範囲

などをグラフから読み取ることが可能になる。

相似図形に対し, 面積が2乗, 体積が3乗に比例すること, 空間の1点から放射される光などの強度が中心からの距離の2乗に反比例するなどが基本。特に, 我々の空間が3次元空間であることを反映し, 2乗に反比例する事象が, 万有引力の法則やクーロンの法則などとして現れることに注意しよう。

例題 9 例題 1辺の長さが10cmの厚紙の4隅から同じ大きさの正方形を切り取って蓋のない箱を作るとき, 容積を最大にするためには切り取る正方形の大きさをどう選べばよいか。

切り取る正方形の1辺の長さを x cm とし, 箱の容積を y cm³ とすると,
 $y = x(10 - 2x)^2$, ただし, $0 < x < 5$



```

DEF f(x)=x*(10-2*x)^2
SET WINDOW -1,6,-10,100
DRAW grid(1,10)
FOR x=0 TO 5 STEP 0.01
  PLOT LINES:x,f(x);
NEXT x
END

```

1.6 と 1.7 の間で最大となりそうなので,

```

10 DEF f(x)=x*(10-2*x)^2
20 FOR x=1.6 TO 1.7 STEP 0.0001
30   PRINT x,f(x)
40 NEXT x
50 END

```

を実行してみると,

(略)

1.6665	74.0740735185
1.6666	74.074073985184
1.6667	74.074074051852
1.6668	74.074073718528
1.6669	74.074072985236
1.667	74.074071852

(略)

となるので, およそ 1.6667cm とすればよいように思える。

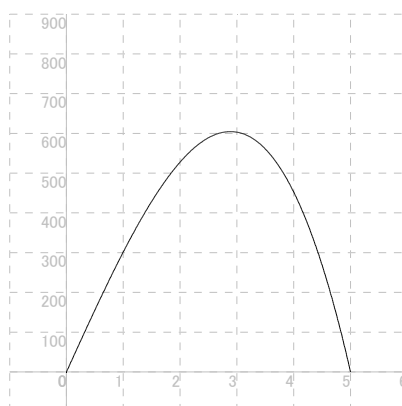
さらに詳しい数値が必要であれば, 1.6667 付近で細かく計算してみれば, 必要な精度で近似解が求まる。

観察 10 y の値が最大となるときの x の値は, $y = 0$ となるときの x の値 0, 5 の中央よりずれている。

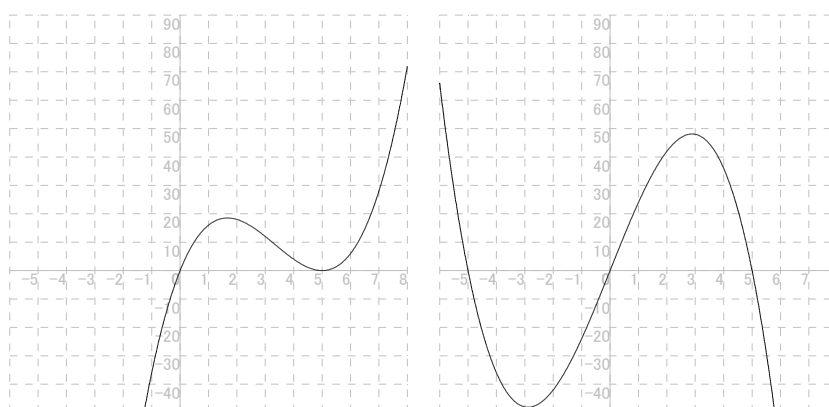
練習 11 直径が 10cm の球に直円柱を内接させるとき, 円柱の高さをどう選ぶと体積を最大にできるか。

ただし, 直円柱とは, 底面の円の中心を結ぶ直線が底面と垂直な円柱のこと。

底面の半径を $r\text{cm}$ 、高さを $2h\text{cm}$ とすると、 $r^2 + h^2 = 5^2$
 体積を $V\text{cm}^3$ とおくと、 $V = 4\pi r^2 h = 4\pi (25 - h^2) h = 4\pi (5 - h)(5 + h) h$
 h を横軸、 V を縦軸にとってグラフを描いてみた。



観察 12 上の例題と練習はどちらも 3 次関数であるが、異なる特徴が現れている。定義域を拡張してグラフを描いてみよう。左が $y = x(5 - x)^2$ のグラフ、右が $y = x(5 + x)(5 - x)$ のグラフ。



問 13 次の 3 次関数のグラフを描いてみよう。また、数値を変えたとき、どうなるか調べてみよう。

- (1) $y = x(x^2 - 4)$ (2) $y = x^3$ (3) $y = x(x^2 + 4)$ (4) $y = x(x + 1)(x - 2)$

1.4.5 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$

a, b, c の値を変えて $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを描いてみる。どれも同じような形になることを確認する。

現実の現象には 2 乗に比例する関数ではなく、一般の 2 次関数となるものが大多数である。けれども、それら 2 次関数のグラフを描くとそれらがすべて同じ形（放物線）であることに気づく。

さらに、 x^2 の項の係数によってその形（大きさ・開き具合）が決まることが分かる。その事実を式変形によって確かめる。

その考察によって、2 次関数は、2 乗に比例する関数を調べればその挙動を明らかにすることができる事が分かる。

2 乗に比例する関数 $y = ax^2$ について深く考察するのはその考察の後である。

まず、次の事実は容易に観察できるし、証明も容易。これを根拠に調べて行こう。

関数 $y = x^2$

次の事実は容易にわかる。

$$x^2 \geq 0$$

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

曲線 $y = x^2$ は y 軸について対称

関数 $y = x(a - x)$

例 14 4 辺の長さの和が 20cm の長方形のうち、面積が最大となるものは何か。

1 辺の長さを x cm, 面積を y cm² とすると, $y = x(10 - x)$

直線 $x = 5$ について対称な (ようにみえる) ので $X = x - 5$ とおくと,

$$x = X + 5, 10 - x = 5 - X$$

$$\therefore y = (X + 5)(5 - X) = 25 - X^2$$

y の値が最大となるのは $X = 0$ のときで、その最大値は 25。

$X = 0$ より、 $x = 5$, すなわち、正方形のとき。

$x^2 + 2bx$ の変形

上の例と同様に考えて $x + b = X$ とおくと, $x = X - b, x + 2b = X + b$

$$x^2 + 2bx = x(x + 2b) = (X - b)(X + b) = X^2 - b^2 = (x + b)^2 - b^2$$

$y = a(x - p)^2$ のグラフ

$y = ax^2$ のグラフと $y = a(x - p)^2$ のグラフを描いて対比する。そして、そうなる理由を考える。

例 $y = x^2$ の表を利用して $y = (x - 2)^2$ の値を求める。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$(x - 2)^2$										9

たとえば、 $x = 5$ のとき、 $x - 2 = 3$ なので、 $x = 3$ に対応する x^2 の値が $(x - 2)^2$ である。

☆ $y = f(x - p)$ を、2 つの関数 $y = x - p$ と $y = f(x)$ の合成として捉えることが本質。

$x \mapsto x - p$ と $x \mapsto f(x)$ の合成と書いたほうがわかりやすい。

中学生にどう指導すればよいかを考えたい。

$y = a(x - p)^2$ のグラフと $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフを描いて対比する。そして、そうなる理由を考える。

$y = ax^2 + bx + c$ の形の式を $y = a(x - p)^2 + q$ の形に変形する方法を工夫し、また、その変形に習熟する（平方完成）。

一般の関数について $y = f(x - a) + b$ を $y = f(x)$ を土台に考える端緒。

$y = ax^2 + bx + c$ の形の式を $y = a(x - x_0)^2 + r(x - x_0) + y_0$ の形に変形する方法を工夫し、また、その意味を考える（接線）。（ $X = x - x_0$ とおき $x = X + x_0$ を代入すればよい）（ $x \rightleftharpoons x_0$ のとき $y \rightleftharpoons r(x - x_0) + y_0$ ）

展開公式 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

上の計算は、展開公式 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の応用として扱うこともできる。

$(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$ なので、

$$x^2 + 2bx = x^2 + 2bx + b^2 - b^2 = (x + b)^2 - b^2$$

例 $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$

平方根 $x^2 = a$ となる x を a の平方根（または2乗根）という。

$a > 0$ のとき、 a の平方根は正負、各1個ずつある。

a の正の平方根を $\sqrt{a}$ で表す。また、 $\sqrt{0} = 0$ とする。

$a \geq 0$ のとき、方程式 $x^2 = a$ の解は $x = \pm\sqrt{a}$ 。

☆分母の有理化などの計算技能は必要。辺の長さの比が $1:\sqrt{2}$ の長方形を考えると、 $1:\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}:1$ であるが、そこで $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であることが重要な意味を持つ。ただし、それをいつ教えるのが適切かは検討課題。

関数 $y = ax^2$

$y = ax^2$ のとき、 $y = a(x - x_0)^2 + 2ax_0(x - x_0) + ax_0^2$

なぜなら、 $X = x - x_0$ とおくと、 $x = X + x_0$ 。

$$ax^2 = a(X + x_0)^2 = a(X^2 + 2x_0X + x_0^2) = a(x - x_0)^2 + 2ax_0(x - x_0) + ax_0^2$$

$x = x_0$ の近くで関数 $y = ax^2$ は一次関数 $y = 2ax_0(x - x_0) + ax_0^2$ で近似できる。

☆ 放物線と呼ばれる理由、また、パラボラアンテナの原理なども探求させたいが中学生には難しいかも。

関数 $y = f(x - p) + q$ のグラフ

関数 $y = f(x - p) + q$ のグラフを関数 $y = f(x)$ のグラフを土台にして描く。

その活動を通して、関数 $y = f(x - p) + q$ のグラフと関数 $y = f(x)$ のグラフの位置関係についての法則を知る。

平方完成

$y = ax^2 + bx + c$ を $y = a(x - p)^2 + q$ の形に変形する方法を工夫する。

技能として2次式の平方完成ができるようにする。

平方完成の技能を利用して2次方程式の解を求める。

1.4.6 2次方程式・2次不等式

2次方程式

平方完成を利用して解く。解がない場合も扱う。

世の中の方程式が2次方程式ばかりだったら、2次方程式の解の公式の使い方に習熟することに意義があるけれど、本当にそうなのだろうか。ただし、2次式を必要とする場面は多いので、平方完成に習熟し、また、判別式に着目する視点を育てることには意義がある。

2次不等式

$$ab > 0 \Leftrightarrow a > 0, b > 0 \text{ または } a < 0, b < 0$$

$$ab < 0 \Leftrightarrow a > 0, b < 0 \text{ または } a < 0, b > 0$$

注意 「 $a > 0, b > 0$ または $a < 0, b < 0$ 」は、

「 $(a > 0 \text{ かつ } b > 0)$ または $(a < 0 \text{ かつ } b < 0)$ 」を意味する。

例

$$x^2 + 6x > 0 \Leftrightarrow x(x + 6) > 0 \Leftrightarrow x < 0, x < -6 \text{ または } x > 0, x > -6$$

$$x < 0, x < -6 \Leftrightarrow x < -6$$

$$x > 0, x > -6 \Leftrightarrow x > 0$$

なので、

$$x^2 + 6x > 0 \Leftrightarrow x < -6 \text{ または } x > 0$$

$a > 0$ のとき

$$x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$$

$$x^2 > a \Leftrightarrow x < -\sqrt{a} \text{ または } \sqrt{a} < x$$

例

$$x^2 + 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x + 2 < \sqrt{3} \Leftrightarrow -2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$$

1.4.7 3次関数

2次関数や1次関数との対比で3次関数について探求する。

3次関数の増加減少には異なる型があること、

2次関数では最大値を与える x がグラフが x 軸と交わる2点の midpoint であるのに、3次関数ではそうではない、

2次関数のグラフは線対称、3次関数のグラフは点対称。

x の値が0に近いとき、 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ は $y = cx + d$ と近い値を取る、などを見出すことができる。

3乗根

$x^3 = a$ となる x を a の3乗根（または立方根）といい、 $\sqrt[3]{a}$ で表す。

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$$

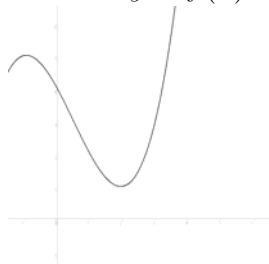
体積が $a\text{cm}^3$ の立方体の1辺の長さは $\sqrt[3]{a}\text{cm}$ 。

1.4.8 合成関数

$$f(x-a)$$

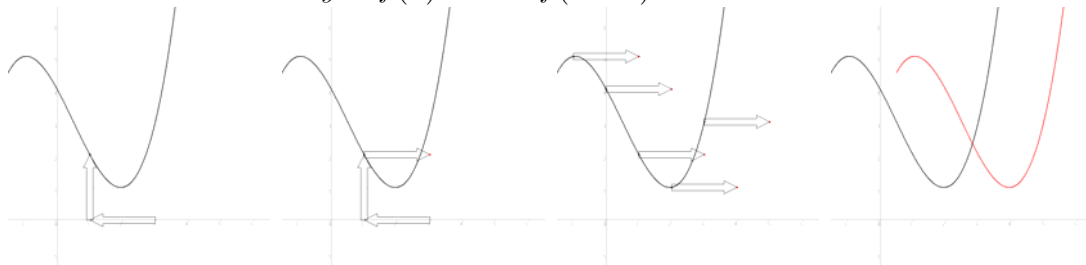
$y = f(x-a)$ のグラフを描くと、 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に a 平行移動したものであることが観察される。その理由を調べよう。

例題 15 $y = f(x)$ のグラフが図のように与えられている。 $y = f(x-2)$ のグラフを描け。



関数 $y = f(x-2)$ は、 $x \mapsto x-2$ と $x \mapsto f(x)$ の合成写像である。

解. $x-2$ に対応する $y = f(x)$ の値が $f(x-2)$



□

練習 16 $y = f(x)$ のグラフが図のように与えられている。 $y = f(2x)$ のグラフを描け。

1.5 データの数学

1.5.1 2次元データ

2次元分布

2次元分布を縦横の表に表す。縦横集計結果が一致することを経験させる。

散布図

データの傾向を読み取る。

1.5.2 測定値

測定値をもとに計算する。区分求積の考え方につながる考え方を学ぶ。

例題 17 出発した後 t 秒後の速さが以下のように測定された。20 秒間に進んだ道のりは何 m か。

時刻 (秒)	速さ (m/秒)
0	0
2	3.0
4	4.0
6	4.5
8	4.8
10	5.0
12	5.5
14	5.6
16	5.6
18	5.7
20	5.8

解. 前後 1 秒ずつ (計 2 秒) の間は計測された速さで移動していたと考えて

$$0 \times 1 + 3.0 \times 2 + 4.0 \times 2 + 4.5 \times 2 + 4.8 \times 2 + 5.0 \times 2 \\ + 5.5 \times 2 + 5.6 \times 2 + 5.6 \times 2 + 5.7 \times 2 + 5.8 \times 1 = 93.2 \quad \text{答 } 93.2\text{m} \quad \square$$

注意 18 この考え方を習得すると、時刻-速さのグラフで面積が移動距離になる理由が説明できる。

1.5.3 指数と対数

$$a \times 10^n$$

指数を負数に拡張して、数値 (正の数) を $a \times 10^n$ の形に表す。

指数法則を利用してこの形の 2 数の乗算または除算を行う。

例 太陽と地球間の距離は、およそ $1.5 \times 10^8 \text{km}$ 、光の速さは、およそ $3.0 \times 10^5 \text{km/s}$ 。太陽を出た光が地球に届くのに要する時間は、およそ $(1.5 \times 10^8) \div (3.0 \times 10^5) = 0.5 \times 10^3 = 5.0 \times 10^2 = 500$ (秒)

例 炭素原子 6.0×10^{23} 個は、およそ 12g ある。炭素原子 1 個の重さは、およそ $12 \div (6.0 \times 10^{23}) = 2.0 \times 10^{-23}$ (g)

指数の拡張

$a \times 10^n$ の形に表すとき、 a を仮数部、 10^n を指数部という。 $a \times 10^n$ の形の数どうしの乗除算では、仮数部、指数部、それぞれの乗除を行い、最後に仮数部 a が $1 \leq a < 10$ を満たすように指数を調整する。

$a \times 10^n$ を 10^x の形に表せるように指数を拡張し、指数部の計算のみで乗除が行えるようにしたい。

$\left(10^{\frac{1}{n}}\right)^n = 1$ を満たす数として $10^{\frac{1}{n}}$ を定義し、 $10^{\frac{m}{n}} = \left(10^{\frac{1}{n}}\right)^m$ と定める。

拡張された指数に対しても指数法則 $10^p 10^q = 10^{p+q}$ が成立する。

例 $1.5 \doteq 10^{0.176}$ 、 $3 \doteq 10^{0.477}$ なので、太陽と地球間の距離は、およそ $10^{8.176} \text{km}$ 、光の速さは、およそ $10^{5.477} \text{km/s}$ 。太陽を出た光が地球に届くのに要する時間は、およそ $10^{8.176} \div 10^{5.477} = 10^{2.699}$ (秒)

☆ この例の計算程度であれば，拡張された指数の存在意義は小さいけれども，巨大数や微小数を扱うのに拡張された指数の意義は大きい。

常用対数

10 を底とする対数を用いて数値の大きさを評価する。

正の数 M に対し， $10^x = M$ となる x を $\log_{10} M$ で表す。

$$\log_{10} 10^x = x, \quad \log_{10} MN = \log_{10} M + \log_{10} N$$

記法の約束 $\log_{10}$ は乗除より弱く，加減より強い。すなわち

$\log_{10} MN$ は $\log_{10} (MN)$ を意味し， $\log_{10} M + \log_{10} N$ は $(\log_{10} M) + (\log_{10} N)$ を意味する。

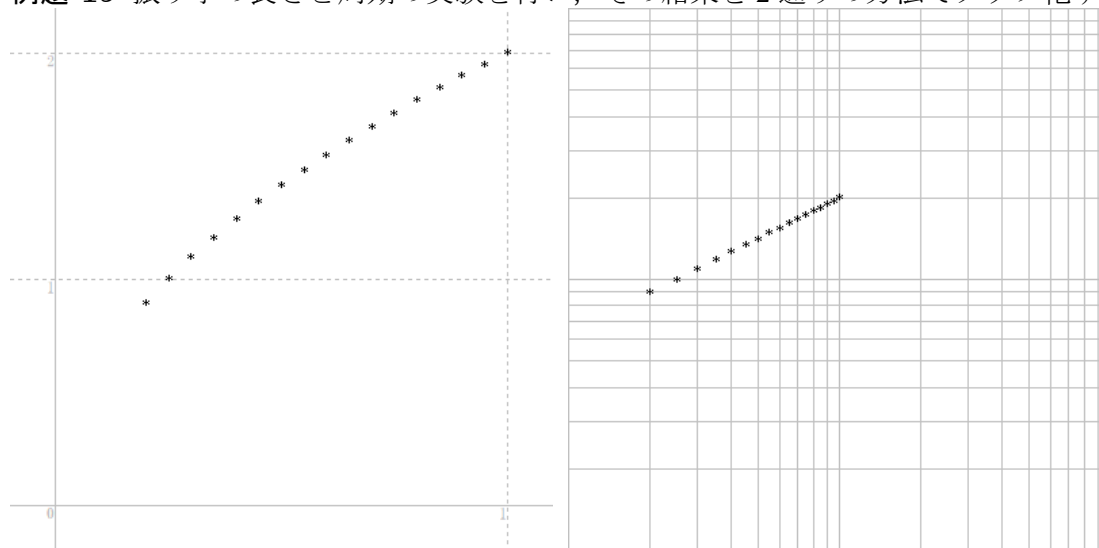
☆ 計算尺を教育玩具として復活させられないか？ 電卓が普及する前は，掛け算，わり算，平方根の計算に計算尺が利用されていた。

対数グラフ

対数グラフが自然科学，社会科学分野で広く用いられている。対数目盛，対数尺の意味を理解し，対数グラフから法則性を読み取ることができるようにする。

対数グラフでは，比が等しいとき，グラフ上で間隔が等しい。

例題 19 振り子の長さ と 周期の実験を行い，その結果を 2 通りの方法でグラフ化する。

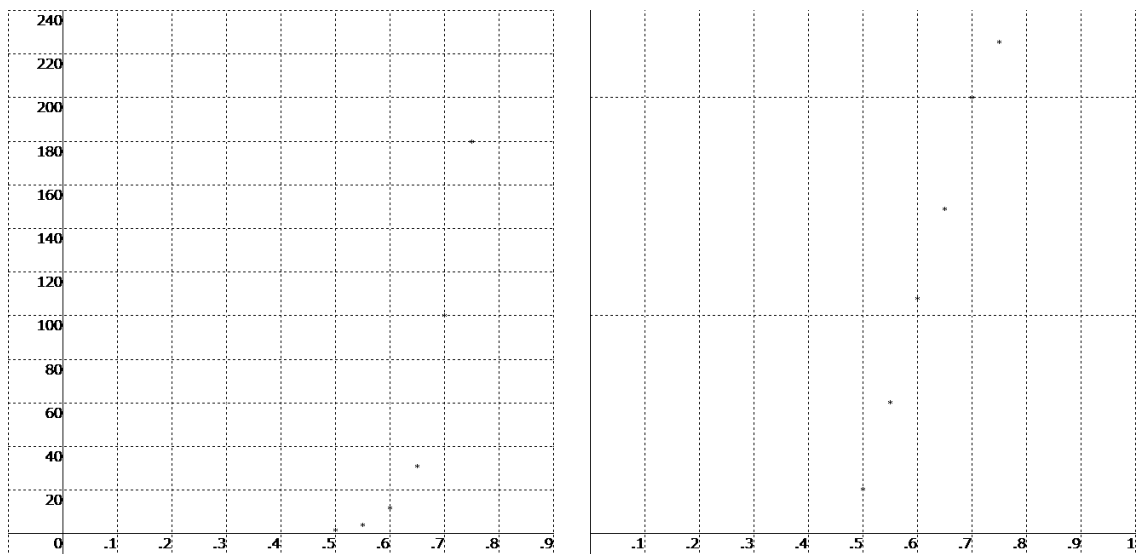
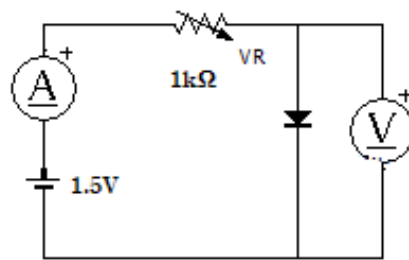


横軸 振り子の長さ (m) 縦軸 振り子の周期 (秒)

例 20 半導体ダイオードの端子間電圧と電流

半導体ダイオードに電流を流すと，端子間に電圧が発生する。抵抗器では端子間電圧は電流に比例するけれども，半導体ダイオードではそうではない。下表は，電源整流用ダイオードの端子間電圧と電流を測定した結果である。端子間電圧を横軸，電流を縦軸にとってグラフを描くと，およそ，左図のようなグラフになる。電流値を対数にして描いたものが右図。

電圧 (V)	電流 (mA)
0.5	1.6
0.55	4
0.6	12
0.65	31
0.7	100
0.75	180



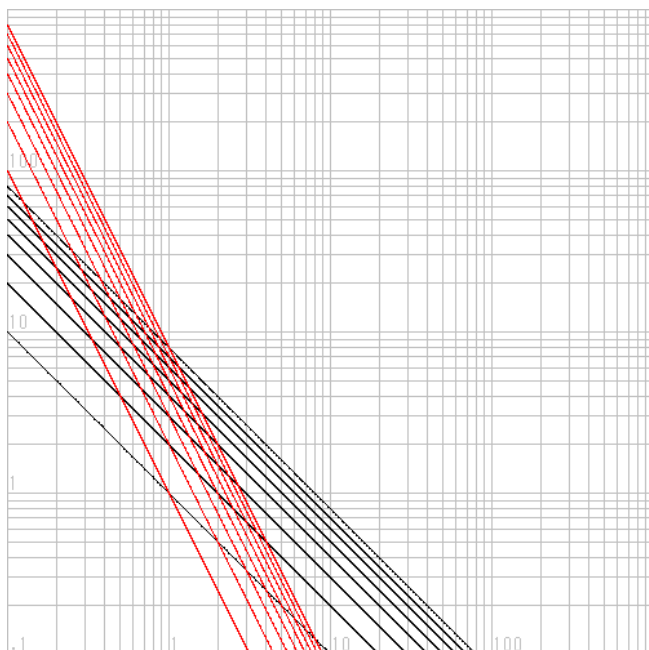
Note. 実際に測定してみたい方へ。

- 1) 電源整流用ダイオードは単価 10 円程度なので気軽に実験できる。
- 2) ダイオードの定格電流（許容する最大の電流）を調べておき，定格を越えないように注意する。1Ω 程度の抵抗を直列に追加しておくとう安心できる。
- 3) 上の回路図のように電圧計を配置すると，電流計には電圧計に流れる電流も流れる。電流値が小さい領域まで精密に測定するためには，電圧計に流れる電流を考慮する必要がある。電圧計の内部抵抗が分かっているならば，それをもとに計算できる。電流値が小さい領域まで測定するためには，可変抵抗器の抵抗値を大きくする必要があることにも注意。
- 4) 可変抵抗器に替え，複数種類の固定抵抗器を付け替えて測定することも考えられる。

例 21 反比例と 2 乗に反比例

$$\text{黒 } y = \frac{a}{x} (a = 1, 2, 3, \dots, 8)$$

$$\text{赤 } y = \frac{a}{x^2} (a = 1, 2, 3, \dots, 8)$$



問 22 (基礎固めのための探究) 次を示す関数を両対数グラフに描いて特徴を調べる。ただし、いずれも定義域は正の数であるものとする。

(1) $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$

(2) $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = 4x^2$

(3) $y = x^2 + x + 1$, $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 + 3x + 1$, $y = x^2 + 4x + 1$

(4) $y = (x + 1)^2$, $y = (x + 2)^2$, $y = (x + 3)^2$, $y = (x + 4)^2$

(5) $y = x + x^2$, $y = x + 2x^2$, $y = x + 3x^2$, $y = x + 4x^2$

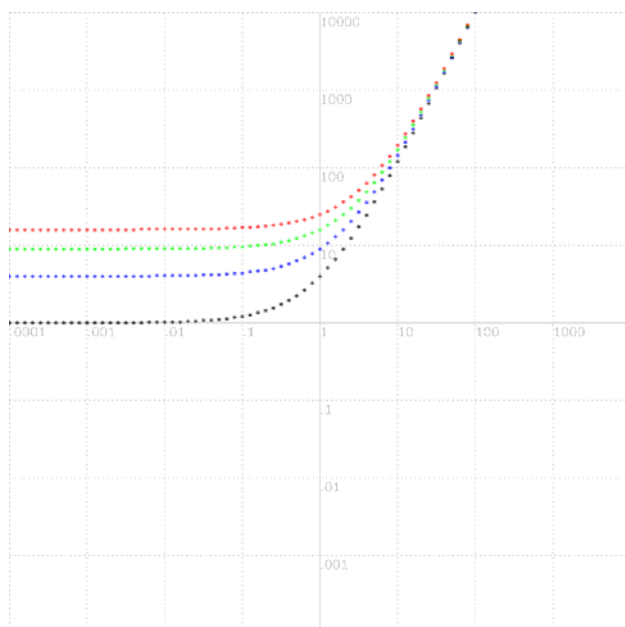
参考 プログラム例 (4)

```
DEF f(x)=(x+n)^2
SET WINDOW -4,4,-4,4
DRAW grid0
SET TEXT HEIGHT 0.2
SET TEXT COLOR 15
SET TEXT JUSTIFY "LEFT","TOP"
FOR k=-4 TO 4
  PLOT TEXT ,AT k,0: STR$(10^k)
NEXT k
FOR k=-4 TO 4
  PLOT TEXT ,AT 0,k: STR$(10^k)
NEXT k
FOR n=1 TO 4
  SET POINT COLOR n
  FOR k=-4 TO 4 STEP 0.1
    LET x=10^k
```

```

      PLOT POINTS:LOG10(x),LOG10(f(x))
    NEXT k
  NEXT n
END

```



☆ 対数グラフの原点はどこにあるのか？ 対数グラフで0は表せない。0は無限遠方のかたにある。グラフは0から始めなければならないと考える人には対数グラフは使えない。グラフ指導でおかしな固定観念を植え付けないように注意しよう。

指数関数

片対数グラフを描いたら直線になるとき、両者にどういう関係があるのだろうか。片対数グラフが直線になるというのは、 $\log_{10} y = ax + b$ となる定数 a, b があるときである。このとき、 $y = 10^{ax+b} = 10^b \cdot (10^a)^x$ 。この関数は指数関数と呼ばれる。

定義 23 $a > 0, a \neq 1$ のとき、関数 $y = a^x$ を**指数関数**といい、 a を**底**という。

☆ 半導体ダイオードの端子間電圧-電流特性のほか、トランジスタの電圧増幅特性にも指数関数が現れる。これは、トランジスタを使って増幅回路を作るのに支障となる厄介な特性である。その特性から逃れるために負帰還と呼ばれる手法が用いられる。負帰還を安定に動作させるために用いられる制御理論は、幅広い応用範囲を持つ、学ぶ価値のある数学的理論である。

1.5.4 科学・技術・文化と対数

デシベル (dB)

物理量の基準値に対する比の常用対数を10倍したものをデシベル (dB) という。物理量は、電力などのエネルギーがおもな対象である。電圧や電流は電力に換算して扱う。電子工学や音響工学の分野で、増幅器や減衰器の性能を表すのに用いられる。

デシベルを用いると、10 倍は 10dB、100 倍は 20dB、1000 倍は 30dB、 $\frac{1}{10}$ 倍は -10dB、 $\frac{1}{100}$ 倍は -20dB と言い換えられる。 $\log_{10} 2 \div 0.30$ なので、3dB は約 2 倍を意味する。増幅器などを続けて適用すると、増幅率は積となるので、デシベルで表せば、それは加算になる。

音響機器の音量調節は、dB で表したとき 1 次関数となるように調整されている。すなわち、音量目盛りを 1 変えたときの音量の倍率が等しくなるように作られている（後述のフェヒナーの法則を反映している）。dB は、本来、相対的な値に対し用いるものであるが、音響工学では、可聴限度の最小の音量を 0dB と定めて、音量を dB 単位で表すこともある。

なお、デン (d) は 10^{-1} を表す接頭語で、ベル (B) は基準値に対する比の常用対数である。この分野で常用される数値が dB で表すのにちょうどよいので、本来のベル (B) が用いられることがなくなってしまった。

問 24 5dB は何倍を意味するか。

水素イオン指数 pH

水溶液 1L 中の水素イオンの個数を水素イオン濃度といい、 $[H^+]$ で表す。同様に、水溶液 1L 中の水酸化物イオンの個数を水酸化物イオン濃度といい、 $[OH^-]$ で表す。通常、個数は mol を単位として測り、 $[H^+]$ 、 $[OH^-]$ の単位は mol/L である。ただし、1mol とは、 $6.02214076 \times 10^{23}$ 個のことである。

水温が 25°C のとき、 $[H^+] \times [OH^-] = 1.0 \times 10^{-14} \text{ (mol/L)}^2$ であることが知られている。

$-\log_{10}[H^+]$ を水素イオン指数といい、pH で表す。すなわち、 $\text{pH} = -\log_{10}[H^+]$ 。

また、 $-\log_{10}[OH^-]$ を pOH で表す。

練習 25 水温が 25°C のとき、 $\text{pH} = \text{pOH}$ であれば $\text{pH} = 7$ であることを示せ。

練習 26 $\text{pH} = 6$ である溶液の水素イオン濃度を求めよ。

練習 27 水素イオン濃度が 0.001 mol/L の塩酸水溶液の pH を求めよ。

☆参考 以下の話題は常用対数から外れるが、対数が用いられる例である。

地震のマグニチュード

地震のマグニチュードは、地震のエネルギーの $10^{1.5}$ を底とする対数である。マグニチュードが 1 増えると、地震のエネルギーは $10^{1.5}$ 倍、およそ 32 倍になる。底が半端な数に選ばれているのは、震度との調和を図るためである。

星の明るさ（等級）

1 等星は 6 等星の 100 倍明るい。6 等星から 1 等星まで、等級が一つ上がるごとに明るさが同じ倍率で変化するように定められている。明るさの等級が 1 つ違うとき、明るさは $100^{\frac{1}{5}} (\div 2.51)$ 倍になる。

天文学におけるヘルツシュプルング＝ラッセル図

横軸は星の表面温度 T の対数，縦軸は絶対光度（太陽系からの距離の違いを補正した光度）の対数。

平均律音階

平均律音階は，ド，ド $\sharp$ ，レ，レ $\sharp$ ，ミ，ファ，ファ $\sharp$ ，ソ，ソ $\sharp$ ，ラ，ラ $\sharp$ ，シ，ドの周波数が等比数列となるように定めたものである。上のドは，下のドの2倍の周波数を持つ。

練習 28 (1) ソは，ドの何倍の周波数を持つか。(答) $2^{\frac{7}{12}} (\doteq 1.4983)$ 倍

(2) ラの周波数を 440Hz とするとき，下のドは何 Hz か。(答) $440 \times 2^{-\frac{9}{12}} \doteq 261.6(\text{Hz})$

2 数列

2.1 数列と項

数を一列に並べたものを**数列**といい，数列のそれぞれの数を**項**という。

数列の第 n 番目の数を 第 n 項という。第 1 項は初項ともいう。

数列を一般的に表すとき，項の番号を右下に小さく書いて

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

のように書く。この数列をまとめて， $\{a_n\}$ とも書く。

注意 数列を $\{a_n\}$ で表すのが慣習であるが，数列 $\{a_n\}$ と集合 $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ は異なる。

$a_n = (-1)^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき

数列 $\{a_n\}$ は $1, -1, 1, -1, 1, \dots$ であり，

集合 $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{1, -1\}$ である。

2.2 数列の和

数列 $\{a_n\}$ に対し， $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ を $\sum_{k=1}^n a_k$ で表す。

2.2.1 Σ の性質

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k, \quad \sum_{k=1}^n c = cn$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}$$

Note. Σ 計算の対象となるのは， Σ に続けて書かれた項。

例

$$\sum_{k=1}^3 ab = ab + ab + ab$$

$$\sum_{k=1}^3 a + b = (a + a + a) + b$$

$$\sum_{k=1}^3 (a + b) = (a + b) + (a + b) + (a + b)$$

Σ による和は、括弧で括られた数式と同格。

例

$$c \sum_{k=1}^3 a_k \text{ は } c(a_1 + a_2 + a_3) \text{ を意味し, } ca_1 + a_2 + a_3 \text{ ではない。}$$

2.2.2 数列の和

数列の和 Σk

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

数列の和 Σk^2

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n(n + \frac{1}{2})(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

証明

$\sum_{k=1}^n k^2$ は n の 3 次式になると予想を立て、 $\sum_{k=1}^n a_k = n^3$ となるときの a_n を求めてみる。

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

$$n = 1 \text{ のときも含め } a_n = 3n^2 - 3n + 1 \text{ とおくと, } \sum_{k=1}^n a_k = n^3$$

$$\text{すなわち, } \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3$$

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = n^3$$

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = n^3 + 3 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = n^3 + \frac{3}{2}n(n+1) - n = n \left(n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n(n + \frac{1}{2})(n+1)$$

この手法を順次適用して $\sum_{k=1}^n k^m$ ($m = 2, 3, 4, \dots$) の和を求めることができる。

☆ 我々が住む空間が3次元であることから、 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ の公式だけでも意義があり、この公式を導く手法はいろいろ考案されている。

2.3 階差数列

階差数列

数列 $\{a_n\}$ に対し、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

が成立する。

数列 $\{a_n\}$ に対し、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の階差数列という。

数列の和の階差

数列 $\{a_n\}$ に対し、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおくとき、 $a_1 = S_1$, $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 。

例題 29 $\sum_{k=1}^n a_k = n^4$ となるような数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

解. $a_1 = 1^4 = 1$

$$a_{n+1} = (n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

$$\therefore n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$$

$n = 1$ のときの結果と、 $n \geq 2$ のときの結果をまとめて

答 $a_n = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) □

練習 30 $\sum_{k=1}^n k^3$ を n の式で表せ。

2.4 漸化式

漸化式で表すと計算可能になることを学ばせる。

一般項を求めることを目的としない。

再帰的な問題解決手法の有用性を知ることが目的。

例題 31 平面上に、どの2本も平行でなく、どの3本も一点で交わることのない n 本の直線によって平面はいくつの部分に分けられるか。

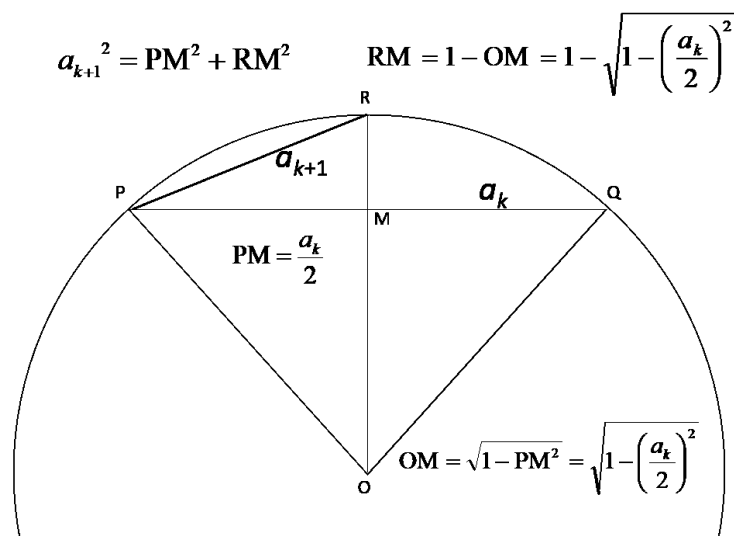
解. n 本の直線によって分けられる部分の数を a_n とすると、 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ 。
 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、 $b_n = n+1$ 。

$n \geq 2$ のとき, $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ 。

$a_1 = 2$ だから, $a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ は $n = 1$ のときも成り立つ。□

例 32 円周率 π の近似

半径 1 の円に内接する正 2^k 角形の 1 辺の長さを a_k として, a_{k+1} を a_k で表す。



$$a_2 = \sqrt{2}, \quad a_{k+1}^2 = \left(\frac{a_k}{2}\right)^2 + \left\{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_k}{2}\right)^2}\right\}^2$$

半径 1 の円に内接する正 2^k 角形の辺の長さの和の半分を l_k とすると $l_k = 2^{k-1}a_k$ 。

$s_k = a_k^2$ とおくと,

$$s_2 = 2, \quad s_{k+1} = \frac{s_k}{4} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{s_k}{4}}\right)^2$$

$$l_k = 2^{k-1}\sqrt{s_k}$$

次のプログラムは $l_3 \sim l_{30}$ を計算する。

```

10 LET s=2
20 FOR k=3 TO 30
30   LET s=s/4+(1-SQR(1-s/4))^2
40   let l=2^(k-1)*SQR(s)
50   PRINT k,l
60 NEXT k
70 END

```

l_{25} の計算結果は 3.14159265358979

問 33 上の例において, $s_{k+1} = 2 - \sqrt{4 - s_k}$ なので, 次のプログラムでも $l_3 \sim l_{30}$ を計算することができる。こちらのほうが簡潔でよさそうだけれど, 実行結果は芳しくない。なぜか?

```

10 LET s=2
20 FOR k=3 TO 30
30 LET s=2-SQR(4-s)
40 let l=2^(k-1)*SQR(s)
50 PRINT k,l
60 NEXT k
70 END

```

ヒント 50 行を
50 PRINT k,s,l
に替えて、s の値を表示する。

2.5 区分求積

区分求積の考え方とその有用性を学ぼう。区分求積の考え方を発展させて積分の考えが導かれる。

例題 34 曲線 $y = x^2$, x 軸, 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれる部分の面積

例題 35 曲線 $y = \frac{1}{x}$ と x 軸, 直線 $x = 1, x = 2$ で囲まれる領域の面積

```

100 DEF f(x)=1/x
110 LET a=1
120 LET b=2
130 LET n=100000
140 LET S=0
150 LET x=a
160 LET dx=(b-a)/n
170 FOR k=0 TO n-1
180 LET S=S+f(x)*dx
190 LET x=x+dx
200 NEXT k
210 PRINT S
220 END

```

2.5.1 錐体の体積, 球の体積

例題 36 単位球の体積

単位球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を x 軸に垂直な平面で分割し, 円柱で近似する。

半球 ($x \geq 0$) の体積を計算し, 最後に 2 倍する。

$x_k = \frac{k}{n}$ とする。 $x = x_k$ における球の切り口は半径 $\sqrt{1 - x^2}$ の円。

内側の円柱の体積の和は

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi(1-x_k^2)}{n} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right\} = \pi \left(1 - \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \right) = \pi \left\{ 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{3} n(n-1)(n-1) \right\}$$

外側の円柱の体積の和は

$$\sum_{k=1}^n \frac{\pi(1-x_k^2)}{n} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 1 - \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right\} = \pi \left(1 - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \right) = \pi \left\{ 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{3} n(n+1)(n+1) \right\}$$

$n \rightarrow \infty$ の極限を考えて半球の体積は $\frac{2}{3}\pi$

定理 37 半径 r の球の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$

2.5.2 曲線の長さ

曲線 $x = f(t), y = g(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ の長さ

曲線を折れ線で近似する。

曲線上に点 $P(f(t_k), g(t_k))$, (ただし, $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$) をとって

$$L = \sum_{k=1}^n P_{k-1}P_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{\{f(t_k) - f(t_{k-1})\}^2 + \{g(t_k) - g(t_{k-1})\}^2} \text{ とする。}$$

このようにして作られた折れ線の長さの和は分点を細かくとっていけば曲線の長さに近づくと考えられる。

☆ 精密に述べると, この数値 L 全体の集合の最小上界を曲線の長さとして定義する。実数の集合 S の上界とは, S のどの要素よりも大きい数。最小上界は上界の最小値。実数には, 上界を持つ集合は最小上界を持つ性質がある。

例 38 放物線の弧 $y = x^2 (0 \leq x \leq 1)$ の長さ

分点を $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ と取って

$$L = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (x_k^2 - x_{k-1}^2)^2} = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + (x_k + x_{k-1})^2}$$

とする。

$$\text{さらに } x_k = \frac{k}{n} \text{ とすると, } L = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{2k-1}{n} \right)^2}$$

$n = 10, 100, 1000, \dots, 10^7$ に対し, 和 L を計算。

```

100 FOR p=1 TO 7
110   LET n=10^p
120   LET L=0
130   FOR k=1 TO n
140     LET L=L+SQR(1+((2*k-1)/n)^2)
150   NEXT k
160   LET L=L/n

```

170 PRINT L

180 NEXT p

190 END

実行結果

1.47819739748733

1.47893540397425

1.47894278300911

1.47894285679928

1.4789428575379

1.47894285754278

1.4789428575441

☆ 曲線 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) の長さの公式 $L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ を用いると,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} \log(2 + \sqrt{5}) \doteq 1.4789428575446$$

練習 39 曲線 $y = x^3$ ($0 \leq x \leq 1$) の長さを求めよ。

練習 40 楕円の弧 $x = 3 \cos \theta, y = 2 \sin \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) の長さを求めよ。

3 関数

3.1 微分

3.1.1 3 次関数

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を $f(x) = a(x - x_0)^3 + q(x - x_0)^2 + r(x - x_0) + s$ の形に書くと $s = f(x_0)$ であって, $x \doteq x_0$ のとき $f(x) \doteq r(x - x_0) + f(x_0)$ 。

3.1.2 極限

多項式で表される関数であれば, 極限によらないで微分係数が定義できる。正弦, 余弦や指数関数のように多項式で表せない関数に対して微分係数を定義するために極限を定義する。

x を x_0 に限りなく近づけたとき $f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくとき, α を x が x_0 に近づくときの $f(x)$ の極限といい,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

で表す。

3.1.3 微分係数

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

が存在するとき、 $f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能であるという。そして、その値を $f(x)$ の $x = x_0$ における微分係数といい、 $f'(x_0)$ で表す。

3 次関数 $f(x) = a(x - x_0)^3 + q(x - x_0)^2 + r(x - x_0) + s$ の $x = x_0$ における微分係数は $f'(x_0) = r$ である。

$f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能であれば、 $x \rightarrow x_0$ のとき $f(x) \rightarrow f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ 。

例題 41 $f(x) = x^3$ において、 $f'(x_0)$ を求めよ。

解. $X = x - x_0$ とおく。

$$\begin{aligned} f(x) &= f(X + x_0) = (X + x_0)^3 = X^3 + 3X^2x_0 + 3Xx_0^2 + x_0^3 \\ &= (x - x_0)^3 + 3x_0(x - x_0)^2 + 3x_0^2(x - x_0) + x_0^3 \\ \therefore f'(x_0) &= 3x_0^2 \quad \square \end{aligned}$$

3.1.4 導関数

x に $f'(x)$ を対応させる関数を $f(x)$ の導関数という。

$x - x_0$ を Δx で、 $f(x) - f(x_0)$ を Δy で表すと、

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$y = f(x)$ のとき、導関数を y' 、 $f'(x)$ 、 $\frac{dy}{dx}$ 、 $\frac{d}{dx}f(x)$ などの記号で表す。

導関数の公式

(1) $f(x) = c$ (c は定数) のとき、 $f'(x) = 0$

(2) $f(x) = x^n$ (n は自然数) のとき、 $f'(x) = nx^{n-1}$

(3) $y = f(x) + g(x)$ のとき、 $y' = f'(x) + g'(x)$

(4) $y = kf(x)$ (k は定数) のとき、 $y' = kf'(x)$

(5) $y = f(ax + b)$ のとき、 $y' = af'(ax + b)$

(2) を示すのに二項定理 (後述) を利用することもできるが、因数分解 $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ を用いて示すこともできる。

例 $f(x) = x^4$ のとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^4 - x_0^4}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^4 - x_0^4}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^3 + x^2x_0 + xx_0^2 + x_0^3)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^3 + x^2x_0 + xx_0^2 + x_0^3) = 4x_0^3 \end{aligned}$$

3.1.5 関数値の増加・減少

増加, 減少

関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で増加の状態にあるとは, $x = x_0$ の近くで,
 $x < x_0$ ならば $f(x) < f(x_0)$
 $x > x_0$ ならば $f(x) > f(x_0)$
 となることをいう。「減少の状態」も同様に定義する。

定理 42 $f'(x_0) > 0$ ならば, $f(x)$ は $x = x_0$ で増加の状態にある。
 $f'(x_0) < 0$ ならば, $f(x)$ は $x = x_0$ で減少の状態にある。

注意 逆は成立しない。たとえば, $f(x) = x^3$ は $x = 0$ で増加の状態にあるが, $f'(0) = 0$ である。

極大, 極小

$f(x_0)$ が $x = x_0$ の近くで唯一の最大値であるとき, すなわち, $x = x_0$ の近くで $x \neq x_0$ ならば $f(x) < f(x_0)$ となるとき, $f(x)$ は $x = x_0$ で極大となるという。
 「極小」の定義も同様。

定理 43 $f'(x_0)$ が存在するとき, 関数 $f(x)$ が $x \neq x_0$ で極大または極小であれば $f'(x) = 0$ である。

3.1.6 原始関数

次の定理を（証明抜きで）仮定する。

定理 （実数の）ある区間で $f'(x) = 0$ であれば, その区間で $f(x)$ は定数である。

☆ 平均値の定理から導けるが, 証明は後述。

この定理から次のことが分かる。

$F'(x) = f(x)$ となる $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。

$F(x)$ と $G(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき, ある定数 C が存在して $F(x) = G(x) + C$ 。

また, 次のことも成り立つ。

$F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$ であれば, $F(x) + G(x)$ は $f(x) + g(x)$ の原始関数。

k を定数とすると, $F'(x) = f(x)$ であれば, $kF(x)$ は $kf(x)$ の原始関数。

例 44 $F(x) = x^2$ のとき $F'(x) = 2x$ なので関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ は関数 $y = x$ の原始関数。

例 45 $f'(x) = ax + b$ のとき, ある定数 C が存在して $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + C$

3.1.7 速度, 加速度

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標を x とするとき, $\frac{dx}{dt}$ を動点 P の速度という。

$v = \frac{dx}{dt}$ とおくと, $\frac{dv}{dt}$ を $\frac{d^2x}{dt^2}$ で表し, 動点 P の加速度という。

例 46 (等加速度運動)

数直線上を定加速度 a で移動する物体の時刻 $t = 0$ における速さを $v = 0$, 位置を $x = 0$ とする。

$$\frac{dx}{dt} = v = at \text{ より } x = \frac{1}{2}at^2。$$

$$2ax = a^2t^2 = (at)^2 = v^2$$

初速 0 で定速度 a で移動する物体の t 秒間の移動距離を s , t 秒後の速度を v とすると, $2as = v^2$ 。

3.1.8 球の表面積

半径 r の球の表面積を $S(r)$, 体積を $V(r)$ とすると,

$$\Delta r > 0 \text{ のとき, } S(r) \leq \frac{V(r + \Delta r) - V(r)}{\Delta r} \leq S(r + \Delta r)$$

$$\therefore V'(r) = S(r)$$

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ より } S(r) = 4\pi r^2$$

3.2 指数・対数

☆底が 10 の場合の指数の拡張, 常用対数, 対数グラフは中学校で学ぶことにできないだろうか。

3.2.1 累乗根

$a \geq 0$ とする。自然数 n に対し, $x^n = a$ となる x がただ一つ定まる。その x を $\sqrt[n]{a}$ で表す。

累乗根の性質 $a > 0$ とする。 m, n, k は自然数。

$$(1) \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$(2) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(3) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$(4) \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(4) \text{ の証明 } \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{(\sqrt[k]{a^m})^k} = \sqrt[n]{a^m}$$

3.2.2 指数の拡張

$a > 0$ とする。自然数 n に対し,

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

と定め, m, n が互いに素 ($\frac{m}{n}$ が既約分数) であるとき,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

と定める。上の (4) より, $\frac{m}{n}$ が既約分数でないときにもこの等式が成立する。

さらに、正の有理数 q に対し、

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q}$$

と定める。

指数法則

a, b を正の数, p, q を有理数とする。

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

指数関数 a^x

☆ 証明は難しい。伝統的に直観的に正しいと認めて議論を進めている。

$a > 0$ とする。実数 x に対し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ となる有理数列 $\{x_n\}$ をとり、 $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$ とする。

$\{x_n\}$ として x を表す無限小数を選んで定義とする。

指数法則

a, b を正の数とする。

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

大小関係

$$a > 1 \text{ のとき } x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$$

(大小関係は $(a^x)' = a^x \log_e a$ から導ける。)

3.2.3 対数

$a > 0, a \neq 1$ とする。

正の数 M に対し、 $a^x = M$ となる x を $\log_a M$ で表す。

対数法則

a, b, M, N を正の数とする。ただし、 $a \neq 1, b \neq 1$ とする。

$$(1) \log_a 1 = 0$$

$$(2) \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$(3) \log_a M^x = x \log_a M$$

$$(4) a^{\log_a M} = M$$

$$(5) \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}, \text{ 特に, } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

(5) は、常用対数、あるいは、自然対数を用いて他の数を底とする対数を扱うのに用いる。たとえば、 $x = \log_2 M$ であるとき、 $M = 2^x$ なので、 $\log_{10} M = \log_{10} 2^x$ より $x \log_{10} 2 = \log_{10} M \quad \therefore x = \frac{\log_{10} M}{\log_{10} 2}$ 。この公式は底の変換公式と呼ばれる。

3.2.4 対数グラフ

片対数グラフ 縦軸のみ対数

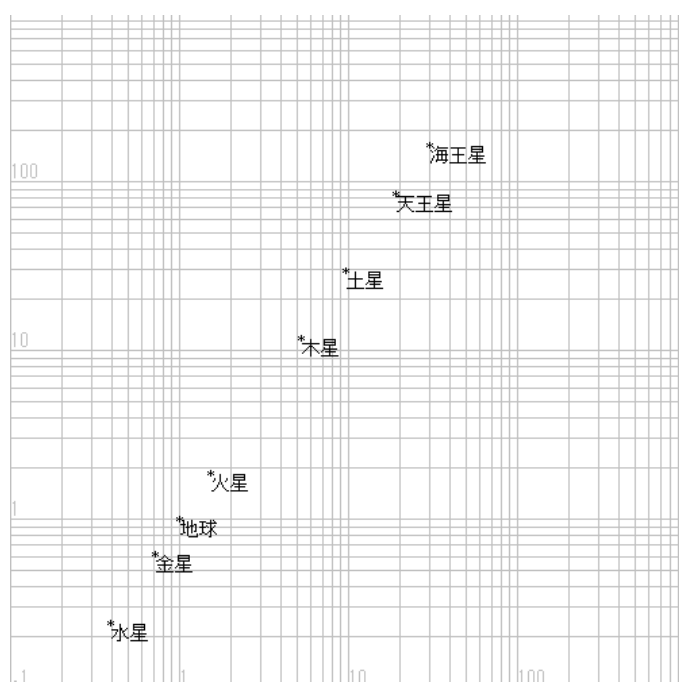
指数関数 $y = a^x$ のグラフは原点を通る直線

例 47 新型コロナ感染者数を横軸に週、縦軸に週間の感染者数。

両対数グラフ 縦軸、横軸ともに対数。

$y = x^a$ のグラフは原点を通る傾き a の直線。

例 48 惑星の軌道半径（横軸）と公転周期（縦軸）（地球を 1 とする）



公転周期 $\propto$ 軌道半径 ^{$\frac{3}{2}$} が読み取れる。

3.3 方程式の近似解

二分法

$f(\alpha) = 0$ で、 $a \leq x < \alpha$ ならば $f(x) < 0$, $\alpha < x \leq b$ ならば $f(x) > 0$ とする。

$(a_0, b_0) = (a, b)$

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right) & f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \text{ のとき} \\ \left(\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right) & f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めると、 $a_n < \alpha \leq b_n, b_n - a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

例 二分法で $x^2 - 2 = 0$ の解 $\sqrt{2}$ の近似値を求める。

```
100 DEF f(x)=x^2-2
```

```
110 LET a=1
```

```

120 LET b=2
130 FOR n=1 TO 48
140   LET c=(a+b)/2
150   IF f(c)>=0 THEN
160     LET b=c
170   ELSE
180     LET a=c
190   END IF
200   PRINT a,b
210 NEXT n
220 END

```

ニュートン法

関数のグラフを接線で近似する方法。

$x = x_0$ における $y = f(x)$ の接線 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ と x 軸との交点を $x = x_1$ とすると, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 。

x_0 が $f(x) = 0$ の解 α の近似値であるとき, 多くの場合, x_1 はよりよい近似値になっている。

この計算を反復し, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ を計算し, 近似値とする。

例 ニュートン法で $x^2 - 2 = 0$ の解 $\sqrt{2}$ の近似値を求める。

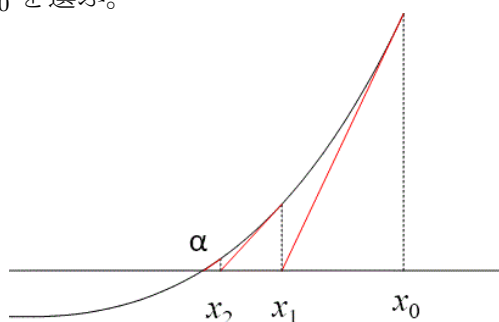
```

10 DEF f(x)=x^2-2
20 DEF g(x)=2*x
30 LET x=2
40 FOR k=1 TO 8
50   LET x=x-f(x)/g(x)
60   PRINT x
70 NEXT k
80 END

```

Note. 最初の近似値 x_0 の選び方

曲線の凹凸に注意して, x_0 と α を含む区間で $f''(x)$ が $f(x_0)$ と同符号となるように x_0 を選ぶ。



3.4 等比数列

$r \neq 1, a \neq 0$ のとき, $a_n = ar^{n-1}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ を初項 a , 公比 r の等比数列という。

複利

a 円を年利率 r の複利で預けたとき, n 年後の元利合計は $a(1+r)^n$ 。

等比数列の極限

$-1 < r < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

等比数列の和

$$\begin{aligned} r \neq 1 \text{ のとき, } 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} &= \frac{1 - r^n}{1 - r} \\ \text{なぜなら, } S = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} \text{ とおくと,} \\ rS &= r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n \\ \therefore (1 - r)S &= 1 - r^n \\ S &= \frac{1 - r^n}{1 - r} \end{aligned}$$

積み立て預金

毎年初めに a 円を年利率 r の複利で n 年間積み立てたときの元利合計

$$\begin{aligned} &a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + \cdots + a(1+r) \\ &= a(1+r) \times \frac{1 - (1+r)^n}{1 - (1+r)} = a \times \frac{(1+r) \{(1+r)^n - 1\}}{r} \end{aligned}$$

例題 49 毎年はじめに一定額を年利 0.2 % の複利で積み立てて, 10 年後の元利合計が 100,000 円となるようにするには毎年の積立額をいくらにすればよいか。

$$\text{解. 毎年の積立額を } a \text{ 円とすると, } a \times \frac{1.002 \times (1.002^{10} - 1)}{0.002} = 1000000$$

$$a = \frac{0.002}{1.002 \times (1.002^{10} - 1)} \times 1000000 = 98905.4 \cdots$$

毎年 98,906 円積み立てれば, 10 年後の元利合計は 100,000 円以上になる。□

年賦

年初めに A 円を借り, n 年間, 年利 r の複利で年末に定額を返済するとき, 返済額はいくらか。

毎年の返済額が a 円するとき, いくら借りられるかを計算してみよう。

$$\begin{aligned} 1 \text{ 年間のとき } &\frac{a}{1+r} \text{ 円} \\ 2 \text{ 年間のとき } &\frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} \\ 3 \text{ 年間のとき } &\frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \frac{a}{(1+r)^3} \\ \cdots \cdots \cdots &\cdots \cdots \cdots \\ n \text{ 年間のとき } &\frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \frac{a}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{a}{(1+r)^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore A &= \frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \frac{a}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{a}{(1+r)^n} \\
&= \frac{a}{1+r} \left\{ 1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^{n-1}} \right\} \\
&= \frac{a}{1+r} \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{a}{1+r} \frac{(1+r)^n - 1}{\frac{r}{1+r}} = a \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \\
\therefore a &= A \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}
\end{aligned}$$

例 年利 4%，10 年間毎年返済で 100 万円を借りると、毎年末の返済額は

$$1000000 \times \frac{0.04 \times 1.04^{10}}{1.04^{10} - 1} = 123290.9 \dots$$

等比級数の和

$$-1 < r < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$$

4 微分積分

微積分は、技能としてよりも、現象を表現するための言葉として学ぶべき内容。微積分の計算は数式処理（コンピュータ代数）に委ねる時代になった。微積分の学習は、数式処理で得られた結果の意味が理解できて、それを確かめることができるようにすればよい時代になった。現実事象への応用（STEM or STEEM）が目標。

定積分は、多重積分や線積分、面積分に発展していく考え方である。積分が言葉として用いられる場面を考えて指導しなければならない。重要なことは、積分は逆微分ではないこと。積分を計算するのになぜ原始関数が利用できるかの理解が必要。

4.1 順列・組合せ，場合の数

$$n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$${}_nP_r = n(n-1) \cdots \{n - (r-1)\} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

組合せの数の漸化式 組合せの意味を考えて、

$${}_nC_0 = 1, {}_nC_n = 1, {}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r \quad (0 < r < n)$$

4.1.1 二項定理

2 項式の展開

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-k}b^k$ の係数を $\binom{n}{k}$ で表し, 2 項係数という。

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$0 < k < n \text{ のとき } \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (\text{パスカルの三角形})$$

これは, 組合せの数 ${}_nC_r$ と同一の漸化式。だから, $\binom{n}{r} = {}_nC_r$ 。

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots + {}_nC_ka^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_ka^{n-k}b^k$$

例題 50 $f(x) = x^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき, $f'(x) = nx^{n-1}$

4.2 関数値の極限

4.2.1 極限の基本性質

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta$ のとき,

(1) 実数 k に対し, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k\alpha$

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \alpha\beta$

(4) $\beta \neq 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$

(5) x_0 の近くで $f(x) \leq g(x)$ ならば $\alpha \leq \beta$

4.3 関数の連続性

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となるとき, 関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。

区間の定義 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

中間値の定理 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で $f(a) \neq f(b)$ であるとき, k が $f(a)$ と $f(b)$ の間の数であれば $f(c) = k$ となる $c \in [a, b]$ がある。(証明には, 実数論に関する命題が必須で, 難易度が高い (詳細を省く))

中間値の定理からの帰結 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で, $f(a)f(b) < 0$ であれば, 方程式 $f(x) = 0$ は区間 $[a, b]$ に少なくとも一つの解を持つ。

4.4 微分可能

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在するとき, 関数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという。

定理 51 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき, 関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続である。

4.4.1 関数値の増加・減少

平均値の定理

定理 52 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能であるとき、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), a < c < b$$
 となる c が少なくとも一つ存在する。

証明の概略

ロルの定理 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能で $f(a) = f(b)$ であれば $f'(c) = 0, a < c < b$ となる c がある。

ロルの定理を証明するのに、次の定理を利用する。

最大値・最小値の定理 区間 $[a, b]$ で連続な関数は、(区間内で) 最大値、最小値を持つ。

最大値・最小値の定理の証明には、実数論に関する命題が必須で、難易度が高い(詳細を省く)。

ロルの定理から平均値の定理を導くのは容易。 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ とおけば $F(x)$ はロルの定理の仮定を満たす。

ロルの定理の証明.

1) $f(x)$ が定数関数のとき、 $f'(x) = 0$ だから明らか。

2) $f(x) > f(a) = f(b)$ となる x があるとき。

$f(x)$ の最大値を $f(c)$ とすると、 $c \neq a, c \neq b$ が導かれるから、 $a < c < b$ 。

$x < c$ のとき $f(x) \leq f(c)$ だから $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$

$f(x)$ は微分可能なので、 $f'(c) \geq 0$

$x > c$ のとき $f(x) \leq f(c)$ だから $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$

$f(x)$ は微分可能なので、 $f'(c) \leq 0$

$\therefore f'(c) = 0$

3) $f(x) < f(a) = f(b)$ となる x があるとき。2) と同様。□

区間における増加と減少

区間内の任意の x_1, x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ となるとき、関数 $f(x)$ はこの区間において単調増加するという。

区間内の任意の x_1, x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ となるとき、関数 $f(x)$ はこの区間において単調減少するという。

定理 53 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ と区間 $[b, c]$ で単調増加するとき、 $f(x)$ は区間 $[a, c]$ で単調増加する。

平均値の定理から次の定理が導かれる。

定理 54 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続であるとき、
 开区間 (a, b) で $f'(x) > 0$ であれば、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ において単調増加し、
 开区間 (a, b) で $f'(x) < 0$ であれば、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ において単調減少する。

例 55 $f(x) = \sqrt{x}$ のとき, $f(x)$ は区間 $[0, \infty)$ で連続で开区間 $(0, \infty)$ で $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ なので, $f(x)$ は区間 $[0, \infty)$ において単調増加する。 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないけれども, 区間 $[0, \infty)$ で増加という結論が得られる。

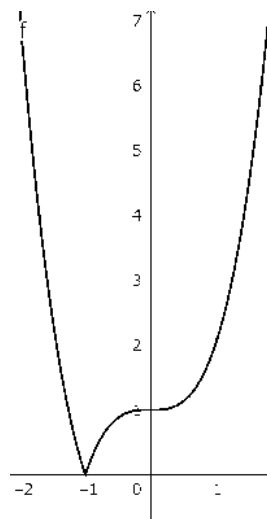
極大・極小

$x = x_0$ の近くで連続な関数 $f(x)$ において,
 $x < x_0$ のとき $f'(x) > 0$, $x > x_0$ のとき $f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は $x = x_0$ で極大,
 $x < x_0$ のとき $f'(x) < 0$, $x > x_0$ のとき $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は $x = x_0$ で極小となる。

増減表

例 56 $f(x) = |x^3 + 1|$ とする。

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x$
$f'(x)$	—		+	0	+
$f(x)$	↘		↗		↗



$x = -1$ で連続, $x < -1$ で $f'(x) < 0$, $-1 < x < 0$ で $f'(x) > 0$ なので, $x = -1$ で極小。区間 $[-1, 0]$ と区間 $[0, \infty)$ で単調増加なので, 区間 $[-1, \infty)$ で単調増加。

4.5 微分法

4.5.1 微分法の公式

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \text{ すなわち, } (x^{-1})' = -x^{-2}$$

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x) \text{ すなわち, } \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

4.5.2 指数関数の微分

$$f(x) = a^x \text{ とすると,}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \text{ となる } e \text{ を選ぶと } f(x) = e^x \text{ のとき } f'(x) = e^x$$

$$(a^x)' = (e^{x \log_e a})' = (\log_e a) e^{x \log_e a} = (\log_e a) a^x$$

$(e^x)' = e^x$ となる定数 e を自然対数の底, あるいは, ネイピア数という。

☆ 近年の高校数学は, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ となる e が存在することを直観的に認めて展開している。本当にそんな数があるかと問う立場では, 実数論の定理「上に有界な単調増大数列は収束する (極限値を持つ)」を出発点として, $(1 + \frac{1}{n})^n$ が有界で単調増大であることを示し, その極限を e と置いて, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ を示す教程を採用する。ただし, それは, 大学数学向けの内容であろう。

4.5.3 対数関数

$$f(x) = \log_e x \text{ とするとき, } e^{f(x)} = x$$

$$\{e^{f(x)}\}' = e^{f(x)} f'(x) = x f'(x), (x)' = 1 \text{ より } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

$$\{\log_e f(x)\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$f(x) = \log_e x$ を自然対数 (natural logarithm) という。通常, 底の e を省いて $\log x$ と書く。また, 近年は, $\ln x$ と書かれることも多い。自然対数を $\ln x$ と書く流儀では, $\log x$ は $\log_{10} x$ (常用対数) を表すことが多い。異なる底のもとでの対数を考えるとき, 底の変換公式 $\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$, $\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$, etc. が意味を持つ。

☆ 上の議論では $\log_e x$ が微分可能であることが暗黙に仮定されている。議論の精密化には, 逆関数の存在とその微分可能性を保証する「逆関数定理」が必要になる。

4.5.4 関数 x^a

$$f(x) = x^a \text{ のとき, } \log_e f(x) = a \log_e x \text{ なので, } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{x}。$$

$$\therefore f'(x) = a \frac{f(x)}{x} = a \frac{x^a}{x} = ax^{a-1}$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

4.5.5 正弦・余弦の微分

弧度法

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

正弦関数の微分

和 $\rightarrow$ 積の公式 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ を用いると簡単。

$f(x) = \sin x$ のとき,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x$$

和 $\rightarrow$ 積の公式を用いずに変形するときは,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1) (\cos \Delta x + 1)}{\Delta x (\cos \Delta x + 1)} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin x (\cos^2 \Delta x - 1)}{\Delta x (\cos \Delta x + 1)} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{-\sin x \sin^2 \Delta x}{\Delta x (\cos \Delta x + 1)} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{-\sin x \sin \Delta x \sin \Delta x}{(\cos \Delta x + 1) \Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right\} = \cos x \end{aligned}$$

または、2 倍角の公式を用いて

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(-2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2} \right) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\sin x \sin \frac{\Delta x}{2} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) = \cos x \end{aligned}$$

$$\therefore (\sin x)' = \cos x$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \text{ なので, } (\cos x)' = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x$$

$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ と考えて, $(\cos x)' = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\sin x$ と導くこともできる。

等速円運動の加速度

角速度 ω で原点を中心とする半径 r の円の周上を動く点の時刻 t における座標 (位置ベクトル) は, $t = 0$ において点 $(r, 0)$ にあるものとする,

位置ベクトル $(r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ 。

速度ベクトル $(-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$

加速度ベクトル $(-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t) = -\omega^2(r \cos \omega t, r \sin \omega t)$

加速度ベクトルは回転の中心に向かうことがわかる。

4.6 微分方程式

微分方程式が現象の記述と解析に有用なことを知るのが目的。求積法を学ぶことが目的ではない。

4.6.1 原始関数

定理 ある区間で $f'(x) = 0$ であれば、その区間で $f(x)$ は定数である。

証明 ... 平均値の定理による。

原始関数

$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を関数 $f(x)$ の原始関数という。

原始関数の性質

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき、任意の定数 c に対し $F(x) + c$ も $f(x)$ の原始関数である。

定理

$F(x), G(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき、 $F(x) - G(x)$ は定数である。

証明

$$(F(x) - G(x))' = 0$$

4.6.2 微分方程式 $y' = x^n$

C を任意の定数とすると、 $y = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ は微分方程式 $y' = x^n$ の解。ただし、 $n = 0, 1, 2, \dots$ 。

例題 自由落下の運動方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = -g$

4.6.3 微分方程式 $y' = ky$

微分方程式 $y' = ky$ の解は $y = Ce^{kx}$ 、ただし、 C は定数。

$y = Ce^{kx}$ において、 $x = 0$ のとき $y = y_0$ とすると、 $C = y_0$

☆ $y = Ce^{kx}$ が解であるのは明らかだけれど、解が $y = Ce^{kx}$ に限ることを示すのに積分の微分法が必要。

$y = f(x)$ も $y' = ky$ の解であるとする、積分の微分公式から

$$\left\{ \frac{f(x)}{e^{kx}} \right\}' = \{f(x)e^{-kx}\}' = f'(x)e^{-kx} + f(x)(-ke^{-kx}) = 0 \quad \therefore \frac{f(x)}{e^{kx}} = C$$

例題

フェヒナーの法則

音量などの刺激 S の増分 ΔS に対する感覚 R の増分を ΔR とするとき、 $\Delta R \propto \Delta S/S$ をフェヒナーの法則という。

フェヒナーの法則に従うとき、 $k \Delta R = \Delta S/S$ とすると、 $\frac{\Delta S}{\Delta R} = kS$ だから、 $S = Ce^{kR}$ 。
すなわち、 $R \propto \log S$

自由落下-空気抵抗あり

空気抵抗を考えないとき，落下開始 t 秒後の落下速度を v とすると，

物体の質量を m ，重力加速度を g とするとき， $m \frac{dv}{dt} = mg$

空気抵抗を考えると，雑な仮定だけれども，空気抵抗は速度に比例するとして

$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$ とする (k は比例定数)。

こう仮定すると，空気抵抗によっていずれ加速度 $\frac{dv}{dt}$ は 0 に近づくので，

最終的には $mg - kv = 0$ より定まる速度 $v = \frac{mg}{k}$ になると予測できる。

その速度に至るまでの途中経過を詳しく調べてみよう。

$m \frac{dv}{dt} = -k(v - \frac{mg}{k})$ と変形し， $y = v - \frac{mg}{k}$ とおけば，

$\frac{mg}{k}$ は定数なので， $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$

$\therefore m \frac{dy}{dt} = -ky$ ，すなわち $\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}y$

この微分方程式の解は C を定数として

$$y = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

$\therefore v = y + \frac{mg}{k} = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ ，

$t = 0$ のとき $v = 0$ と仮定すると定数 C が定まって

$$C = -\frac{mg}{k}$$

$\therefore v = -\frac{mg}{k} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$

この結果が実験・観察と一致すれば，空気抵抗が速度に比例することの傍証になる。

4.6.4 微分方程式 $y'' = -\omega^2 y$

微分方程式 $f''(x) = -\omega^2 f(x)$ の解は

$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ ，ただし， $A = f(0)$ ， $B = \frac{f'(0)}{\omega}$ 。

この解を $f(x) = A \sin(\omega x + \phi)$ の形に変形することができる。

☆. 解がこの形に限ることの証明には合成関数の微分法が必要。

$y = f(x)$ を微分方程式 $y'' = -\omega^2 y$ の解とする。すなわち， $f''(x) = -\omega^2 f(x)$ 。

$A = f(0)$ ， $B = \frac{f'(0)}{\omega}$ とし

$g(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x - f(x)$ とおく。

$g'(x) = -A \omega \sin \omega x + B \omega \cos \omega x - f'(x)$

$g''(x) = -A \omega^2 \cos \omega x - B \omega^2 \sin \omega x - f''(x) = -\omega^2 g(x)$

$g''(x) + \omega^2 g(x) = 0$ の両辺に $2g'(x)$ をかけて，

$2g'(x)g''(x) + 2\omega^2 g(x)g'(x) = 0$

これを積分すると $\{g'(x)\}^2 + \omega^2 \{g(x)\}^2 = C$

$g(0) = 0$ ， $g'(0) = 0$ なので， $C = 0$

$\therefore g(x) = 0$

すなわち， $f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$

例題 57 単振動

$$m \frac{d^2}{dt^2} = -kx \text{ の解は } x = A \sin \sqrt{\frac{k}{m}}(t + t_0)$$

例題 58 単振り子

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

$$\sin \theta = \theta \text{ の近似が成立するとき, } \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \text{ より } \theta = A \sin \sqrt{\frac{g}{l}}(t + t_0)$$

例題 59 LC 直列回路

コイルは電流の変化を抑制する性質があって、コイルに流れる電流が変化するとき、両端に電位差を発生する。時刻 t において、コイルに流れる電流を i 、コイル両端の電位差を v とするとき、

$$v = L \frac{di}{dt}$$

の関係がある。このとき比例定数 L をコイルの自己インダクタンスという。

コンデンサは電荷を蓄える性質があって、静電容量 C のコンデンサに蓄えられた電荷を Q 、両端の電位差を V とすると、 $Q = CV$ の関係がある。電流は電荷の時刻に対する変化率なので、静電容量 C のコンデンサに流れる電流を i 、電位差を v とすると、

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

すなわち、

$$v = \frac{1}{C} \int i dt$$

LC 直列回路に V の直流電圧を掛けたときの電流を i とすると

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = V$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0 \text{ より } i = A \sin \sqrt{\frac{1}{LC}}(t + t_0)$$

4.6.5 微分方程式の近似解

解を求めるのが難しい微分方程式も、数値計算でおよそのことが把握できる。

例 60 ローレンツの方程式

気象学者のローレンツ (E. N. Lorenz) は流体としての大気の状態を 3 つの変数 x, y, z で表すモデルを作成した。

x, y, z は時刻 t の関数で、

$$\frac{dx}{dt} = p(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz - rx - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

$$\text{ただし, } p = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$$

x, y, z の具体的な意味は、ローレンツ・カオスの理解の仕方 (吉崎正憲著, 日本気象協会)

https://www.metsoc.jp/tenki/pdf/2014/2014_03_0075.pdf

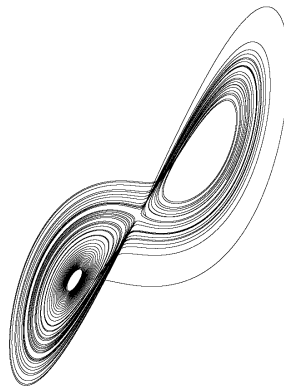
などを参照。

次のプログラムは, x, y, z の初期値を $x = 1, y = 0, z = 0$ として計算し, 点 (x, y) をプロットしている。

```

100 LET p=10
110 LET b=8/3
120 LET r=28
130 LET x=1
140 LET y=0
150 LET z=0
160 LET dt=0.00001
170 SET WINDOW -30,30,-30,30
180 SET POINT STYLE 1
190 FOR t=0 TO 50 STEP dt
200   LET dx=(-p*x+p*y)*dt
210   LET dy=(-x*z+r*x-y)*dt
220   LET dz=(x*y-b*z)*dt
230   LET x=x+dx
240   LET y=y+dy
250   LET z=z+dz
260   PLOT POINTS: x, y
270 NEXT t
280 END

```



このプログラムは JIS Full BASIC の命令のみで書かれている。

実行開始すると, 新たな x, y, z が計算されるごとに点を打っているので画面上で動きが観察できる。2つのループがあつて, 不定期にもう一方に乗り換える様子が観察できる。

260 行の x, y を y, z や z, x に変えることで他の軸方向から見た図が得られる。

180 行の SET POINT STYLE 1 は描点の形状を・に変える命令である。

170 行の SET WINDOW -30,30,-30,30 は x 座標の範囲を $-30 \sim 30$, y 座標の範囲を $-30 \sim 30$ に変える命令である。座標系の設定の前に 260 行の PLOT POINTS 文を PRINT 文に変えてどの範囲の数が現れるかを調べ、適切な数値を選択する。

例 61 惑星の軌道

万有引力の法則によると、惑星（彗星）の軌道が楕円・放物線・双曲線になることを数値計算で示す。

恒星の質量を M 、惑星の質量を m とし、 $m \ll M$ を仮定して恒星を原点にとり、惑星の位置ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y)$ とする。

万有引力定数を G とすると、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$$

両辺を m で割り、成分に分けると、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -GM \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -GM \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$$

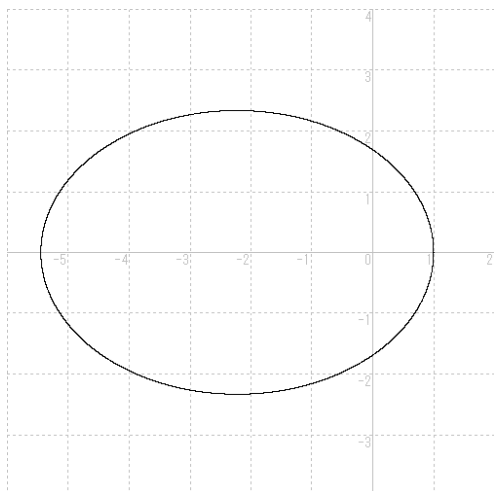
$$\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v \text{ とおくと, } \frac{du}{dt} = -GM \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}, \frac{dv}{dt} = -GM \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \text{ とな}$$

るので、 u, v と x, y の初期値を与えれば近似計算できる。

```

100 LET GM=1
110 DEF F(x,y)=-GM*x/(x^2+y^2)^(3/2)
120 DEF G(x,y)=-GM*y/(x^2+y^2)^(3/2)
130 LET x=1
140 LET y=0
150 LET u=0
160 LET v=1.3
170 LET dt=0.001
180 SET WINDOW -6,2,-4,4
190 SET POINT STYLE 1
200 DRAW grid
210 FOR t=dt TO 80 STEP dt
220   PLOT POINTS: x,y
230   LET u=u+F(x,y)*dt
240   LET v=v+G(x,y)*dt
250   LET x=x+u*dt
260   LET y=y+v*dt
270 NEXT t
280 END

```



例 62 単振り子 $ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$ 振れ角の初期値を $\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{3}{16}\pi, \frac{\pi}{4}$ と変えて計算。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

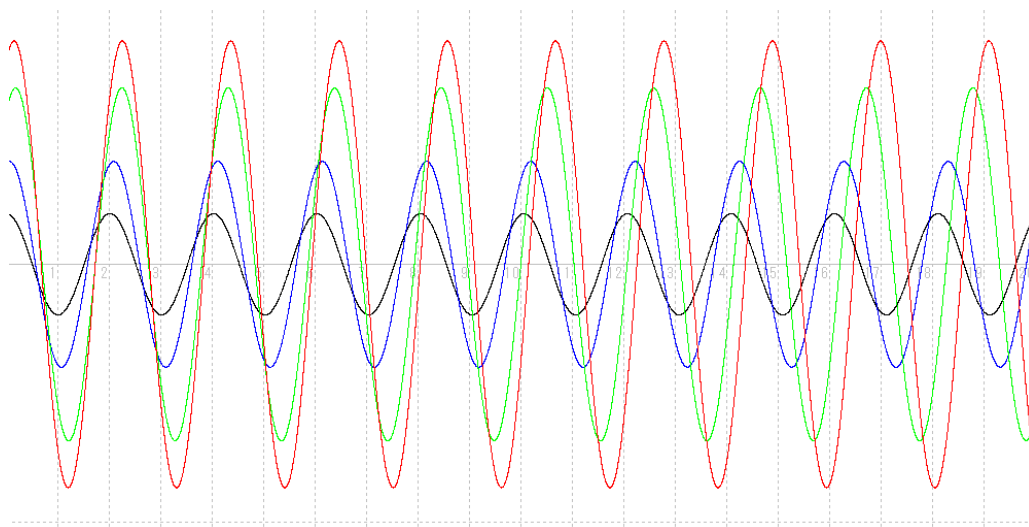
θ を x で表し, $v = \frac{dx}{dt}$ と置くと $\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{l}\sin x$

増分 Δt を小さく定め, $\Delta v = \left(-\frac{g}{l}\sin x\right)\Delta t$, $\Delta x = v\Delta t$ の関係を利用して各時刻 t における v, x を計算する。

```

LET l=1 ! 振り子の長さ
LET g=9.8 ! 重力加速度
LET dt=0.001
LET z=0 ! z=dy/dt
SET POINT STYLE 1
SET WINDOW 0,20,-2,2
DRAW grid
FOR k=1 TO 4
  SET POINT COLOR k
  LET y=k*PI/16 ! 初期振幅
  FOR t=0 TO 20 STEP dt
    PLOT POINTS:t,y
    LET z=z+(-g/l*SIN(y))*dt
    LET y=y+z*dt
  NEXT t
NEXT k
END

```



振幅が大きくなると等時性がくずれることが読み取れないだろうか。

4.7 関数の近似

4.7.1 高次導関数

$f(x)$ の n 回微分を $f^{(n)}(x)$ で表す。すなわち,

$$f^{(0)} = f(x), f^{(1)} = f'(x), f^{(2)}(x) = f''(x), \dots, f^{(n+1)}(x) = \{f^{(n)}(x)\}'$$

4.7.2 テーラー展開

$f(x)$ を多項式 $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$ で近似するとき

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Δx を微小変化とすると,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n + \dots$$

ただし, Δx^n は $(\Delta x)^n$ を表す (Δx はそれ自体が一つの文字であるかのように扱われる)。

実際, 次の定理が成立する。

定理 63 $f(x)$ が区間 $[x, x + \Delta x]$ で $(n + 1)$ 回微分可能であれば,

$$f(x + \Delta x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \Delta x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Delta x^{n+1}, \quad x < c < x + \Delta x$$

となる c が存在する。

証明は, 平均値の定理と同様。ロルの定理から導ける。

$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Delta x^{n+1}$ を剰余項という。 $f((x + \Delta x))$ を $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \Delta x^k$ で近似するときの誤差を, $x < c < x + \Delta x$ における $f^{(n+1)}(c)$ の値から見積もれる。

例 64 $f(x) = x^{-1}$ のとき,

$$f'(x) = -x^{-2}, f''(x) = 2x^{-3}, f'''(x) = -6x^{-4}, f^{(4)}(x) = 24x^{-5}, \dots \text{なので,}$$

$$f(1) = 1, f'(1) = -1, f''(1) = 2, f'''(1) = -6, f^{(4)}(1) = 24, \dots$$

$$f(1-x) \doteq 1 + (-1) \cdot (-x) + \frac{2}{2!}(-x)^2 + \frac{-6}{3!}(-x)^3 + \frac{24}{4!}(-x)^4 + \dots$$

$$\text{だから, } x \doteq 0 \text{ のとき, } \frac{1}{1-x} \doteq 1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Note. 等比級数の和の公式と同じものだから, $-1 < x < 1$ で成立する。

多項式による近似 高次導関数を計算することで, 次の近似式が得られる。

$x \doteq 0$ のとき,

$$e^x \doteq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

4.7.3 近似値と近似誤差

測定値は一定の誤差を含む近似値である。誤差の程度は, 大抵の場合, その数値に対し, 10^{-3} 程度であったり, 10^{-4} 程度だったりする。だから, それ以後の計算はそれに見合った精度で行えばよいというけれど, 本当だろうか。

乗除算に伴う誤差

例 65 α を真の値 a の相対誤差が 0.1% 以内の近似値, β を真の値 b の相対誤差が 0.2% 以内の近似値だとする。すなわち, $|\alpha - a| \leq a \times 10^{-3}, |\beta - b| \leq b \times 2 \times 10^{-3}$ 。ただし, a, b は正の数とする。

$\alpha \doteq a, \beta \doteq b$ なので, $|\alpha - a| \leq \alpha \times 10^{-3}, |\beta - b| \leq \beta \times 2 \times 10^{-3}$ と考えてよい。

絶対値記号をはずすと, $0.999\alpha \leq a \leq 1.001\alpha, 0.998\beta \leq b \leq 1.002\beta$ 。

このとき, $0.999 \times 0.998 \times \alpha\beta \leq ab \leq 1.001 \times 1.002 \times \alpha\beta, \frac{0.999}{1.002} \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{1.001}{0.998} \frac{\alpha}{\beta}$

$0.999 \times 0.998 \doteq 0.997, 1.001 \times 1.002 \doteq 1.003, \frac{0.999}{1.002} \doteq 0.997, \frac{1.001}{0.998} \doteq 1.003$ なので,

$$0.997\alpha\beta \leq ab \leq 1.003\alpha\beta, 0.997 \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{a}{b} \leq 1.003 \frac{\alpha}{\beta}$$

すなわち, $|\alpha\beta - ab| \leq \alpha\beta \times 3 \times 10^{-3}, \left| \frac{\alpha}{\beta} - \frac{a}{b} \right| \leq \alpha \times 3 \times 10^{-3}$

相対誤差が 0.1% 以内と 0.2% 以内の近似値どうしの乗除算では, 相対誤差はおおよそ 0.3% 以内と見積もれる。

(注意) 不等式自体に若干の誤差を含む。つまり不等式の限界を少し超える可能性もある。誤差を含む不等式を表す記法は確立されていないように思える。

乗除算における誤差の見積もりに, 次の近似式が使える。

a, b を絶対値が 0 に近い数 (負数でもよい) とするとき,

$$(1+a)(1+b) \doteq 1 + (a+b), \frac{1}{1-a} \doteq 1 + a, \frac{1+a}{1-b} \doteq 1 + (a+b)$$

なぜかという、 $(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab$, $\frac{1}{1-a} = (1+a) \cdot \frac{1}{1-a^2}$ であって、 a^2 や ab は a, b に比べ無視できる程度に小さいから。

おおまかにいって、乗除算では、誤差を和で見積もればよい。たとえば、1つの数が0.2%以内、もう一つの数が0.3%以内の誤差を持つとき、乗算、あるいは、除算の結果が持つ誤差は、0.5%以内と見積もれる。

注意すべきことは、計算結果を四捨五入等によって丸めることは誤差を増やす行為だということ。乗除算のたびに、毎回、所定の有効数字桁数で丸めることは、誤差を増やす効果しか持たない。電卓やコンピュータで計算するのであれば、最終的な結果のみを所定の桁数に丸めるのが適切である。それでも丸めが誤差を増やすことに変わりはなく、その数値をまた何かに使うのであれば、丸めを行わず、そのままにしておくのが最善である。

加減算に伴う誤差

乗除算については上述の通りであるが、加減算ではどうなるだろうか。

問 66 正の数 α, β を相対誤差が1%以内の近似値だとする。すなわち、真の数をそれぞれ a, b とするとき、 $|\alpha - a| \leq \alpha \times 10^{-2}$, $|\beta - b| \leq \beta \times 10^{-2}$ だとする。このとき、 $a + b, a - b$ はどの範囲にあるといえるか。

加減算で相対誤差を考えることは無意味である。加減算で意味を持つのは絶対誤差である。

たとえば、 $|\alpha - a| \leq 10^{-2}$, $|\beta - b| \leq 10^{-2}$ であれば、

$$\alpha - 0.01 \leq a \leq \alpha + 0.01, \quad \beta - 0.01 \leq b \leq \beta + 0.01$$

なので、

$$(\alpha + \beta) - 0.02 \leq a + b \leq (\alpha + \beta) + 0.02,$$

$$(\alpha - \beta) - 0.02 \leq a - b \leq (\alpha - \beta) + 0.02 \quad \text{から}$$

$$|(\alpha + \beta) - (a + b)| \leq 2 \times 10^{-2}, \quad |(\alpha - \beta) - (a - b)| \leq 2 \times 10^{-2}$$

のように、加減算の誤差が評価できる。

計算誤差 まとめ

端的に言えば、乗除算では有効数字の桁数が重要で、加減算では小数点以下何桁まで計算するかが重要だということになる。なお、コンピュータを使うと数千回、数万回の加減乗除が簡単に出来てしまう。そのとき、誤差が累積することに注意。たとえば、誤差が0.001%以内の数値の乗除算を10000回繰り返したら、誤差の範囲は10%程度にまで増えてしまうかも知れない。

☆ 誤差の伝播

加減乗除の演算では上述のように誤差が発生するが、それ以外の演算も誤差が計算結果に影響を与える。1変数関数の場合、誤差を見積もるのに、 $f(x + \Delta x) - f(x) \div f'(x)\Delta x$ が利用できる。2変数関数の場合は、

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \div \frac{\partial f}{\partial x}(x)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(y)\Delta y$$

が基本となる。

☆ **近似値の難しさ** 無手勝流で近似を重ねて近似式を作っていくと失敗する。それは、教科書などの権威に頼るというよくない学習態度を誘発しかねない。また、一方で、教条主義的な指導で、計算の度に有効数字の桁数で丸めなければならないという誤解も生み出している。きちんとした原理に基づいて判断できるように教育していく必要がある。その理論を展開するためには、周到的準備が必要である。特に、近年、学校数学で不等式が軽んじられていることに対する反省が求められる。

4.8 定積分

☆ 現行数学Ⅲだと、不定積分は求まらないのに定積分は求まることがある。たとえば、 $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$ は高校数学の範囲外であるが、 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ は高校数学。この種の技巧を教えることに意義があるのだろうか？

4.8.1 定積分

定積分の定義

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

定積分の計算公式

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b 1 dx = b - a$$

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \text{ は, } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} n(n + \frac{1}{2})(n + 1) \text{ から導かれる。}$$

m が自然数であるとき $\sum_{k=1}^n k^m$ は n の $m+1$ 次式となり、 n^{m+1} の係数が $\frac{1}{m+1}$ であることが示せる（数学的帰納法による）ので、

一般に、 m が自然数であるとき、

$$\int_a^b x^m dx = \frac{1}{m+1} (b^{m+1} - a^{m+1})$$

4.8.2 不定積分

定積分 区間に関する加法性

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

☆ $\int_a^b x^m dx$ などでの性質が成立することは容易にわかるけれど、一般に成り立つことの証明は難しい。厳密に議論するためには、積分の和の定義を修正し、区間を等分するという制約を排除する必要がある。なぜかという、 c がちょうど分点になるときでないと和を分割できないから。けれども、定義の拡張の必要性を示唆する程度で直観的にこの公式を認め、先に進むことを優先すべきであろう。なぜかという、この定理の有用性を理解しない段階で難解な議論を展開しても、それを学ぶ意義が学習者に伝わらないから。

不定積分の導関数

区間に関する加法性を根拠として次の定理が導かれる。

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ のとき,}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(x)$$

次の公式で定積分を定義してしまえばこの定理は自明であるが、区分求積の考え方を排除したら積分の応用は限定されたものになってしまうし、多重積分、線積分、面積分などへの発展もなくなる。

定積分の計算公式

$$f(x) \text{ が区間 } [a, b] \text{ で連続で, この区間で } F'(x) = f(x) \text{ であれば,}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\text{なぜなら, } G(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ とおくと, } \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \quad \because G(a) = 0$$

この公式から、区分求積の和が、原始関数を使って近似できるという新たな世界が開かれる。求めたいのが区分求積の和の極限であれば、この公式で完結する。

ただし、微分の場合と異なり、一般には、原始関数を求めるのは容易ではない。実際、初等関数の原始関数は初等関数になるとは限らないことが知られている。

注意 被積分関数の連続性は重要。たとえば、 $\int_{-2}^1 \frac{1}{x} = [\log_e |x|]_{-2}^1 = \log_e 2$ は誤り。

4.8.3 フーリエ級数展開

積和の公式を用いると

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 (m \neq n) \\ \pi (m = n) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

2π を周期とする関数 $f(x)$ を $P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_n \sin kx)$ で近似する。

$f(x) = P(x)$ と仮定して各係数を求めると、

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

実験 $P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_n \sin kx)$ の係数を変えた波を音として聞き、いろいろな音色が得られることを体験。次に、デジタル音源から1周期分のデータを取り出し、各係数を数値積分で求め、それを $P(x)$ に代入して得られる関数の音を聞いてみることで任意の音色が再現できることがわかる。

参考

Re:Sound - 帰ってきた サウンド レコーダー

<https://www.vector.co.jp/soft/winnt/art/se484434.html>

圧縮なしの WAV ファイルで録音できるので、データを読みだすのに苦勞が少ない。

WAV ファイルのフォーマットは、

PC 雑学 Tips WAVE ファイル

<http://www.ys-labo.com/pc/2009/091223%20File.html>

音ファイル (拡張子: WAV ファイル) のデータ構造について

<https://www.youfit.co.jp/archives/1418>

などで知ることができる。コンピュータのプログラムでは、バイト単位でアクセスすることで WAV ファイルを読める。

具体的には、

十進 BASIC Q & A WAV ファイルを作成する・読む

<https://decimalbasic.web.fc2.com/QA-WAV.htm>

などを参照。

4.9 多変数関数 (偏微分)

高校で偏微分を教えるとしたら、

$$z = f(x, y) \text{ のとき, } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

が使いこなせるようにする程度が適切か。具体的には、たとえば、誤差の伝播の見積り。

極値を取るための必要条件 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ も応用価値が高い。

主成分分析への入口 ある集団に属する2つの変量 x, y について、

その値の組を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_N, y_N)$ とする。

直線 $ax + by + c = 0$ と各点 (x_k, y_k) との距離の平方の和 $\sum_{k=1}^N \frac{(ax_k + by_k + c)^2}{a^2 + b^2}$ が最小と

なるように $a : b : c$ を定める。

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2 = s_x^2 + \bar{x}^2, \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 = s_y^2 + \bar{y}^2, \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k y_k = s_{xy} + \bar{x} \bar{y} \text{ を用いて,}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(ax_k + by_k + c)^2}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{a^2 + b^2} \left(a^2 \sum_{k=1}^N x_k^2 + 2ab \sum_{k=1}^N x_k y_k + b^2 \sum_{k=1}^N y_k^2 + 2ac \sum_{k=1}^N x_k + 2bc \sum_{k=1}^N y_k + c^2 \right) \\
&= \frac{a^2 (s_x^2 + \bar{x}^2) + 2ab (s_{xy} + \bar{x}\bar{y}) + b^2 (s_y^2 + \bar{y}^2) + 2ac\bar{x} + 2bc\bar{y} + c^2}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{(c + a\bar{x} + b\bar{y})^2 - a^2\bar{x}^2 - 2ab\bar{x}\bar{y} - b^2\bar{y}^2 + a^2 (s_x^2 + \bar{x}^2) + 2ab (s_{xy} + \bar{x}\bar{y}) + b^2 (s_y^2 + \bar{y}^2)}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{(c + a\bar{x} + b\bar{y})^2 + a^2 s_x^2 + 2ab s_{xy} + b^2 s_y^2}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

$c + a\bar{x} + b\bar{y} = 0$ のとき最小。 $a : b$ を定めればよい。

$$f(a, b) = \frac{a^2 s_x^2 + 2ab s_{xy} + b^2 s_y^2}{a^2 + b^2} \text{ とおく。}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{(2as_x^2 + 2bs_{xy})(a^2 + b^2) - (a^2 s_x^2 + 2ab s_{xy} + b^2 s_y^2)(2a)}{(a^2 + b^2)^2} \\
&= \frac{-2b(a^2 s_{xy} - abs_x^2 + abs_y^2 - b^2 s_{xy})}{(a^2 + b^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\text{同様に, } \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{-2a(-a^2 s_{xy} + abs_x^2 - abs_y^2 + b^2 s_{xy})}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 0 \text{ より } a^2 s_{xy} - abs_x^2 + abs_y^2 - b^2 s_{xy} = 0$$

$$\text{すなわち, } a^2 s_{xy} + abs_y^2 = abs_x^2 + b^2 s_{xy}$$

Note.

$$a(as_{xy} + bs_y^2) = b(as_x^2 + bs_{xy}) = ab\lambda \text{ とおくと}$$

$$as_{xy} + bs_y^2 = b\lambda$$

$$as_x^2 + bs_{xy} = a\lambda$$

$$\begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

だから, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は共分散行列 $\begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトル。

偏微分方程式

波動方程式

$$u = A \sin(kx - \omega t) \text{ のとき, } \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

は物理との関係で有用。

全微分可能な条件

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ となるとき, $z = f(x, y)$ は**全微分可能**という。偏導関数が連続であれば全微分可能であるが, その証明はやさしくない。

5 補遺

5.1 因数分解

2次式は平方完成を利用すれば、実根を持つ場合はかならず因数分解できる。

3次以上の多項式の場合、根を一つ見つけて (α とする) $x - \alpha$ で割るのだけれども、そのとき、筆算形式の割算を用いる必要はない (組み立て除法も不要)。次に示すような手順で、展開さえできれば因数分解できる。計算の手間は増えるけれども、それは、コンピュータの数式処理を前提にすれば問題にならない。

多項式 $P(x)$ の x に a を代入して得られる数を $P(a)$ で表す。

多項式 $P(x)$ において、 $P(a) = 0$ であるとき、 $P(x) = (x - a)Q(x)$ と表せる。ただし、 $Q(x)$ は多項式。

例 67 $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ において、 $P(-2) = 0$ であることを用いると、

$X = x + 2$ とおくと、 $x = X - 2$

$$\begin{aligned} P(x) &= (X - 2)^3 + 3(X - 2)^2 + 3(X - 2) + 2 = X^3 - 3X^2 + 3X = X(X^2 - 3X + 3) \\ &= (x + 2) \{ (x + 2)^2 - 3(x + 2) + 3 \} = (x + 2)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

☆ 一般的な証明は、概略を示すと、

$P(x)$ の x に $X + a$ を代入して $P(x) = XQ(X) + \alpha$ となるとき、

$P(x) = (x - a)Q(x - a) + \alpha$ 。 $P(a) = 0$ だから $\alpha = 0$ 。

$\therefore P(x) = (x - a)Q(x - a)$

☆ 上述を定理として認めると、 n 次方程式の解が n 個以下であることが理解できる。

6 後記

機械学習が人工知能を実用領域に押し上げた。機械学習とは何物であるかを知らないと、最近の人工知能を正しく使うことができない。そして、その技術をより発展させ、精緻なものに育てる人を育成することも大切な課題である。

機械学習の実用化を実現した技術は、誤差の逆伝播である。基本は、ベクトル値多変数関数の微分を考えるところにある。偏微分係数の行列で表現され、コンピュータ内部では行列の計算に大半の時間を費やしている。高校数学でそのレベルまで学べる時代が早期にやってくることを願う。本稿で目指しているのは、その前段階に過ぎない。本当は、より大胆な改革が必要なのかも知れない。ただし、的を絞るすぎると、次の発展を阻害することになる。次の段階に進むために必要なものは何だろうか。

新時代にふさわしい幾何学は？

2025.02.09 白石和夫

1 なぜ、幾何を学ぶのか

幾何学の今日的意義

今日的に、幾何学を学ぶことは線形代数と三角比・三角関数、そして微積分を学ぶことを意味する。幾何学は3D CGの基礎である。3D CGが実行していることは、ほぼ、行列の計算だといってよい。応用上重要な視点は、直交座標と極座標である。両者を繋ぐ三平方の定理と三角比・三角関数が欠かせない。物理学は我々が暮らすこの時空についての幾何学だといえる。物理学が扱う時空は、微分幾何によって記述される。車の自動運転には、画像から物の形を取り出す技術が欠かせない。その他、GPSやアラウンドビューモニター（全方位モニター）など、車だけ見ても幾何学が応用されている場面は多い。

幾何学の歴史的転換点

初等幾何は、歴史的には大きな成果を挙げてきた。文化遺産として継承すべき価値が高い。けれども、現代的な幾何学の応用に、円と直線の幾何は、あまりに非力である。初等幾何が有効な場面も存在する。しかし、それは大抵の場合‘たまたま’である。少し条件が外れると、とたんに解決不能に落ちいてしまう。コンピュータの力を借りることで広範囲に適用可能な手法を学ぶことに主軸を移す時期である。

計算指向 (Computational Thinking)

今日、学ぶべきことは、問題解決をコンピュータの計算に転嫁する技術である。問題を計算問題に書き換えることで、解決をコンピュータによる計算に委ねることができる。

解析幾何

計算問題に転嫁する思考法として最も典型的な例が解析幾何である。解析幾何は、閃きによって瞬時に解決する楽しみを奪うものであるが、幾何学を誰もが探究できるものに変えた技術である。現代的なPC環境のもとでは代数的な数式の計算すら人の手で行う必要がなくなった。計算機に式変形を委ねることを前提にしてよい時代である。数式の計算問題に転嫁する術として幾何学を学ぶことが有用である。

解析幾何の手法の要点は、空間を点の集合にとらえ、目的の図形を方程式（条件命題）で表す技法である。集合・論理の技法の習得も欠かせない。

学び方の転換

伝統に縛られずに学ぶ順序を変えてみよう。それによって、新たな概念の修得や公式の暗記に大きなエネルギーを掛けずに学べるようになるかもしれない。

教具としての電卓・コンピュータは試行錯誤を伴う経験を容易にする。経験的な知識を土台に数学を学んでいく学ぶ方への転換を図るときである。また、解析幾何やベクトルによる厳密解と照らし合わせることで、空間認知の感覚を育てるのにも役に立つ。

公式はPCやインターネットを使えば簡単に参照できる。公式を覚えるのは、ICTに委ねる時代である。公式は覚えるものではなく、公式を作り、使うものへと教育を転換しなければならない。そして、コンピュータに委ねることができる計算のカテゴリーを知ることとも大切である。多くの場合、三角関数の式変形は無条件にコンピュータに委ねられるものではなく、人が見通しを持ってあたかなければ数式処理システムを操れない。AIに教科書の問題を解かせて解けたからといって過信してはならない。それは単に模倣による機械学習の成果に過ぎない。

旧来の空間幾何は、初等幾何の視点から作られた公理系をよりどころとして構築されている。しかし、 $\mathbb{R}^3$ の幾何学を確立してしまえば、それを現実の空間の数理モデルとして扱うことに支障はない。 $\mathbb{R}^3$ の幾何を現実の空間に適用して成果があれば、 $\mathbb{R}^3$ の幾何が現実の空間のモデルとして適切であることの帰納的証明になる。初等幾何の公理系を基礎におく空間幾何を展開しても、それが、現実の空間の適切なモデルであることを演繹的に証明できるわけではない。

空間幾何、立体幾何を学ぶのに、現物模型を通して学ぶ以外にも、コンピュータ上でのシミュレーションという学び方が可能な時代となった。さらに、空間座標を早期に導入することは、空間認知の助けになる。

平面幾何についても、まったく、同様である。現実の空間が3次元であることを考えると、平面幾何を積極的に学ぶ必要性に乏しいかも知れない。けれども、平面幾何が重要であるのは、極座標を通して三角比・三角関数に連なるからである。無論、3次元に進む前に2次元で基礎技能を磨いておくことにも意義がある。

2 幾何学の土台

2.1 平面幾何

ユークリッド式の幾何学

ユークリッド式の幾何学は、三角形の合同に基礎を置く幾何学である。ただし、ここでいう三角形の合同とは、対応する2つの三角形の辺と角が等しいことを意味する。

正弦定理と余弦定理

正弦定理と余弦定理を学べば、2辺夾角や1辺両端角などの三角形の合同条件は当然のこととなる。ユークリッド式の幾何学を本格的に学ぶのは正弦定理・余弦定理を学んだ後にすることを考えてみよう。無論、それを実行するためには、三角形の合同条件に依らずに正弦定理・余弦定理を導かなければならない。その可能性について考えてみる。

三平方の定理と三角比の幾何学

中学校での幾何をユークリッド式の幾何から三平方の定理と三角比の幾何に転換することを考えよう。

三平方の定理と三角比によって平面の極座標を考えることができる。三角比を極座標から定義する道を選ぶ。それは、定義域を拡張するわずらわしさを解消する道でもある。

垂線が主役の幾何学

これから考える幾何学では、垂線が主役になる。

異なる2点を通る直線はひとつに定まること、直線に対して任意の点（直線上および直線外）から垂線が描け、それはひとつに定まることを前提としておこう。それらは、定規・コンパスによる作図の経験から理解できることである。

2.2 図形の移動・変換

小学校では、図形の移動を通して図形の合同を定義している。中学校でもそれを踏襲するものとしたい。なぜかという、辺、角が等しいことで合同を定義すると、曲線図形は対象外になってしまうからである。

そこで、まず、図形の平行移動、回転、対称移動が持つ性質を調べ、それらを取りあえずの公理として扱うことで幾何学を展開することにしてみよう。

2.2.1 平行移動

同じ向きに同じ距離だけ移動させることを平行移動という。

平行移動は次の性質を持つ。

平行移動は、図形の形と大きさ（辺の長さや角の大きさ）を変えない。

平行移動で重なる2直線は平行であるという。

平行移動で対応する2点を結ぶ線分はどれも平行で長さが等しい。

平行な2直線は、平行移動で平行な2直線に移る。

平行線に第3の直線が交わってできる同位角は等しい。

第3の直線が交わってできる同位角が等しいとき、2直線は平行である。

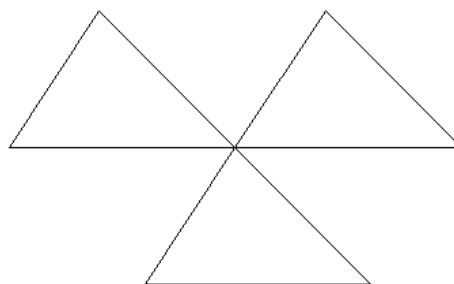
2組の対辺が平行な四角形を平行四辺形という。

平行四辺形の対辺の長さは等しい（平行線の間隔は斜めに測っても等しい）。

三角形の内角の和

平行移動の性質を利用すると、三角形の内角の和が 180° であることが証明できる。

（対頂角が等しいことに注意すれば、平行移動の性質から直接導ける）



2.2.2 回転移動

回転移動は、図形の形（辺の長さや角の大きさなど）を変えない。

2.2.3 対称移動

直線に関する対称移動を考える。

対称移動は，図形の形（辺の長さや角の大きさなど）を変えない。

対称移動で対応する 2 点を結ぶ線分は，対称軸の垂直 2 等分線である。

2.2.4 拡大・縮小

平面が他の曲面と異なるのは，図形を一定の割合で拡大できることである。この特質を何らかの形で公理に組み込まなければ，平面（ユークリッド平面）の幾何学は成立しない。

拡大・縮小

A を平面上の 1 点とする。平面上の点 P に対し， $AQ = kAP$ となる半直線 AP 上の点 Q を対応させる変換を点 A を中心とする k 倍の拡大・縮小という。（ k を相似比という）

拡大・縮小は次の性質を持つ（公理としてあつかう）。

拡大・縮小で対応する 2 線分は平行で，長さの比は k である。

拡大・縮小で対応する角の大きさは変わらない。

Note.

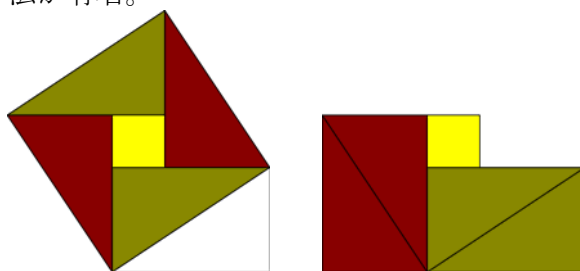
この仮定をおくことで，平行線公理を仮定するユークリッド幾何と同等の幾何になる。

縮図

縮図を利用して測量を行うことを通して相似図形の性質を帰納的に学ぶことができる。

2.3 三平方の定理

直角三角形において，斜辺を 1 辺とする正方形を分割して他の 2 辺を 1 辺とするの正方形に組み替えることで三平方の定理を示せる。たとえば，バスカラの証明と呼ばれる次の手法が有名。



（参考文献 矢野健太郎著「幾何の有名な定理」 数学ワンポイント双書 36 共立出版（1981））。

2.4 平面座標（直交座標）

2.4.1 座標平面（概観）

三平方の定理をよりどころにして座標平面上に幾何学を構築していく。それに先立って、座標平面の利用の習熟を図る。関数のグラフや一次方程式の解直線など、まず、座標平面上に条件を図示して問題解決に役立てることから始めたい。その際、GeoGebra のような数学ソフトを援用する。経験や試行を積み重ねることを目指す。

2.4.2 負の数

数を負の数に拡張することで、原点の反対側にある点の位置を記述することを可能にする。

そして、負数を利用することで、平行移動が、左右方向と上下方向の2つの数で表示できることを学ぶ。演算の枠組みでいうと、正負の数の足し算に相当する。

2.4.3 実数

三平方の定理を認めると、 $a^2 + b^2 = c^2$ となる c を扱う必要がある。

負でない数 a に対して $x^2 = a$ となる負でない数 x を $\sqrt{a}$ で表すけれども、数の範囲を有理数にとどめると、たとえば、 $\sqrt{2}$ は存在しない。

そこで、無限小数を数として認め、実数と呼ばれる数の体系を作る。

ただし、 $3 \times \frac{1}{3} = 1$ だから、 $0.9999 \dots = 3 \times 0.33333 \dots = 1$ でないと具合が悪い。

そこで、末尾が $9999 \dots$ である無限小数は連続する9が始まる桁の一つ手前の桁の数字を1繰り上げたものと同一視する約束にする。

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。

☆ このままだと、十進法以外に、2進法や3進法で定義される実数ができてしまう。基底となる数をどう選んでも同じ体系が作れることを証明しなければいけない。そこで、記数法に依存しない手法で実数を定義することを考えるのだけれども、それもかなり程度の高い議論になる。

☆ 直線と円の幾何だけをターゲットにするのであれば、 $\sqrt{a^2 + b^2}$ の演算で閉じた体系にすればよいので、実数よりも狭い範囲の数だけ考えれば済む。ただし、そうすると、極限を考えることができなくなってしまう、幾何学の適用範囲が限定されてしまう。

2.4.4 数直線

直線と実数是一对一に対応するものと考えて先に進む。つまり、

数直線上の点にはちょうど一つの実数に対応し、

各実数に対し対応する点がちょうど一つ数直線上にある

とする。

この取り決めによって、座標が一致する2点は同じ点だということになる。

☆ 無限小を含むように実数を拡張した超実数という体系を作ることができる。直線上の点は超実数だとすることもできるから、実数で表した座標が一致する2点が異なる点であることがありえる。だから、上述の取り決めは証明することができない約束である。

2.4.5 直交座標

平面上で、座標が0の点で直交する2直線を x 軸, y 軸とし, x 軸を原点のまわりで反時計まわりに 90° 回転したとき y 軸に重なるように各軸の正の向きを定める。

両軸の交点を原点という。

平面上の点 P から x 軸, y 軸に下した垂線の足の座標を, それぞれ, x, y とするとき, (x, y) を点 P の座標という。

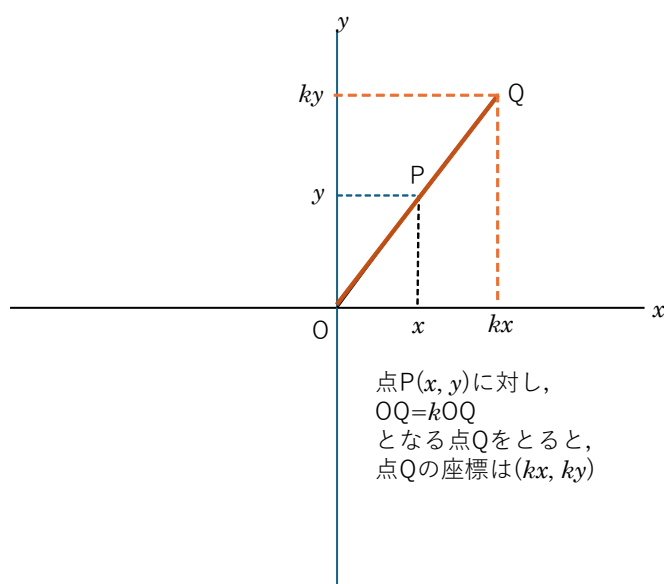
以後, 点 P の座標が (x, y) であるとき, 座標 (x, y) で点 P を表す。

2.4.6 平行移動

点 (x, y) を x 軸方向に a , y 軸方向に b だけ (平行) 移動した点は $(x + a, y + b)$ 。

2.4.7 拡大・縮小

原点を中心とする k 倍の拡大で, 点 (x, y) は点 (kx, ky) に移る。



k が負の数のとき, k 倍の拡大を原点と反対側に伸ばすものと解釈する。

それは、負数を掛けることの学習とリンクする。負数に負数を掛けると正の数になるのが自然なことの例になり、また、その解釈をよりどころとして負数を掛けることを定義していくこともできる。

2.5 三角比と極座標

2.5.1 正接

正接

座標平面上の点 $P(x, y)$ に対し、半直線 OP が x 軸の正の向きとなす角を半直線 OP の**偏角**という。角は反時計まわりを正の向きとし、時計まわりを負の向きとする。たとえば、 270° と -90° は同じ角を表す。

偏角が θ の直線 $y = ax$ (原点を通る直線) と直線 $x = 1$ との交点の y 座標を $\tan \theta$ で表す。すなわち、 $a = \tan \theta$ 。 $\tan \theta$ を θ の**正接**という。

例 $\tan 45^\circ = \tan 225^\circ = 1, \tan 270^\circ = \tan(-90^\circ) = -1$

記法の約束 $\tan$ は乗除より弱く、加減より強い。

逆正接

x に対し、 $x = \tan \theta$ となる θ を $\arctan x$ で表す。ただし、 θ が $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲で求める。

例 直線 $y = 2x$ が x 軸の正の向きとなす角を求める。BASIC では $\arctan x$ を $\text{ATN}(x)$ で表す。

```
10 OPTION ANGLE DEGREES
```

```
20 PRINT ATN(2)
```

```
30 END
```

2.5.2 極座標と正弦・余弦

原点を中心とする半径 1 の円を単位円という。偏角が θ の半直線と単位円の交点の x 座標を θ の**余弦**といい、 $\cos \theta$ で表し、 y 座標を θ の**正弦**といい、 $\sin \theta$ で表す。

例 $\cos 0^\circ = 1, \sin 0^\circ = 0$

$\cos 90^\circ = 0, \sin 90^\circ = 1$

$\cos 180^\circ = -1, \sin 180^\circ = 0$

$\cos 270^\circ = \cos(-90^\circ) = 0, \sin 270^\circ = \sin(-90^\circ) = -1$

座標平面上の点 $P(x, y)$ において $OP = r$ 、半直線 OP の偏角が θ であるとき、
 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

証明に比例のグラフの性質「グラフ上で x, y が表す点が原点を通る直線上にあるとき、 x と y は比例している。」を用いる。

例題 1 地点 A を出発して真東から北東方向 40° の方向に 2km 進み、右に 20° 向きを変えて 1 km 進んだ。現在地は地点 A からどれだけ離れ、どの向きにあるか？

☆意図は、ベクトル概念の素地。

点 (x, y) の偏角 (度) を JIS Full BASIC の ANGLE 関数で求めることができる。

```
10 OPTION ANGLE DEGREES
20 INPUT x,y
30 PRINT ANGLE(x,y)
40 END
```

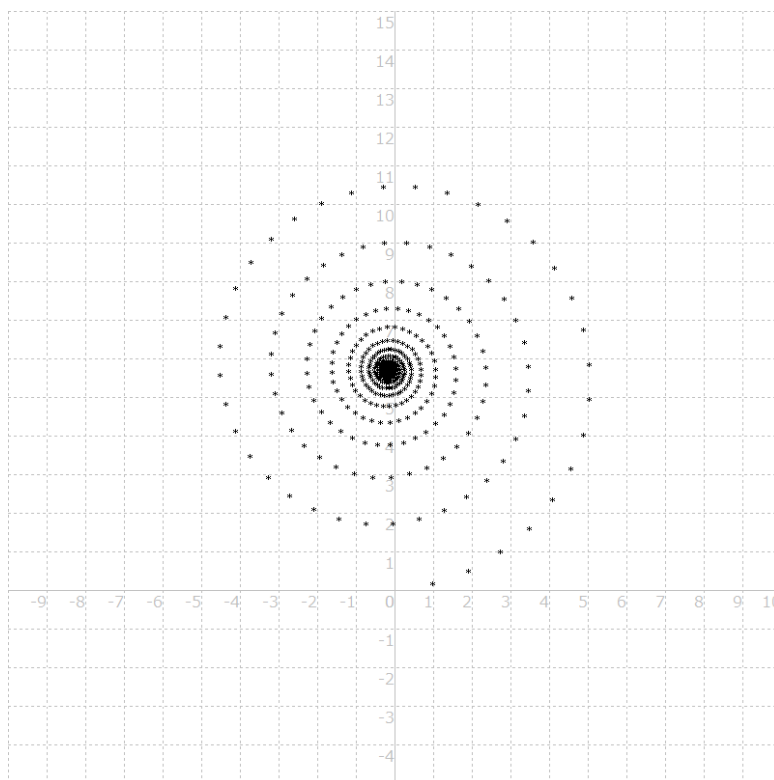
☆たいていの関数電卓、プログラム言語で、 $\tan \theta = y/x$ となる θ を求めることができる (ただし、弧度法のみのことがある) けれども、正接の値から正弦、余弦を求めるのは少し程度が高い。ここでは、Full BASIC の ANGLE 関数のように (x, y) から偏角を求める関数を利用することを想定する。

検討課題

点 (x, y) を極座標で表したときの偏角を表す記号 (Full BASIC の $\text{ANGLE}(x, y)$ に相当する数学の記号) をどうするか? 複素数を用いれば偏角を $\arg(x + iy)$ と書ける。しかし、この記号を用いるために複素数を導入したいとは思わない。

例題 2 原点を起点として座標平面上を進む点 P は次の約束に従って 1 秒ごとに動く。進む向きは、はじめ x 軸の正の向きで、1 秒ごとに向きを反時計まわりに 10° 増やす。進む距離は、はじめ 1cm で、1 秒ごとに 1% ずつ減らす。10 分後、点 P は原点からどれだけ離れ、また、どの方角にあるか。

```
OPTION ANGLE DEGREES
SET WINDOW -10,10,-5,15
DRAW grid
LET x=0
LET y=0
LET theta=0
LET r=1
FOR t=1 TO 600
  LET theta=theta+10
  LET r=r*0.99
  LET x=x+r*COS(theta)
  LET y=y+r*SIN(theta)
  PLOT POINTS:x,y
NEXT t
PRINT SQR(x^2+y^2),ANGLE(x,y)
END
```

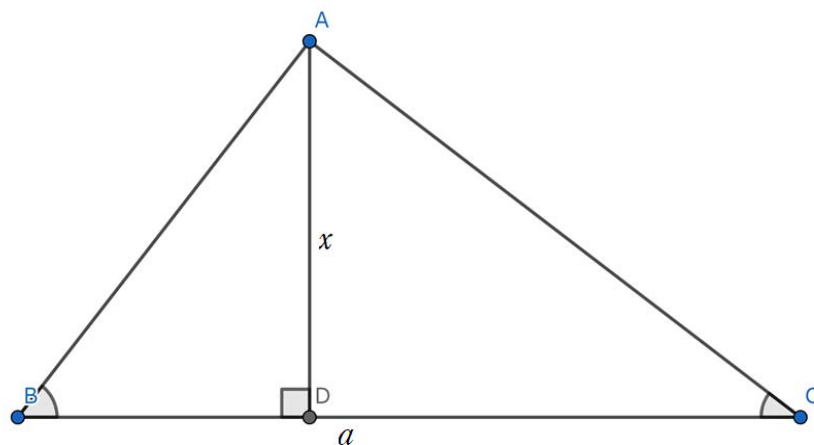


2.5.3 三角比の図形への応用

正接の図形への応用

角 $C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC において, $AC = x$, $BC = y$ とすると, $y = x \tan A$ 。

例



a, B, C から AD が求まる。

$$AD = x \text{ とすると, } BD = \frac{x}{\tan B}, \quad CD = \frac{x}{\tan C}$$

$$a = BD + CD \text{ より, } \frac{x}{\tan B} + \frac{x}{\tan C} = a$$

$$\therefore x = \frac{a}{\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}}$$

Full BASIC のプログラムで書くと、

```
10 OPTION ANGLE DEGREES
20 INPUT a,B,C
30 PRINT a/(1/TAN(B)+1/TAN(C))
```

正弦・余弦の図形への応用

直角三角形の三角比

例題 3 水平面とのなす角が 6° の斜面を 100m 進むと、水平方向、鉛直方向にそれぞれ何 m 進むか。

例題 4 斜面を 100m 進んだら高さが 6m 増加した。この斜面が水平面となす角は何度か。

解法 1 水平方向の移動距離は、三平方の定理から $\sqrt{100^2 - 6^2} = \sqrt{9964} (\approx 99.8)(\text{m})$ 。

ANGLE 関数を適用して、 $\text{ANGLE}(\text{SQR}(9964), 6) \approx 3.44^\circ$

解法 2 $\sin \theta = y$ となる θ を $\arcsin y$ で求めることができる。

```
10 OPTION ANGLE DEGREES
20 PRINT ASIN(6/100)
30 END
```

1 辺両端角

$\triangle ABC$ において $BC = a$, $\angle B = B$, $\angle C = C$ とする。 $b = CA$ を求めたい。

このとき、 $A = 180^\circ - (B + C)$

C から辺 AB に下した垂線の足を H とする。 $CH = a \sin B = b \sin A$

$$\therefore b = a \times \frac{\sin B}{\sin A}$$

2 辺夾角

$\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の大きさと、 $\angle A$ を挟む 2 辺 AB, AC の長さがわかっていると、 $\angle A$ の対辺 BC の長さを求めたい。

頂点 C から辺 AB またはその延長に下した垂線の足を H とすると、 $\angle A$ の正弦、余弦から AH, CH の長さが求まり、HB もわかる。ここで、三平方の定理を適用すると、BC が求まる。

☆ この手順を一般化したものが余弦定理。余弦定理に進む前に、具体例で見通しを持たせる。

2.6 空間座標

現行カリキュラムでは、空間座標はベクトルを空間に拡張するのと同時に導入される。けれども、空間座標は空間認知に有用な概念であり、早期の導入が望まれる。

縦横と高さ方向の格子を素材に思考を巡らせると、たとえば、次のような事実があることが観察できる。たとえば、

xy 平面の原点を通って x 軸、 y 軸のいずれとも垂直な直線を z 軸とすると、 z 軸は xy 平面上で原点を通るどの直線とも垂直に交わる。

空間幾何の基礎

空間内の直線 l と、直線外の点 P があると、 l と P を含む平面がひとつ定まる。その平面内に、 P を通る l の平行線がある。

同一平面上になくて共有点を持たない 2 直線は、**ねじれの位置**にあるという。

空間の座標軸

xy 平面の原点を通って x 軸、 y 軸のいずれとも垂直な直線を z 軸とする。

空間座標系は、 z 軸の正の向きの定め方に 2 通りある。

右手系は、右手の親指を x 軸、人差し指を y 軸として、中指を折り曲げたとき、中指が指す向きを z 軸の正の向きとする。普通に x 軸、 y 軸を黒板、あるいは PC 画面上に描いたとき、 z 軸の正の向きは手前を向く。

左手系は、その反対。数学では、右手系を用いるのが普通だけれども、そのどちらとも指定しないでおくこともできる。

空間座標

平面座標を空間座標に拡張する方法を考えよう。

x 軸と y 軸とを含む平面を xy 平面という。空間内の点 P から xy 平面に垂線を下す (P を通る z 軸の平行線を考えればよい)。垂線の足の座標を (x, y) とし、 P を通って xy 平面と平行な平面と z 軸の交点の z 軸上の座標を z であるとき、 (x, y, z) を P の座標という。

Note. この定義だと、 x, y, z の対称性が崩れているから、座標軸を入れ替えて考えても同じ結果になるかという疑問が残ってしまう。それが気になるときは、 x 座標は、 P を通り yz 平面と平行な平面と x 軸との交点の x 座標、 y 座標は、 P を通り zx 平面と平行な平面と y 軸との交点の y 座標と定めればよい。

2.7 平面幾何（座標・ベクトルと三角比）

座標・ベクトル、三角比を用いて幾何を学ぶ。

2.7.1 2 点間の距離

線分 AB の長さを、2 点 A, B 間の距離といい、 AB で表す。

Note. 線分を表すときは、「線分」を前置する。

絶対値

$x \geq 0$ のとき, $|x| = x$, $x < 0$ のとき $|x| = -x$

$$|x| = \begin{cases} x & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

x が負の数のとき, $|x|$ は, -1 を掛けて正の数に変えたもの。

☆ 数表現についての絶対値と異なり, $|x|$ は x の数表現の内部に立ち入らないで定義される。

数直線上 2 点間の距離

数直線上の 2 点 $A(x_1), B(x_2)$ に対し,

$x_1 \leq x_2$ のとき, $AB = x_2 - x_1$

$x_2 < x_1$ のとき, $AB = x_1 - x_2$

まとめて, $AB = |x_2 - x_1|$

要するに, 大きい方から小さい方を引く。

平面上の 2 点間の距離

平面上の 2 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ に対し,

$$AB = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

$|x|^2 = x^2$ であることを用いて,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2.7.2 図形の方程式

平面上の点全体の集合 $\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ を $\mathbb{R}^2$ で表す。

$\mathbb{R}^2$ の部分集合を図形という。

図形 F が x, y に関する方程式 $P(x, y)$ を用いて $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P(x, y)\}$ で表される
とき, $P(x, y)$ を図形 F の方程式という。

また, x, y に関する方程式 $P(x, y)$ に対し, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P(x, y)\}$ を図形 $P(x, y)$ という。

2.7.3 直線の方程式**原点を通る直線**

原点と原点と異なる点 $A(a, b)$ を通る直線上の任意の点を $P(x, y)$ とするとき,

$$\frac{OP}{OA} = k \text{ とすれば, } x = ka, y = kb$$

$$\therefore a \neq 0, b \neq 0 \text{ のとき, } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

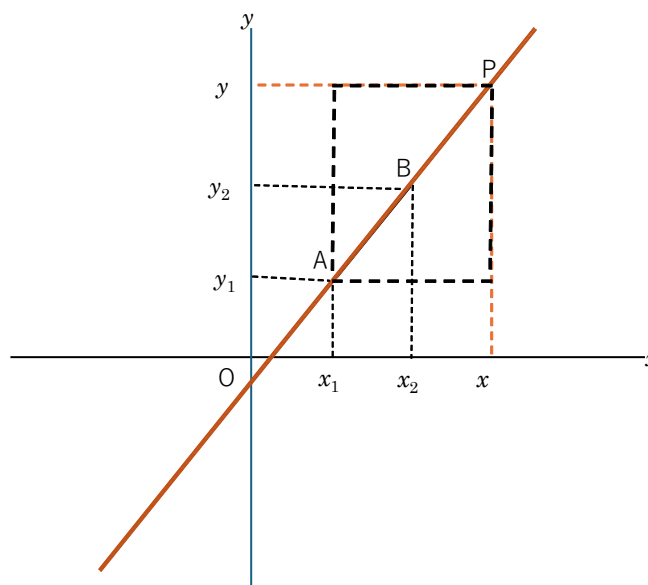
$$a = 0 \text{ のとき, } y = b$$

$$b = 0 \text{ のとき, } x = a$$

2 点を通る直線

異なる 2 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ を通る直線の方程式を求める。

$P(x, y)$ を直線 AB 上の任意の点とすると, $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$



ただし, $x_1 = x_2$ のとき, $x = x_1$
 $y_1 = y_2$ のとき, $y = y_1$

直線の方程式の一般形

y 軸と平行でない直線の方程式は $y = ax + b$ の形に変形できる。 a を傾き, b を y 切片という。 y 軸と平行な直線の方程式は, $x = a$ の形になる。

平行な直線

平行移動で重なる異なる 2 直線を平行ということにする。

$y = ax + b$ の形の方程式で表される直線は, 傾きが等しく, y 切片が異なることが平行条件。

☆ 傾きが等しく, y 切片が異なるとき平行移動で重ねられることは容易にわかるが, 逆は難しいかもしれない。傾きが異なる 2 直線がただ一つの共有点を持つことは代数的に示せる。ただ一つの共有点 P を持つ 2 直線 l, m が平行だとすると, 共有点 P はどこに移されるだろうか?

円の方程式

点 $P(x, y)$ が点 $A(x_0, y_0)$ を中心とする半径 r の円上にある $\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

例題 5 円と直線, 円と円の交点 (方程式の同値変形)

例題 6 指定された 3 点を通る円の方程式を求める (3 元連立一次方程式)。

2.7.4 正弦と余弦

平面上の点 P に対し、半直線 OP が x 軸の正の向きに対しなす角を反時計まわりに測り $\angle xOP$ で表す。時計まわりは負の向きとし、 $\angle xOP$ を負数にして表す。

原点を中心とする半径 1 の円を単位円という。角 θ に対し、単位円上に $\angle xOP = \theta$ となる点 $P(x, y)$ を取り、 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ とする。

平面上の点 $P(x, y)$ に対し、 $OP = r$ とするとき、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 。

単位円上の点 P に対し $OP=1$ だから、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 。
ただし、 $\cos^2 \theta$ は $(\cos \theta)^2$ を、 $\sin^2 \theta$ は $(\sin \theta)^2$ を表す。

2.7.5 正弦定理・余弦定理

$\triangle ABC$ に対し、辺の長さ BC, CA, AB を、それぞれ、 a, b, c で表し、 $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさをそれぞれ、 A, B, C で表す。

余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

証明 3 点 $A(0,0)$, $B(c,0)$, $C(b \cos A, b \sin A)$ に対し、

$$a^2 = BC^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

余弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

練習 7 三角形の 3 辺の長さ a, b, c を入力すると $\angle A$ の大きさを出力するプログラムを作れ。

解答例 (JIS Full BASIC)

```
10 OPTION ANGLE DEGREES
20 INPUT a,b,c
30 PRINT ACOS((b^2+c^2-a^2)/(2*b*c))
40 END
```

解説 $\cos \theta = x$ となる θ を求めるのに組込関数 $\text{ACOS}(x)$ を用いる。

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

証明

$\triangle ABC$ の頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を H とすると、 $CH = b \sin A = a \sin B$

☆正弦定理の証明に円周角の定理は不要。

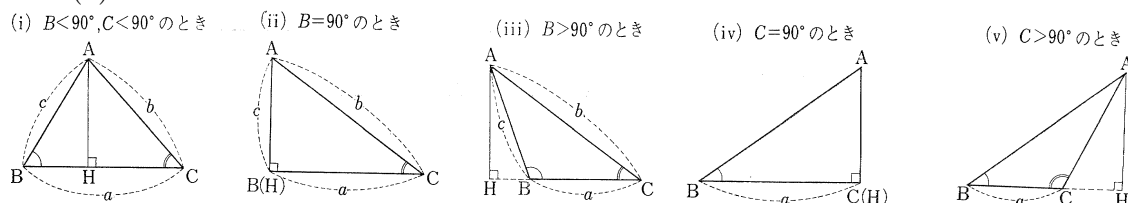
練習 8 三角形 ABC において a, B, C を入力すると b, c を出力するプログラムを作れ。

例題 9 $\triangle ABC$ において、

(1) $a = b \cos C + c \cos B$

(2) $\sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$

証明 (1)



$$(2) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ とおく。}$$

$a = k \sin A, b = k \sin B, c = k \sin C$ を $a = b \cos C + c \cos B$ に代入して

$$k \sin A = k \sin B \cos C + k \sin C \cos B$$

$$k \neq 0 \text{ なので, } \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

$$\text{三角形の内角の和は } 180^\circ \text{ なので, } \sin A = \sin\{180^\circ - (B + C)\} = \sin(B + C)$$

☆ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ と $a = b \cos C + c \cos B$ から

$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$ が導かれることに注意。比を用いる利便性が現れている。

定理 10 2つの三角形において、

- (1) 対応する3辺の長さがすべて等しいとき、対応する角の大きさもすべて等しい (SSS)。
- (2) 対応する2辺の長さが等しくその2辺が挟む角の大きさが等しいとき、残りの辺の長さ、角の大きさも等しい (SAS)。
- (3) 対応する1辺の長さが等しくその両端の角の大きさが等しいとき、残りの辺の長さ、角の大きさも等しい (ASA)。

定理 11 2つの三角形において、次の (1)~(3) は同値

- (1) 対応する3辺の長さの比が等しい。
- (2) 対応する2辺の長さの比が等しくその2辺が挟む角の大きさが等しい。
- (3) 対応する2つの角の大きさが等しい。

例題 12 1辺の長さが1の正五角形の対角線の長さは、 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。

2.7.6 三角形の面積

$\triangle ABC$ の面積を S とすると、 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 。

余弦定理から次の公式を導くことができる。

$$\text{命題 13 } \sin A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2bc}$$

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{(1 + \cos A)(1 - \cos A)} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)} = \frac{\sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - a^2} \sqrt{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}}{2bc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{(b+c)^2 - a^2} \sqrt{a^2 - (b-c)^2}}{2bc} = \frac{\sqrt{(b+c)^2 - a^2} \sqrt{a^2 - (b-c)^2}}{2bc} \\
&= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)} \sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}}{2bc}
\end{aligned}$$

ヘロンの公式

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

練習 14 三角形の 3 辺の長さを入力するとその面積を出力するプログラムを作れ。

正弦定理の別証

上の命題から

$$\sin A = a \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2abc}$$

となるから、正弦定理 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ を導くことができる。

3 平面幾何と空間幾何

3.1 平面図形の方程式

図形の方程式

平面図形 F に対し、 $(x, y) \in F \Leftrightarrow P(x, y) = 0$ となる方程式 $P(x, y) = 0$ を F の方程式という。すなわち、 $F = \{(x, y) | P(x, y) = 0\}$ 。

方程式の表す図形

x, y の方程式 $P(x, y) = 0$ に対し、集合 $\{(x, y) | P(x, y) = 0\}$ を図形 $P(x, y) = 0$ という。

例 直線 $2x + 3y = 4$ は、集合 $\{(x, y) | 2x + 3y = 4\}$ を表す。

平面上の図形を表すときには、変数として x, y を用い、 x 座標を x 、 y 座標を y で表す。

たとえば、集合 $\{(X, Y) | X^2 + Y^2 = 8\}$ は、円 $x^2 + y^2 = 8$ と称される。

上の例に示すように、方程式 $P(x, y) = 0$ の部分は、 x, y を変数として含む条件命題で置き換えてよい。また、「図形」は、適宜、適切な名称に置き換えてよい。

練習 15 曲線 $y = ax^2$ と $y = bx^2$ は相似（原点を中心とする拡大で重なる）。ただし、 $ab \neq 0$ とする。

3.2 ベクトル

3.2.1 ベクトルの演算

ベクトルは、数値の組。座標との違いは加法や内積などの演算が定義されること。伝統的な幾何ベクトルを捨て、数値の組みからなるデータを扱う基礎としてベクトルを学ぶ。

図形から切り離して定義し、図形への応用を考えるなかで幾何の道具としての実用性とともベクトルの幾何的な直観を養う。なお、3次元のベクトルも同様に定義する。

加法, スカラー倍, 内積, 大きさの定義

$\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ に対し,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\mathbf{0} = (0, 0) \quad \text{零ベクトル}$$

$$-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a} \quad \text{逆ベクトル}$$

$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ を $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ で表す。

$\frac{1}{k}\mathbf{a}$ を $\frac{\mathbf{a}}{k}$ で表す。

ベクトルの計算公式

加法とスカラー倍

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ をベクトルと, k, l を数とすると,

命題 16 (交換法則)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

(結合法則)

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

(ベクトルに関する分配の法則)

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

(スカラーに関する分配の法則)

$$(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$$

(スカラーに関する結合法則)

$$k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$$

内積の計算公式

$$(1) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

$$(2) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$(3) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

$$(4) \quad (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

次の公式は (1)~(4) から導かれる。

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$$

$$|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 \pm 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \quad (\text{複号同順})$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$$

命題 17 (コーシー・シュワルツの不等式) $-|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

証明. $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \geq 0$ を示す。 $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ とする。

$$|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0 \quad \square$$

平行なベクトル

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について, $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ となる 0 でない実数 k があるとき, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行であるといい, $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ で表す。

$\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ となる 0 でない実数 k があるとき, $\mathbf{b} = \frac{1}{k}\mathbf{a}$ だから, $\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} // \mathbf{a}$ である。

Note. 零ベクトルはどのベクトルとも平行でないものとする。

3.2.2 幾何ベクトル

座標ベクトル

点 P の座標が (a_1, a_2) であるとき、座標を成分とするベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ を点 P の座標ベクトルという。点 P の座標ベクトルが $\mathbf{a}$ であることを $P(\mathbf{a})$ で表す。

定義 18 2 点 $A(\mathbf{a}), B(\mathbf{b})$ に対し, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

命題 19
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{AA} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

☆ 伝統的な幾何ベクトルの定義（有向線分の同値類）では, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ の証明は容易ではなく, また, 内積の計算公式の導出も難解。

直線の平行とベクトルの平行

4 点 A, B, C, D について, $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ であるとき, 直線 AB と直線 CD は一致するか, または, 四角形 $ABDC$ は平行四辺形。

位置ベクトル

C を定点とすると, $\overrightarrow{CP}$ を (C に対する) P の位置ベクトルという。

原点 O に対する点 P の位置ベクトルは, P の座標ベクトルと一致する。

2 点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ とすると, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ である。

特に, 2 点 A, B の位置ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ のとき, A, B は一致する。

分点の位置ベクトル

線分 AB を $m:n$ の比に分ける点を P とすると, $\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB}$ だから,

A, B, P の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ とすると, $\mathbf{p} = \frac{n}{m+n} \mathbf{a} + \frac{m}{m+n} \mathbf{b}$ である。

(Note) 外分点の場合は, m, n のうちの一方を負数にする。

☆ベクトルの内分・外分は, 加重平均を意味する。

例題 20 $\triangle ABC$ の 3 頂点の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ として, 2 頂点 A, B から対辺に引いた中線の交点の位置ベクトルを求めよ。

三角形の 3 中線は 1 点で交わる。この点を三角形の重心という。

直線の方程式

直線 AB 上の任意の点を P とすると, $\overrightarrow{AP} = t \overrightarrow{AB}$ となる実数 t が存在するから, A, B, P の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ とすると, $\mathbf{p} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ である。

練習 21 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ のとき, 2 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ であることを示せ。

3.2.3 ベクトルのなす角

零ベクトルでない2つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対し $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ となる2点 A, B をとるとき, $\angle AOB$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角という。

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が平行でないとき,

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ とすると, 余弦定理より $\cos \theta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB}$ 。

内積の計算公式から $OA^2 + OB^2 - AB^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ なので,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

この結果は, $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ の場合にも正しいから次の命題が成立する。

命題 22 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ とすると, $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$

ベクトルの垂直条件

命題 23 (ベクトルの垂直条件) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ がいずれも零ベクトルでないとき

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ のなす角} = 90^\circ$$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ のとき $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は垂直であるといい, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ で表す。零ベクトルは任意のベクトルと垂直だと考える。

練習 24 $\mathbf{n} = (a, b)$ とする。 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ のとき, 方程式 $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ が表す図形は, $\mathbf{n}$ に垂直で点 (x_0, y_0) を通る直線であることを示せ。

問題 1 4点 O, A, B, C があって, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CA}$ ならば $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$ であることを示せ。

前問は, 三角形の3垂線が1点(垂心)で交わることの証明になっている。

問題 2 $\triangle ABC$ の外心を O とし, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ となる点 H をとると, H は $\triangle ABC$ の垂心であることを証明せよ。

問題 3 $\triangle ABC$ の外心, 垂心, 重心は1直線上にあることを証明せよ。[ヒント] 前問の結果を利用。

頂角の2等分線と辺の比

定理 25 $\triangle ABC$ において, D を辺 BC 上の点とする。半直線 AD が $\angle A$ の2等分線であるとき, $BD : DC = AB : AC$ 。

証明. $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $BD : DC = m : n$ とする。

D が辺 BC を $m : n$ の比に内分することから $\overrightarrow{AD} = \frac{n\vec{b} + m\vec{c}}{m+n}$

$$\begin{aligned}
&\angle BAD = \angle CAD \text{ より } \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}} \\
&AC(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = AB(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) \\
&|\vec{c}| \left(\vec{b} \cdot \frac{n\vec{b} + m\vec{c}}{m+n} \right) = |\vec{b}| \left(\vec{c} \cdot \frac{n\vec{b} + m\vec{c}}{m+n} \right) \\
&\left(n|\vec{b}| - m|\vec{c}| \right) (\vec{b} \cdot \vec{c} - |\vec{b}||\vec{c}|) = 0 \\
&\vec{b} \text{ と } \vec{c} \text{ は平行ではないので, } \vec{b} \cdot \vec{c} - |\vec{b}||\vec{c}| \neq 0 \\
&\therefore n|\vec{b}| - m|\vec{c}| = 0 \\
&\text{すなわち, } m:n = |\vec{b}|:|\vec{c}| \quad \square
\end{aligned}$$

練習 26 $\triangle ABC$ において, D を辺 BC 上の点とする。 $BD:DC = AB:AC$ のとき半直線 AD は $\angle A$ の 2 等分線であることを示せ。

問題 4 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を零ベクトルでない定ベクトルとする。 t を実数値をとる変数とすると、 $|\mathbf{a} + t\mathbf{b}|$ が最小となるような t の値 t_0 を、 $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を用いて表せ。 また、 このとき、 $\mathbf{b}$ と $\mathbf{a} + t_0\mathbf{b}$ は垂直であることを示せ。 [ヒント] $|\mathbf{a} + t\mathbf{b}|^2$ を最小にする t を求める。

3.2.4 直線の方程式

直線の方程式の一般形 直線は、 $(a, b) \neq (0, 0)$ なる定数 a, b と定数 c を用いて $ax + by + c = 0$ と表せる。

直線上の 1 点 (x_0, y_0) をとって $ax_0 + by_0 + c = 0$ とすると、 $ax + by + c = 0$ は $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ と書き換えることができる。

「直線 $ax + by + c = 0$ 」 と称するとき、 暗黙に $(a, b) \neq (0, 0)$ を仮定する。

Note. 座標平面上の直線の方程式は必ず $ax + by + c = 0$ と表せ、 逆に、 $(a, b) \neq (0, 0)$ であれば、 方程式 $ax + by + c = 0$ が表す図形は直線である。

点と直線の距離

点 $P(x_0, y_0)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離を求める。

点 P から直線に下した垂線の足を H とすると、 $\overrightarrow{PH} = k(a, b)$ となる実数 k がある。

k を具体的に求めれば、 PH の長さが求まる。

H の座標を (x, y) とすると、 $x = x_0 + ak, y = y_0 + bk$ 。

H は直線上の点なので、 $a(x_0 + ak) + b(y_0 + bk) + c = 0$

$$(a^2 + b^2)k = -(ax_0 + by_0 + c) \text{ より } k = \frac{-(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore PH = |k|\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

別解

原点と直線 $ax + by = k$ との距離を求めれば、 平行移動を考えて目的の公式にたどり着ける。 a, b, k がすべて正の数の場合を考える。

直線 $ax + by = k$ と x 軸との交点を A, y 軸との交点を B とすると, 原点を O として, $OA = \frac{k}{a}$, $OB = \frac{k}{b}$ なので, $\triangle OAB = \frac{k^2}{2ab}$ 。O から AB に下した垂線の足を H とすると, $\triangle OAB = \frac{1}{2}AB \cdot OH$ で, $AB = \sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2} = \frac{k\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$ なので, $OH = \frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

3.3 正弦関数, 余弦関数

三角関数の諸公式を, 覚えるものから公式集を見ながら使うものへと考え方の転換を進めることが必須。

振動現象を表すのに正弦・余弦が用いられる。正弦・余弦で表される振動は最も単純なものである。周期性を持つ振動現象は, 複数の正弦・余弦の和で表される。

回転を表す角 (一般角)

原点を端点とする半直線を動径とよぶ。動径 OP の動きを $\angle xOP$ を用いて表す。

動径が 360° を超えて回転するとき, 角を加算して表す。たとえば, 360° を超えてさらに 30° 回転したとき, 400° 回転したという。負の向きの回転の場合も同様。それに合わせ, 正弦・余弦の定義も次のように拡張する。

$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin \theta, \cos(\theta + 360^\circ) = \cos \theta$$

$$\sin(\theta - 360^\circ) = \sin \theta, \cos(\theta - 360^\circ) = \cos \theta$$

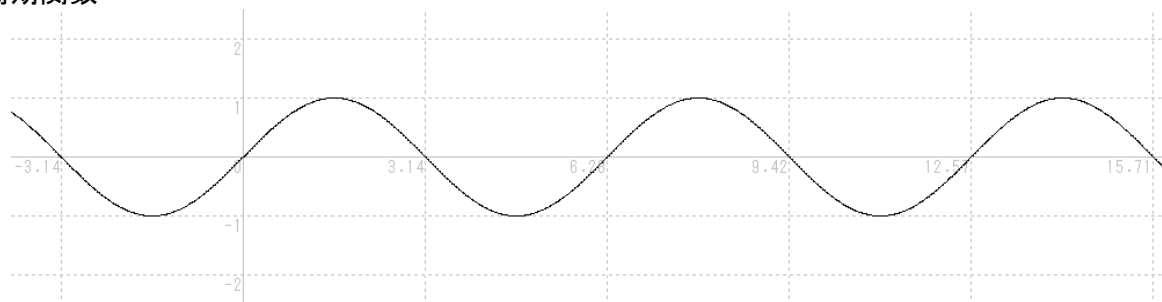
角の大きさの単位

角の大きさを測るのに, **弧度法**が用いられることがある。弧度法は, 角の大きさを, 角の中心を中心とする半径 1 の円を描いたとき, 角によって切り取られる円の弧の長さで表す。単位としてラジアン (radian, rad) を用いるが, 三角比, 三角関数の引数とするととき, 単位名を書かない。

$$1 \text{ ラジアン} = \frac{180^\circ}{\pi}, \text{ すなわち, } \pi \text{ ラジアン} = 180^\circ$$

Note. 弧度法を基準に考えると, $^\circ$ という記号は $\frac{\pi}{180}$ を意味するものと考えることができる。

周期関数



図は, 弧度法で描いた $y = \sin x$ のグラフである。 $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ が成立するから, $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に 2π , あるいは, -2π 平行すると重なる関係にある。このことを, 関数 $y = \sin x$ は 2π を周期とする周期関数であるという。

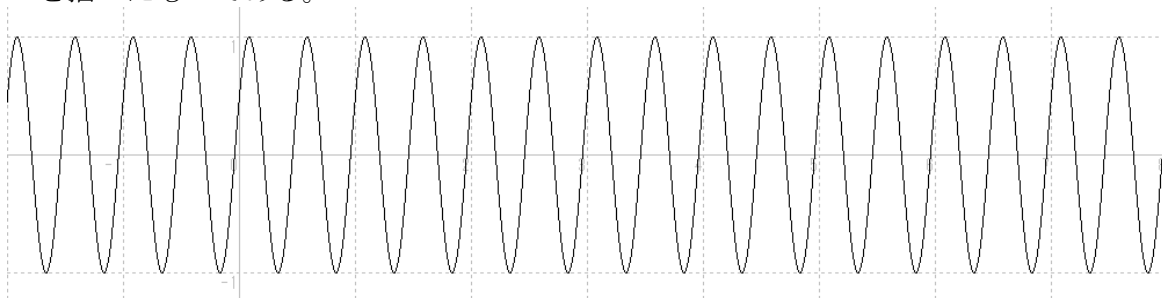
一般に、 $f(x+T) = f(x)$ の関係が成立するような 0 でない正の定数 T があるとき、 f は周期関数であるといい、 T を周期という。ただし、 T が周期であるとき、 $2T, 3T, \dots$ も周期だから、通常、周期のうち、最小のものを周期として指定する。

問 27 次の関数の周期を求めよ。

(1) $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ (2) $y = \sin 2x$ (3) $y = \sin \frac{x}{3}$ [ヒント] グラフを描いてみる。

正弦波

次の図は、横軸を t 、縦軸を y として、 $f = 2, \alpha = \frac{\pi}{6}$ のときの $y = \sin(2\pi ft + \alpha)$ のグラフを描いたものである。



時刻 t の関数として波動が $y = r \sin(2\pi ft + \alpha)$ と表されるとき、 r を振幅 (amplitude)、 f を振動数 (周波数, frequency)、 α を位相 (phase) という。ただし、 r, f は正の数とする。時刻の単位として秒 (second, s) を取るとき、 f は、1 秒あたりの振動の回数を表し、Hz (ヘルツ) を単位とする。なお、位相に言及するとき、その意図は複数の正弦波の位相の違いである。また、波の下端から上端までを振幅ということがあるかもしれない。

また、 $y = r \sin(\omega t + \alpha)$ の形に表すとき、定数 ω を角振動数 (角周波数) という。角振動数 ω と振動数 f の間には、 $\omega = 2\pi f$ の関係がある。

3.3.1 偶関数、奇関数

$-\theta$ の動径は x 軸について θ の動径と対称だから、

$$\cos(-\theta) = \cos \theta, \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

一般に、 $f(-x) = -f(x)$ となる関数を**奇関数**、 $f(-x) = f(x)$ となる関数を**偶関数**という。

たとえば、 $f(x) = x, f(x) = x^3$ は奇関数、定数関数や $f(x) = x^2$ は偶関数である。

3.3.2 正弦と余弦の関係

座標軸を -90° 回転させて、 $\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$

座標軸を 90° 回転させて、 $\cos \theta = \sin(\theta + 90^\circ)$

Note.

直線 $y = x$ に関する対称移動で角 θ の動径は $90^\circ - \theta$ に移るから

$$\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta), \cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$$

補足

余弦は、「余角の正弦」の意味で、余角は、直角から取り去った余りを意味する。つまり、 θ の余角は $90^\circ - \theta$ 。

諸公式との付き合い方

三角関数は公式が多すぎて覚えきれない。上手に整理して少なく覚えて使う学び方を編み出す必要がある。覚えにくい原因の一つは、正弦と余弦で挙動が異なること。たとえば、 $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$ なのに、 $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$ というのは付き合いにくい。

とりあえず、正弦、余弦で挙動が同じ $\theta + 360^\circ, \theta + 180^\circ$ の公式を覚えることにしよう。

$$\sin(\theta \pm 360^\circ) = \sin \theta, \cos(\theta \pm 360^\circ) = \cos \theta$$

$$\sin(\theta \pm 180^\circ) = -\sin \theta, \cos(\theta \pm 180^\circ) = -\cos \theta$$

90° が絡む公式で対称性があるのは、

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$\sin, \cos$ を入れ替えたいときは $90^\circ - \theta$ の形に変形してから実行するのが確実。

$-\theta$ については、正弦と余弦は本質的に異なる。

余弦は偶関数で $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ，正弦は奇関数で $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ 。

だから、 $\cos(\theta - 90^\circ) = \cos(90^\circ - \theta)$ ， $\sin(\theta - 90^\circ) = -\sin(90^\circ - \theta)$ と変形できる。

3.3.3 正弦・余弦の加法定理

余弦の加法定理

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

証明 $\mathbf{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ， $\mathbf{b} = (\cos \beta, \sin \beta)$ の内積を計算する。

補足 $\mathbf{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ， $\mathbf{b} = (\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ の内積を計算すると、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

正弦の加法定理

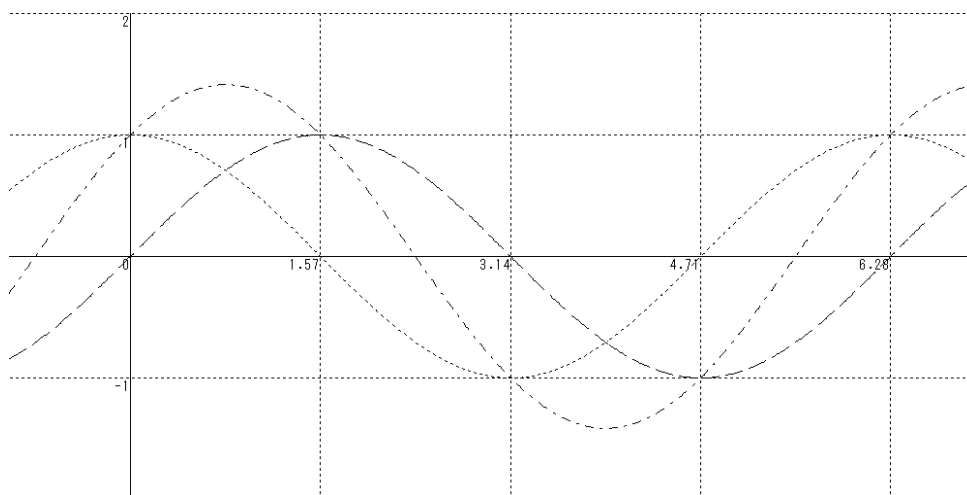
正弦の加法定理は $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta) = \cos(\theta - 90^\circ)$ から導ける。

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha + \beta - 90^\circ) = \cos\{\alpha - (90^\circ - \beta)\} \\ &= \cos \alpha \cos(90^\circ - \beta) + \sin \alpha \sin(90^\circ - \beta) \\ &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

これは、例題 9 (2) の拡張になっている。

3.3.4 単振動の合成 $a \sin \theta + b \cos \theta$

次図は、 $y = \sin x$ (点線)， $y = \cos x$ (破線)， $y = \sin x + \cos x$ (一点鎖線) のグラフである。



$y = \sin x + \cos x$ のグラフも正弦・余弦と似た形をしている。振幅を無視すると、 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ のように読み取れる。 $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ に加法定理を適用して展開すると、

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$$

だから、

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

だといえる。

一般に、 $a \sin \theta + b \cos \theta$ は、定数 r, α を適切に定めることで、 $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形できる。 r, α をどう定めればよいか、調べよう。

加法定理を用いて $r \sin(\theta + \alpha)$ を展開すると、

$$r \sin(\theta + \alpha) = r \cos \alpha \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta$$

となるので、 $a = r \cos \alpha, b = r \sin \alpha$ となるように r, α を定めればよいことがわかる。

この r, α は、点 (a, b) の極座標である。だから、点 (a, b) の偏角を α とすれば、

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha),$$

$$\text{ただし、} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

と変形できる。

補足. $a \cos \theta + b \sin \theta = r \cos(\theta - \beta)$ の変形

$a \cos \theta + b \sin \theta$ は、2つのベクトル $(a, b), (\cos \theta, \sin \theta)$ の内積だから、この2つのベクトルのなす角を β とすると、 $a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \beta)$ と変形できる。たとえば、 $a = 1, b = 1$ のとき、ベクトル $(a, b), (\cos \theta, \sin \theta)$ のなす角は、 $\frac{\pi}{4} - \theta$ なので、 $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ 。

3.3.5 倍角の公式・半角の公式

2倍角の公式

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

余弦の2倍角の公式から

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

正弦の 2 倍角の公式から

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

これらの公式は、正弦・余弦の多項式の次数を下げるのに利用できる。

電流は電圧に比例し、電力は電圧 × 電流なので、電力は電流、または、電圧の 2 乗に比例する。なので、交流理論に正弦・余弦の 2 乗が現れる。

例 28 正弦波交流の電力

$V = V_0 \sin \omega t$ (V) の交流電圧を $R(\Omega)$ の抵抗負荷に印加したときの消費電力 $P(W)$ は、
 $I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t$ より $P = VI = \frac{V_0^2}{R} \sin^2 \omega t = \frac{V_0^2}{2R} \cdot (1 - \cos 2\omega t)$

P は時刻により変動するので、その平均を求める。 $\cos 2\omega t$ の周期は $\frac{\pi}{\omega}$ なので、区間 $[0, \frac{\pi}{\omega}]$ での平均を求める。

$$\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \cos 2\omega t dt = \left[\frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = 0 \text{ なので, } \frac{1}{\frac{\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} P dt = \frac{V_0^2}{2R}$$

この計算結果に基づき、 $V = V_0 \sin \omega t$ の実効電圧を $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$ で定義する（抵抗負荷のとき $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$ V の直流と同じ効果を持つ）。

Note. 同じ周期の正弦波の和は同一周期の正弦波であるが、同じ周期の正弦波の積は周期が半分の（振動数・周波数が 2 倍の）正弦波になる。

例 29 （斜めに投げ上げた物体の到達距離）

初速度 v_0 で水平面に対し θ の角度で投げ上げた物体の t 秒後の位置 x, y は
 $x = v_0 t \cos \theta, y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$

再び水平面に戻る時刻は $y = 0$ とおいて $t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$ 。

このとき、水平方向の移動距離を d とすると、 $d = v_0 \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \cos \theta$

2 倍角の公式から、 $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

水平方向の到達距離 d が最大となるのは、 $\sin 2\theta = 1$ より、 $\theta = 45^\circ$ のとき。

半角の公式

2 倍角の公式で α を $\frac{\theta}{2}$ で置き換えると、

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\text{例 } \cos^2 22.5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \cos 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

この手法を用いて、 $\cos 90^\circ = 0$ を振り出しに、順に、 $\cos \frac{90^\circ}{2^n}$ の計算ができる。

```

10 LET c=0
20 FOR k=1 TO 10
30   LET c=SQR((1+c)/2)
40   PRINT "cos"; 90/2^k; "="; c
50 NEXT k
60 END

```

半径 1 の円に内接する正 2^n 角形の 1 辺の長さは $2 \sin \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{2^n}$ なので、半周分の辺の長さの和は $2^{n-1} \cdot 2 \sin \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{2^n} = 2^n \sin \frac{180^\circ}{2^n}$

$c_n = \cos \frac{180^\circ}{2^n}, s_n = \sin \frac{180^\circ}{2^n}$ とおくと、2 倍角の公式から $\sin \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha}$ であることを用いて、 $c_1 = 0, s_1 = 1, c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}, s_{n+1} = \frac{s_n}{2c_{n+1}}$

この漸化式を用いて、円周率 π の近似値 $2^n \sin \frac{180^\circ}{2^n} = 2^n s_n$ が計算できる。

```

10 LET c=0
20 LET s=1
30 FOR n=2 TO 30
40   LET c=SQR((1+c)/2)
50   LET s=s/2/c
60   PRINT 2^n*s
70 NEXT n
80 END

```

歴史的には次の漸化式が有名。 $2^n \tan \frac{\pi}{2^n}$ は円に外接する正 2^n 角形の半周分の辺の長さの和。 $2^n \sin \frac{\pi}{2^n} \leq \pi \leq 2^n \tan \frac{\pi}{2^n}$ であることを用いて円周率 π の近似値の計算ができる。

2 倍角・半角の公式の他、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ を用いて導ける。

練習 30 $p_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}, q_n = 2^n \tan \frac{\pi}{2^n}$ とするとき、
 $p_2 = 2\sqrt{2}, q_2 = 4, q_{n+1} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}, p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}$ であることを示せ。

3.3.6 和積・積和の公式

積和の公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}\end{aligned}$$

証明 右辺に加法定理を適用する。

和積の公式

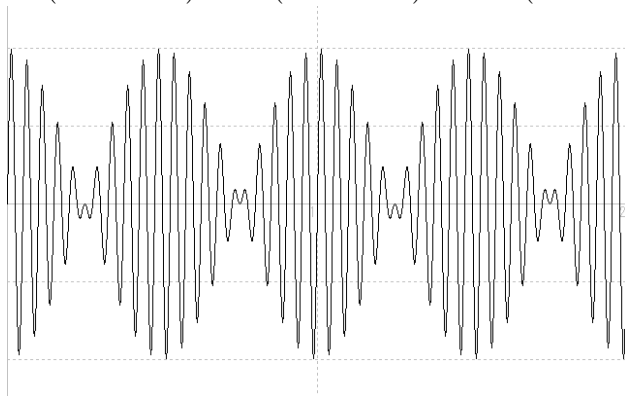
$$\begin{aligned}\sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

証明 右辺に積和の公式を適用する。

うなり

400Hz の正弦波と 402Hz の正弦波を同時に聞くとうなりが聞こえる。うなりが発生する原理は次の式変形で示せる。

$$\sin(2\pi \times 400t) + \sin(2\pi \times 402t) = 2 \sin(2\pi \times 401t) \cos(2\pi \times 1t)$$



定在波

周波数 f 、振幅 A の正弦波が x 軸方向に v (m/秒) の速さで進むとき、時刻 t (秒) における地点 x (m) における値は、 $y = A \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{v}\right)$ の形に表せる。なぜなら、地点 x における値は、 $\frac{x}{v}$ 秒前の $x = 0$ の地点における値なのだから。

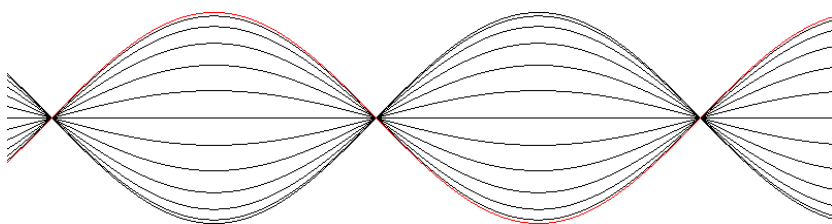
振動数が同じで、逆向きに同じ速さで進む 2 つの波が重なると定在波が発生する。2 つの波の振幅が同じと仮定すると、2 つの波は、

一方を $A \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{v}\right)$ 、他方を $A \sin 2\pi f \left(t + \frac{x}{v} + \alpha\right)$ とすることができる。このとき、

$$A \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{v}\right) + A \sin 2\pi f \left(t + \frac{x}{v} + \alpha\right) = 2A \sin \left\{2\pi f \left(t + \frac{\alpha}{2}\right)\right\} \cos \left\{2\pi f \left(\frac{x}{v} + \frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

この結果は、地点 x において、振幅が $\cos \left\{2\pi f \left(\frac{x}{v} + \frac{\alpha}{2}\right)\right\}$ の正弦波振動が起きていることを示している。

次の図は、横軸を x にとり、同時刻における波形を一つの曲線で描いたものである。



振動が最も弱いところを ^{ふし}節 という。節は $\cos \left\{2\pi f \left(\frac{x}{v} + \frac{\alpha}{2}\right)\right\}$ の点に対応するから、隣

の節との距離を x とすると $2\pi f \frac{x}{v} = \pi$ となり、隣合う節の間隔は $\frac{v}{2f}$ である。 $\frac{v}{f}$ は波長なので、隣合う節の間隔は波長の $\frac{1}{2}$ となる。

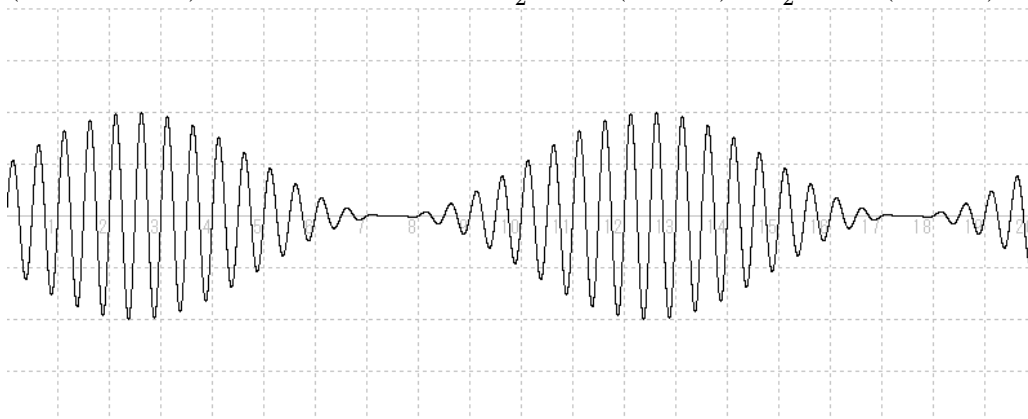
Note.

逆向きの波の典型例は反射波。現実の定在波を調べるときは、反射時に位相がどう変わるかが重大問題。ただし、定在波が存在すれば固定端は節なので、そこから考えていけばよいことも多い。たとえば、両端が固定端のとき、定在波が生じるのは、固定端間の距離が $\frac{1}{2}$ 波長の整数倍のとき。

振幅変調 (AM ラジオ)

中波や短波のラジオ放送で用いられる振幅変調 (amplitude modulation) は、音声信号で搬送波の振幅を、基本の振幅を 1 とするとき、振幅を 1 を中心として 0 倍から 2 倍まで変化させている。波形の上半分を切り取り高周波成分を除去したとき復調できる方式で、搬送波と音声信号の積ではないことに注意。最大限の変調をかけたとき、音声信号の振幅は搬送波の振幅と等しい。搬送波の周波数が f_c のとき、周波数 f_0 の音声信号 (正弦波) で目一杯に変調すると、次の式のようになる。

$$(1 + \sin 2\pi f_0 t) \sin 2\pi f_c t = \sin 2\pi f_c t - \frac{1}{2} \cos 2\pi(f_c + f_0)t - \frac{1}{2} \cos 2\pi(f_c - f_0)t$$



搬送波の周波数が f_c のとき、周波数 f_0 の正弦波で変調すると、 $f_c + f_0$ と $f_c - f_0$ の側波が出現する。つまり、AM ラジオは、音声信号の 2 倍の帯域幅が必要である。

参考 周波数変調 (FM) では、AM よりもはるかに広い側波帯が出現する。なので、FM が中波や短波で用いられることはない。ただし、周波数変調でどのような波が派生するか記述するのは簡単ではない。

3.3.7 2 倍角の公式、半角の公式と幾何図形

三角形の外接円

三角形 ABC の外接円の半径を R 、中心を O とし、 $\angle BOC = \alpha$ 、 $\angle COA = \beta$ 、 $\angle AOB = \gamma$ とする。 $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ に注意。

三角関数の諸公式 (2 倍角, 和 $\rightarrow$ 積) を用いて (円周角の定理によらないで)

$$a = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \quad b = 2R \sin \frac{\beta}{2}, \quad c = 2R \sin \frac{\gamma}{2},$$

$\sin A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2bc}$ から $\sin A = \frac{a}{2R}$ を導くことができる。

$$\begin{aligned} a+b-c &= 2R \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \right) \\ &= 2R \left(2 \sin \frac{\alpha+\beta}{4} \cos \frac{\alpha-\beta}{4} - \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \\ &= 2R \left\{ 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{4} \cos \frac{\alpha-\beta}{4} - 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{4} \cos \frac{\alpha+\beta}{4} \right\} \\ &= 4R \sin \frac{\alpha+\beta}{4} \left(\cos \frac{\alpha-\beta}{4} - \cos \frac{\alpha+\beta}{4} \right) \\ &= 4R \sin \frac{\alpha+\beta}{4} \left(2 \sin \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\beta}{4} \right) = 8R \sin \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\beta}{4} \cos \frac{\gamma}{4} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} a+b+c &= 8R \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\beta}{4} \cos \frac{\gamma}{4} \\ -a+b+c &= 8R \cos \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\beta}{4} \sin \frac{\gamma}{4} \\ a-b+c &= 8R \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\beta}{4} \sin \frac{\gamma}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) &= 8^4 R^4 \sin^2 \frac{\alpha}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{4} \sin^2 \frac{\beta}{4} \cos^2 \frac{\beta}{4} \sin^2 \frac{\gamma}{4} \cos^2 \frac{\gamma}{4} \\ &= 8^2 R^4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = 8R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{abc}{R}$$

$$\therefore \sin A = \frac{a}{2R}$$

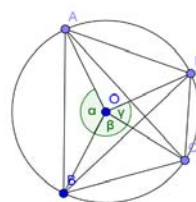
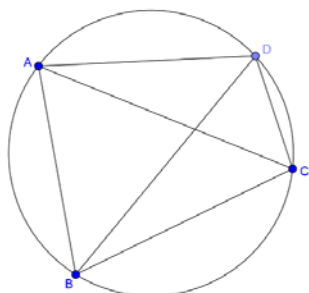
円周角の定理

$\sin A = \frac{a}{2R}$ は, R, a が同じなら $\sin A$ も同じであることを意味するから, 円周角の定理の証明になっている (導出の過程で円周角の定理依存の公式を用いていない)。

また, $a = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$ なので, $\sin A = \sin \frac{\alpha}{2}$
 これは, 円周角 $= \frac{1}{2} \times$ 中心角 を意味する。

トレミーの定理

定理 31 四角形 ABCD が円に内接するとき, $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$



証明. 円の中心を O とし, $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$, $\angle COD = \gamma$ とおく。
 円の直径を 1 として計算する。積和の公式と和積の公式を用いて変形する。

$$\begin{aligned} AB &= \sin \frac{\alpha}{2}, \quad BC = \sin \frac{\beta}{2}, \quad CD = \sin \frac{\gamma}{2} \\ AD &= \sin \frac{2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \\ AC &= \sin \frac{2\pi - (\alpha + \beta)}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad BD = \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \\ AB \cdot CD &= \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \gamma}{2} - \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} \right) \\ AD \cdot BC &= \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \sin \left(\frac{\alpha + \gamma}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \sin \frac{\beta}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha + 2\beta + \gamma}{2} - \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \right) \\ AB \cdot CD + AD \cdot BC &= -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha + 2\beta + \gamma}{2} - \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} \right) \\ &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} = AC \cdot BD \quad \square \end{aligned}$$

別証

$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ とおき, $\triangle ABC$ と $\triangle DAC$ に対し, $\angle B$ と $\angle D$ に余弦定理を適用する。

3.3.8 n 倍角の公式

3 倍角の公式 $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$
 $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

3 倍角の公式は, 加法定理と 2 倍角の公式から導ける。

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta \cos^2 \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \sin \theta \\ &= (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \end{aligned}$$

定規・コンパスによる角の 3 等分

定規・コンパスによる角の 3 等分の問題の解決に 3 倍角の公式が寄与する。

60° の 3 等分, すなわち, 20° の作図ができたとすると, $\cos 20^\circ$ の作図ができる。

3 倍角の公式から $\cos 60^\circ = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ$ なので, $4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ = \frac{1}{2}$ 。

$\cos 20^\circ = x$ とおくと, $8x^3 - 6x - 1 = 0$ 。

だから, 20° の作図ができたとすると, 3 次方程式 $8x^3 - 6x - 1 = 0$ の解の作図ができる。

定規・コンパスで作図できるのは, 円と円, 円と直線, 直線と直線の交点に限るから, 作図で求まる数は加減乗除と平方根に限られる。そこで, 問題が, 3 次方程式 $8x^3 - 6x - 1 = 0$

の解が加減乗除と平方根のみを用いて表せるかという問題に書き換えられる。実際、それは不可能だということが証明されて、定規・コンパスによる角の3等分は（一般には）不可能であることが証明された。

4 倍角の公式

$\cos 2\theta, \cos 3\theta$ は $\cos \theta$ の多項式で表せるのに、 $\sin 2\theta$ は $\sin \theta$ の多項式で表せなかった。 $\sin 4\theta, \cos 4\theta$ はどうなるのだろうか。実際、 $\sin 4\theta$ は $\sin \theta$ の多項式で表せない一方で、 $\cos 4\theta$ は $\cos \theta$ の多項式で表せる。

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= \cos(3\theta + \theta) = \cos 3\theta \cos \theta - \sin 3\theta \sin \theta \\ &= (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) \cos \theta - (3 - 4\sin^2 \theta) \sin^2 \theta \\ &= (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) \cos \theta - (4\cos^2 \theta - 1)(1 - \cos^2 \theta) \\ &= 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1\end{aligned}$$

今度は、 $\sin 4\theta$ について考える。

$\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$ は $\sin \theta$ を因数として持つ。

$\sin 3\theta = \sin \theta(3 - 4\sin^2 \theta) = \sin \theta(4\cos^2 - 1)$ と変形すると、 $\sin \theta \times (\cos \theta$ の多項式) の形をしているのがわかる。

$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta \cos 2\theta = 4\sin \theta \cos \theta(2\cos^2 \theta - 1)$ だから、 $\sin 4\theta$ もまた、 $\sin \theta \times (\cos \theta$ の多項式) の形をしているのがわかる。

n 倍角の公式

n を自然数として、 $\sin n\theta = \sin \theta \times (\cos \theta$ の多項式), $\cos n\theta = (\cos \theta$ の多項式) であることが数学的帰納法を用いて示せる。

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\theta &= \sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta \\ &= \sin \theta \times (\cos \theta \text{ の多項式}) + (\cos \theta \text{ の多項式}) \sin \theta = \sin \theta \times (\cos \theta \text{ の多項式}) \\ \cos(n+1)\theta &= \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \\ &= (\cos \theta \text{ の多項式}) \times \cos \theta - \sin \theta \times (\cos \theta \text{ の多項式}) \times \sin \theta = (\cos \theta \text{ の多項式})\end{aligned}$$

さらに、その多項式を具体的に求めてみよう。

$A_n(x), B_n(x)$ を、 $\sin n\theta = A_n(\cos \theta) \sin \theta$, $\cos n\theta = B_n(\cos \theta)$ となる多項式とする。

$$A_1(x) = 1, B_1(x) = x.$$

$$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta \text{ より, } A_2(x) = 2x$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 \text{ より, } B_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$\sin 3\theta = \sin \theta(4\cos^2 - 1) \text{ より, } A_3(x) = 4x^2 - 1$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \text{ より, } B_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$\sin 4\theta = 4\sin \theta(2\cos^2 \theta - \cos \theta) \text{ より, } A_4(x) = 8x^3 - 4x$$

$$\cos 4\theta = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1 \text{ より, } B_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\theta &= \sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta \\ &= A_n(\cos \theta) \sin \theta \cos \theta + B_n(\cos \theta) \sin \theta = \{A_n(\cos \theta) \cos \theta + B_n(\cos \theta)\} \sin \theta\end{aligned}$$

$$\therefore A_{n+1}(x) = xA_n(x) + B_n(x)$$

$$\begin{aligned}\cos(n+1)\theta &= \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta = B_n(\cos \theta) \cos \theta - A_n(\cos \theta) \sin \theta \sin \theta \\ &= B_n(\cos \theta) \cos \theta + A_n(\cos \theta) (\cos^2 \theta - 1)\end{aligned}$$

$$\therefore B_{n+1}(x) = (x^2 - 1)A_n(x) + xB_n(x)$$

$n = 5, 6, 7$ について計算してみると,

$$A_5(x) = xA_4(x) + B_4(x) = x(8x^3 - 4x) + 8x^4 - 8x^2 + 1 = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$B_5(x) = (x^2 - 1)A_4(x) + xB_4(x) = (x^2 - 1)(8x^3 - 4x) + x(8x^4 - 8x^2 + 1) \\ = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$\therefore \sin 5\theta = \sin \theta(16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1) = 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta$$

$$\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$$

$$A_6(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

$$B_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$A_7(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$

$$B_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

チェビシェフ多項式

漸化式

$$A_1(x) = 1, B_1(x) = x$$

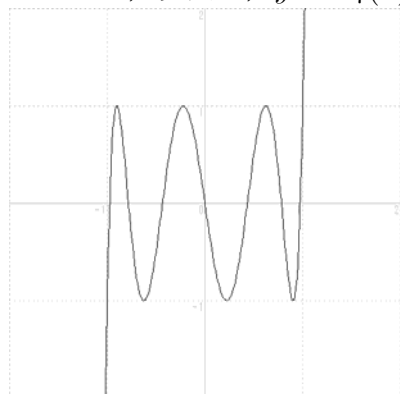
$$A_{n+1}(x) = xA_n(x) + B_n(x)$$

$$B_{n+1}(x) = (x^2 - 1)A_n(x) + xB_n(x)$$

で定まる多項式 $B_n(x)$ を**チェビシェフ多項式**という。

$\cos n\theta = B_n(\cos \theta)$ なので, $-1 \leq x \leq 1$ のとき, $-1 \leq B_n(x) \leq 1$ 。

たとえば, 次図は, $y = B_7(x)$ のグラフ。



高次多項式で関数を近似するとき, チェビシェフ多項式の根で値が一致する多項式を使うと誤差のばらつきが均等になるので, 近似式を作るのに利用される。

3.4 空間ベクトル

原点との距離

まず, 点 $P(x, y, z)$ と原点 $O(0, 0, 0)$ との距離を求めよう。

点 P から xy 平面に下した垂線の足を Q とすると, 点 Q の座標は $(x, y, 0)$ なので, $OQ^2 = x^2 + y^2$ 。また, $PQ = |z|$ 。三角形 OPQ において辺 OQ と辺 PQ は垂直なので, $OP^2 = OQ^2 + PQ^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\therefore OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2 点間の距離

原点との距離と同様に計算すると、次が得られる。

2 点 $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ に対し, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

3.4.1 3次元ベクトル

3次元ベクトルを2次元のときと同様に定義する (詳細を省く)。

命題 32 (コーシー・シュワルツの不等式) $-|a||b| \leq a \cdot b \leq |a||b|$

証明. $|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2 \geq 0$ を示す。 $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ とする。

$$\begin{aligned} |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3 \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 \geq 0 \quad \square \end{aligned}$$

3.4.2 幾何ベクトル

点 P の座標が (a_1, a_2, a_3) であるとき, 座標を成分とするベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)$ を点 P の座標ベクトルという。

点 P の座標ベクトルが a であることを $P(a)$ で表す。

定義 33 2 点 $A(a), B(b)$ に対し, $\overrightarrow{AB} = b - a$

平行なベクトル

零ベクトルでない2つのベクトル a, b について, $a = kb$ となる0でない実数 k があるとき, a と b は平行であるといい, $a // b$ で表す。

$a = kb$ となる0でない実数 k があるとき, $b = \frac{1}{k}a$ だから, $a // b \Leftrightarrow b // a$ である。

Note. 零ベクトルはどのベクトルとも平行でないものとする。

直線の平行とベクトルの平行

4 点 A, B, C, D について, $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ であるとき, 直線 AB と直線 CD は一致するか, または, 四角形 $ABDC$ は平行四辺形。

3.4.3 直線の方程式

点 P が直線 AB 上にあるための条件は, $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ となる実数 t があることである。

例題 34 次の2点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

(1) $A(1, 2, 3), B(4, 5, 1)$

(2) $A(2, 4, 3), B(2, 2, 6)$

(3) $A(2, 4, 3), B(2, 4, 1)$

解 (1) 直線上の任意の点を $P(x, y, z)$ とすると, $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ となる実数 t がある。

よって, $x - 1 = 3t$, $y - 2 = 3t$, $z - 3 = -2t$ 。 t を消去して,

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-2}$$

(2) 直線上の任意の点を $P(x, y, z)$ とすると, $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ となる実数 t がある。

よって, $x - 2 = 0$, $y - 4 = -2t$, $z - 3 = 3t$ 。 t を消去して,

$$x = 2, \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{3}$$

(3) 直線上の任意の点を $P(x, y, z)$ とすると, $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ となる実数 t がある。

$x - 2 = 0$, $y - 4 = 0$, $z - 3 = -2t$ より,

$$x = 2, y = 4, z \text{ は任意。}$$

問題 5 次の 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

(1) A(2, 2, 1), B(4, 3, 2) (2) A(3, 4, 3), B(2, 4, 1) (3) A(1, 4, 3), B(2, 4, 3)

命題 35 $\mathbf{v} = (a, b, c)$ に平行で点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

ただし, 分母が 0 のときは分子も 0 であると解釈する。

上の直線について, $\mathbf{v}$ をこの直線の方角ベクトルという。

練習 36 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ のとき, 2 点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ を通る直線の方程式は $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ であることを示せ。

練習 37 次の 2 直線が交わるかどうか調べよ。

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}, \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$$

[ヒント] 第 1 式, 第 2 式をそれぞれ, t, u とおき, 2 直線の交点を求める。

練習 38 次の 2 直線が交わるかどうか調べよ。

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}, \quad \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$$

分点の位置ベクトル

線分 AB を $m : n$ の比に分ける点を P とすると, $\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$ だから,

A, B, P の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ とすると, $\mathbf{p} = \frac{n}{m+n}\mathbf{a} + \frac{m}{m+n}\mathbf{b}$ である。

直線の方程式

直線 AB 上の任意の点を P とすると, $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ となる実数 t が存在するから,

A, B, P の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ とすると, $\mathbf{p} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ である。

3.4.4 ベクトルのなす角

零ベクトルでない2つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対し, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ となる2点 A, B をとるとき $\angle AOB$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角という。

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が平行でないとき,

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ とすると, 余弦定理より $\cos \theta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB}$
 内積の計算公式から $OA^2 + OB^2 - AB^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ なので,
 $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

この結果は, $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ の場合にも正しいから次の命題が成立する。

命題 39 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ とすると, $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

ベクトルの垂直条件

命題 40 (ベクトルの垂直条件) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ がいずれも零ベクトルでないとき

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ のなす角} = 90^\circ$$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ のとき $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は垂直であるといい, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ で表す。零ベクトルは任意のベクトルと垂直だと考える。

練習 41 点 (1,4,0) から直線 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ に下ろした垂線の足の座標を求めよ。

[ヒント] $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2} = t$ とおくと, $x = 1 + 3t, y = 2 + t, z = 3 - 2t$

垂線の足を $(1 + 3t_0, 2 + t_0, 3 - 2t_0)$ とおく。

問題 6 4点 O, A, B, C があって, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CA}$ ならば $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$ であることを示せ。

☆ 前問は, 三垂線の定理と呼ばれる定理の一部。空間認知に必要な思考法である。

3.4.5 平面の方程式

1 直線上にない3点が定める平面

1直線上にない3点 A, B, C があるとき, 点 P がこれら3点が定める平面上にあるための必要十分条件は, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ となる実数 λ, μ が存在することである。

例題 42 3点 A(1, 1, -1), B(-1, 3, 3), C(1, 5, 0) を通る平面の方程式を求めよ。

解. 平面上の任意の点を $P(x, y, z)$ とすると, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ となる実数 λ, μ が存在する。

$$\overrightarrow{OP} = (1 - \lambda - \mu)\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} + \mu \overrightarrow{OC} \text{ より}$$

$$x = (1 - \lambda - \mu) + (-1)\lambda + \mu = 1 - 2\lambda \quad \text{①}$$

$$y = (1 - \lambda - \mu) + 3\lambda + 5\mu = 1 + 2\lambda + 4\mu \quad ②$$

$$z = -(1 - \lambda - \mu) + 3\lambda = -1 + 4\lambda + \mu \quad ③$$

$$①, ② \text{より } \lambda \text{ を消去して } x + y = 2 + 4\mu \quad ④$$

$$①, ③ \text{より } \lambda \text{ を消去して } 2x + z = 1 + \mu \quad ⑤$$

$$④, ⑤ \text{から } \mu \text{ を消去して } 7x - y + 4z = 2 \quad ⑥$$

逆に, ⑥を満たす x, y, z に対し, ⑤より μ を定め, さらに③を満たすように λ を定めれば①～③が成立する。

よって, 3点 A, B, C を通る平面の方程式は $7x - y + 4z = 2$ □

平面の方程式の一般形

例題 43 方程式 $x + y - z = 1$ が表す図形について調べたい。

(1) 3点 A(0,0,1), B(0,2,3), C(2,1,4) は図形 $x + y - z = 1$ 上の点であることを示せ。

(2) 3点 A(0,0,1), B(0,2,3), C(2,1,4) が定める平面の方程式を求めよ。

空間における平面は, $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ である 3 数 a, b, c を用いて $ax + by + cz = d$ の形に表せ, 逆に, $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ であるとき, 方程式 $ax + by + cz = d$ が表す図形は, 平面である。

練習 44 3点 A($a, 0, 0$), B($0, b, 0$), C($0, 0, c$) を通る平面の方程式を求めよ。ただし, a, b, c はいずれも 0 でないものとする。

例題 45 O(0,0,0), A(2,0,0), B(2,2,0), C(0,2,0), D(0,0,2), E(2,0,2), F(2,2,2), G(0,2,2) を頂点とする立方体 OABC-DEFG を考える。辺 OA, OC, EF の各中点 L(1,0,0), M(0,1,0), N(2,1,2) を通る平面を α とする。

(1) 平面 α の方程式を求めよ。

(2) α と辺 AE との交点を求めよ。

(3) α と辺 BF は交わらないことを示せ。

(4) α と辺 AE の交点を P, 辺 FG との交点を Q, 辺 CG との交点を R とするとき, 6 角形 LPNQRM は正 6 角形であることを示せ。

解. (1) α の方程式を $ax + by + cz = d$ とすると,

$a = d, b = d, 2a + b + 2c = d$ より, $d = 2$ と定めることで,

α の方程式は, $x + y - z = 1$

(2) 辺 AE の方程式は, $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AE}$ ($0 \leq k \leq 1$)

$\overrightarrow{AE} = (0, 0, 2)$ なので, $x = 2, y = 0, z = -2k$

α との交点を求めると, $2 - 2k = 1$ より $k = \frac{1}{2}$ 。

このとき, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = (2, 0, 1)$

辺 AE と α は点 (2, 0, 1) で交わる。

(3) 辺 BF の方程式は, $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BF}$ ($0 \leq k \leq 1$)

$\overrightarrow{BF} = (0, 0, 2)$ なので, $x = 2, y = 2, z = 2k$

α と直線 BF の交点を求めると, $2 + 2 - 2k = 1$ より $k = \frac{3}{2}$

だから、辺 BF は α と交わらない。

(4) 各点の座標を求めると、 $P(2,0,1)$, $Q(1,2,2)$, $R(0,2,1)$ 。

$$LP=PN=NQ=QR=RM=\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{PL} \cdot \overrightarrow{PN} = -1 \text{ なので, } \cos \angle LPN = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle LPN = 120^\circ$$

同様にして、6 角形 LPNQRM の各頂角は 120° であることが示せる。□

平面の法線ベクトル

例題 46 $\mathbf{n} = (3, -2, 1)$ とする。点 $A(4, 2, 5)$ に対し、 $\overrightarrow{AP} \perp \mathbf{n}$ となる点 P の軌跡を求めよ。

解. 点 P の座標を (x, y, z) とする。

$$\overrightarrow{AP} \perp \mathbf{n} \text{ より } 3(x-4) - 2(y-2) + 5(z-1) = 0$$

$$\text{すなわち, } 3x - 2y + 5z = 15$$

答 直線 $3x - 2y + 5z = 15$ □

平面 $ax + by + cz = d$ に対し、 $\mathbf{n} = (a, b, c)$ を法線ベクトルという。

法線ベクトルは、平面内のいずれの直線とも垂直である。

問題 7 $\mathbf{n} = (a, b, c)$ を零でないベクトルとする。 $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ を平面 $ax + by + cz = d$ 上の異なる 2 点とするとき、 $\overrightarrow{AB} \perp \mathbf{n}$ であることを示せ。

0 でないベクトル $\mathbf{u}$ が平面 α の法線ベクトルであるとは、平面 α 上の任意の 2 点 P, Q に対して $\mathbf{u} \perp \overrightarrow{PQ}$ となることをいう。

問題 8 1 直線上にない 3 点 A, B, C があるとき、 $\mathbf{u} \perp \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{u} \perp \overrightarrow{BC}$ となる **0** でないベクトル $\mathbf{u}$ は 3 点 A, B, C が定める平面の法線であることを示せ。

問題 9 平面の法線ベクトルの向きは一意的に定まる。すなわち、 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が 3 点 A, B, C が定める平面の法線ベクトルであれば $\mathbf{u} // \mathbf{v}$ であることを示せ。

問題 10 平面 $ax + by + cz + d = 0$ の法線ベクトルは (a, b, c) である。
(平行なベクトルのうちのひとつで代表させて、平面の法線ベクトルという。)

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ であるとき、2 直線 AB, CD は垂直であるという。(ねじれの位置にある場合を含むことに注意)

直線 l が平面 α と垂直であるとは、 l が α 上の任意の直線と垂直であることをいう。

問題 11 直線が平面と垂直であるための必要十分条件は、直線の方法ベクトルと平面の法線ベクトルが平行となることである。

問題 12 平面 $ax + by + cz + d = 0$ と原点との距離 (原点 O から平面に下ろした垂線 OH の長さ) は $\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ である。[ヒント] $\overrightarrow{OH} = k(a, b, c)$ とおくことができる。

問題 13 平面 $ax + by + cz + d = 0$ と点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ との距離は $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ である。

3.4.6 直線と平面

問題 14 点 $(1, 2, 3)$ を通り, 平面 $2x - 3y + 5z = 0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

問題 15 2 平面 $x + y + z = 3, x + 2y + 3z = 6$ の交線の方程式を求めよ。[ヒント] 交線は 2 平面の共通部分。

問題 16 2 平面 $x + y = 1, 2y + z = 1$ の交線を含み, 原点を通る平面の方程式を求めよ。
[ヒント] 平面 $k(x + y - 1) + (2y + z - 1) = 0$ は 2 平面の交線を含む。

3.4.7 ベクトルの外積 (ベクトル積)

問題 17 零ベクトルでなく, 平行でもない 2 つのベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し, いずれとも垂直なベクトルを求めよ。

解. $\mathbf{v} = (x, y, z)$ について, $|\mathbf{v}| = 1, \mathbf{a} \perp \mathbf{v}, \mathbf{b} \perp \mathbf{v}$ とする。

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{v} \text{ より } a_1x + a_2y + a_3z = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\mathbf{b} \perp \mathbf{v} \text{ より } b_1x + b_2y + b_3z = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

z を消去する。

$$\textcircled{1} \times b_3 \quad a_1b_3x + a_2b_3y + a_3b_3z = 0 \quad \dots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} \times a_3 \quad a_3b_1x + a_3b_2y + a_3b_3z = 0 \quad \dots \textcircled{2}'$$

$$\textcircled{1}' - \textcircled{2}' \quad (a_1b_3 - a_3b_1)x + (a_2b_3 - a_3b_2)y = 0 \quad \textcircled{3}$$

y を消去する。

$$\textcircled{1} \times b_2 \quad a_1b_2x + a_2b_2y + a_3b_2z = 0 \quad \dots \textcircled{1}''$$

$$\textcircled{2} \times a_2 \quad a_2b_1x + a_2b_2y + a_2b_3z = 0 \quad \dots \textcircled{2}''$$

$$\textcircled{1}'' - \textcircled{2}'' \quad (a_1b_2 - a_2b_1)x + (a_3b_2 - a_2b_3)z = 0 \quad \textcircled{4}$$

$a_3b_2 - a_2b_3 \neq 0$ のとき

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より } y = \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_2b_3 - a_3b_2}x, \quad z = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2b_3 - a_3b_2}x$$

$$x : y : z = 1 : \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_2b_3 - a_3b_2} : \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

すなわち, $x : y : z = a_2b_3 - a_3b_2 : a_3b_1 - a_1b_3 : a_1b_2 - a_2b_1$

$a_1b_3 - a_3b_1 \neq 0$ のときと, $a_2b_1 - a_1b_3 \neq 0$ のときも, 同様に

$$x : y : z = a_2b_3 - a_3b_2 : a_3b_1 - a_1b_3 : a_1b_2 - a_2b_1$$

ところで, $a_3b_2 - a_2b_3 \neq 0, a_1b_3 - a_3b_1 \neq 0, a_2b_1 - a_1b_3 \neq 0$ のうち, 少なくとも一つはなりたつ。

なぜかという, $a_3b_2 - a_2b_3 = 0, a_1b_3 - a_3b_1 = 0, a_2b_1 - a_1b_3 = 0$ とすると,

$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$ となつて, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が平行でないことに反するから。

そこで, 次の結論が得られる。

答 k を任意の実数として, $k(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ □

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ を基本ベクトルという。

$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ となるように上の問題の解の定数 k を定め, ベクトルの外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を次のように定義する。

定義 47 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ で $ad - bc$ を表す約束をすると

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

と書ける。

Note. 行列を学ぶと, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき, $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ である。

命題 48 外積について次の法則が成立する。(k は実数)

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
- (2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- (3) $(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
- (4) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- (5) $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$

問題 18 上の命題を証明せよ。

問題 19 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のいずれとも垂直なベクトルである。

問題 20 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を θ とすると, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ である。

問題 21 3 点 $O(0, 0, 0), A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ の座標を用いて $\triangle OAB$ の面積を求める公式を作れ。

問題 22 交わる 2 直線 $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{4}, \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-5}$ を含む平面の法線ベクトルを求めよ。

ベクトルの外積は, 電磁気学の記述言語として用いられ, 重要な役割を担っている。

例 49 (磁界を運動する荷電粒子が受ける力)

磁界を運動する荷電粒子が受ける力は, その向きは荷電粒子の運動と磁界のいずれにも垂直で, その大きさは, 荷電粒子の速さと磁界の大きさの積に, 荷電粒子の運動と磁界となす角の正弦を掛けたものに比例する。すなわち, 磁束密度 $\mathbf{B}$ の磁界を速度 $\mathbf{v}$ で運動する電荷 q は, $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の力を受ける。(磁界の強さを表す磁束密度 $\mathbf{B}$ は, この公式で比例定数が 1 となるように定められている。)

3.5 軌跡・二次曲線

同値な方程式

$a \geq 0, b \geq 0$ のとき, $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

なぜなら, $a^2 - b^2 = 0$ とすると, $(a - b)(a + b) = 0$ より, $a - b = 0$ または $a + b = 0$ 。
 $a + b = 0$ のとき, $a \geq 0, b \geq 0$ より $a = b = 0$ 。

円

点 (x_0, y_0) を中心とする半径 r の円の方程式は, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

例題 50 三角形 ABC の頂点を通る円

円の方程式が, $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ の形に表せることを利用すると, a, b, c に関する 3 元連立一次方程式を解く問題になる。この円の中心を求めると三角形の外心が求まる。

放物線 準線 l と焦点 F からの距離が等しい点の軌跡を放物線という。

準線が $x = -p$, 焦点が $(p, 0)$ の放物線の方程式は $y^2 = 4px$ 。

放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は $y_0 y = 2p(x + x_0)$

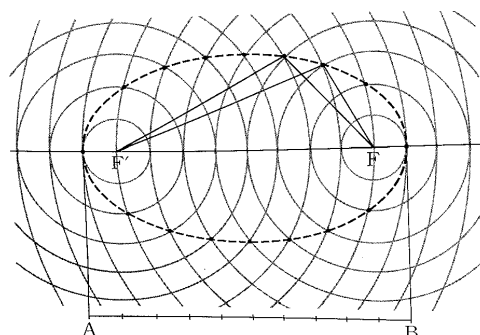
例題 51 焦点が F である放物線上の点 P における接線が軸と点 T で交わるとき, $FP = FT$ である。

この事実から, 放物面鏡が軸に平行な光線や電波を焦点に集めることが説明できる。

楕円

定理 52 $a > c > 0$ のとき, 2 点 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ に対し $PF + PF' = 2a$ である点の軌跡は,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$



証明. 2 焦点からの距離の和が $2a$ である点を $P(x, y)$ とすると,

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a \quad (1)$$

これを

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

と変形し、2乗して簡単にすると、

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx \quad (2)$$

これをさらに2乗して整理し、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (3)$$

逆に、点 $P(x, y)$ を (3) を満たす点とすると、 $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ だから、 $-a \leq x \leq a$

$a \geq x, a > c \geq 0$ より、 $a^2 \geq cx$ 、すなわち $a^2 - cx \geq 0$ だから (2)、

すなわち $FP = a - \frac{c}{a}x$ が成立する。

同様に、 $F'P = a + \frac{c}{a}x$ もいえるので、 $FP + F'P = 2a$ 、すなわち (1) が成立する。□

注意 53 上の証明から、 $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$ である。なぜなら、 $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ 。

注意 54 上の証明は2次曲線の特長事情に依存している。 $F'P = a + \frac{c}{a}x$ を利用せずに、逆にたどる方針でいく場合、(2) から (1) を導くのに、 $2a \geq \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ を示す必要がある。それは、(3) から $y^2 \leq a^2 - c^2$ なので、 $(x-c)^2 + y^2 \leq (x-c)^2 + a^2 - c^2 = x^2 - 2cx + a^2 \leq a^2 - 2cx + a^2 = 2(a^2 - cx) \leq 2(a^2 + ca) \leq 2(a^2 + a^2) = 4a^2$ となることを利用して示せる。

定理 55 $e = \frac{c}{a}$ とおくとき、楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ は、直線 $x = \frac{a}{e}$ と点 $F(c, 0)$ とからの距離の比が e である点の軌跡である。

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ 上の点を $P(x_0, y_0)$ とするとき $FP = a - \frac{c}{a}x_0$ 、 $F'P = a + \frac{c}{a}x_0$ であることから、次の定理が示せる。

定理 56 点 $F(c, 0)$ 、 $F'(-c, 0)$ を焦点とする楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ 上の点 P における接線と長軸 (x 軸) との交点を T とするとき、 $FP : F'P = FT : F'T$ である。

この定理と次の定理は、楕円の方の焦点から出た光が楕円面で反射するともう一方の焦点に届くことの根拠になる。

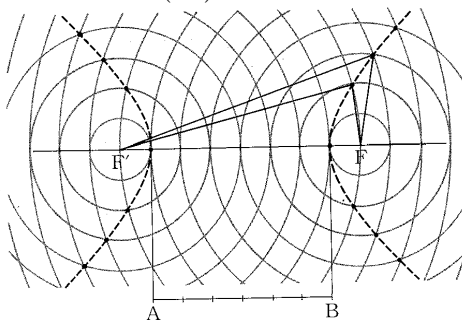
定理 57 三角形 ABC において、辺 BC 上に点 P があって $AB : AC = BP : CP$ であるとき、 AP は頂角 A の2等分線であり、辺 BC の延長上に点 Q があって、 $AB : AC = BQ : QC$ であるとき、 AQ は頂角 A の外角の2等分線である。

初等幾何的に平行線あるいは垂線を用いて証明できるが、ベクトルを用いて証明することもできる。

☆2次曲線について多くの定理が得られるが、GeoGebra 等、コンピュータ利用で検証可能。ただし、証明には数式の計算が必要。面倒な数式の計算には数式処理ソフトの援用が望まれる。

双曲線

2 定点 F, F' からの距離の差が一定 ($2a$) である点の軌跡を**双曲線** (hyperbola) といい、



F, F' をその**焦点**という。

焦点 F, F' を通る直線、あるいは、その直線と曲線との交点を結ぶ線分を**主軸**という。

定理 58 主軸を x 軸に、 F, F' の座標をそれぞれ $(c, 0), (-c, 0)$ とする ($c > a > 0$)。このとき、 $|PF - PF'| = 2a$ を満たす点の軌跡である双曲線の方程式は、

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ただし, } b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

問 59 $|PF - PF'| = 2a$ であるとき、 $FP = |a - \frac{c}{a}x|$ であることを示せ。

問 60 $FP = |a - \frac{c}{a}x|$ であるとき、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ となることを示せ。

問 61 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ であるとき、 $FP = |a - \frac{c}{a}x|$, $F'P = |a + \frac{c}{a}x|$ となることを示せ。

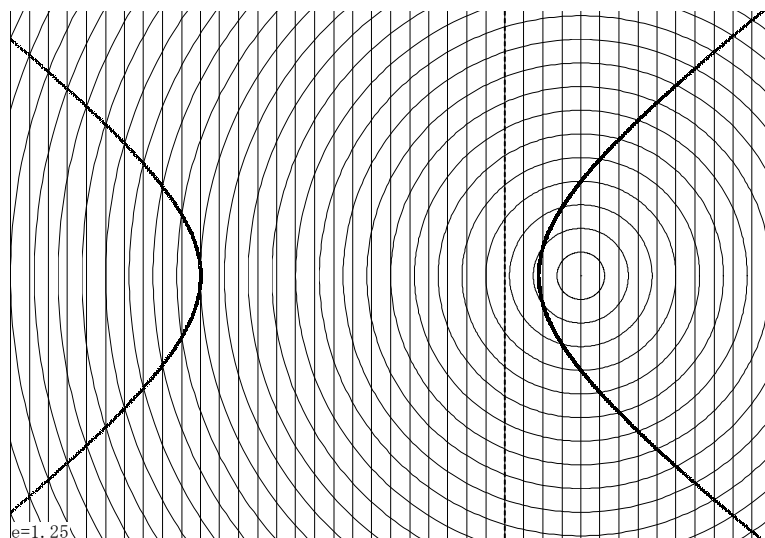
問 62 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, c > a > 0$ であるとき、 $|x| \geq a$ であることを示せ。

問 63 $x \geq a, c > a > 0$ であるとき、 $a - \frac{c}{a}x < 0$, すなわち、 $|a - \frac{c}{a}x| = \frac{c}{a}x - a$ であることを示せ。

問 64 $x \leq -a, c > a > 0$ であるとき、 $a + \frac{c}{a}x < 0$, すなわち、 $|a + \frac{c}{a}x| = -\frac{c}{a}x - a$ であることを示せ。

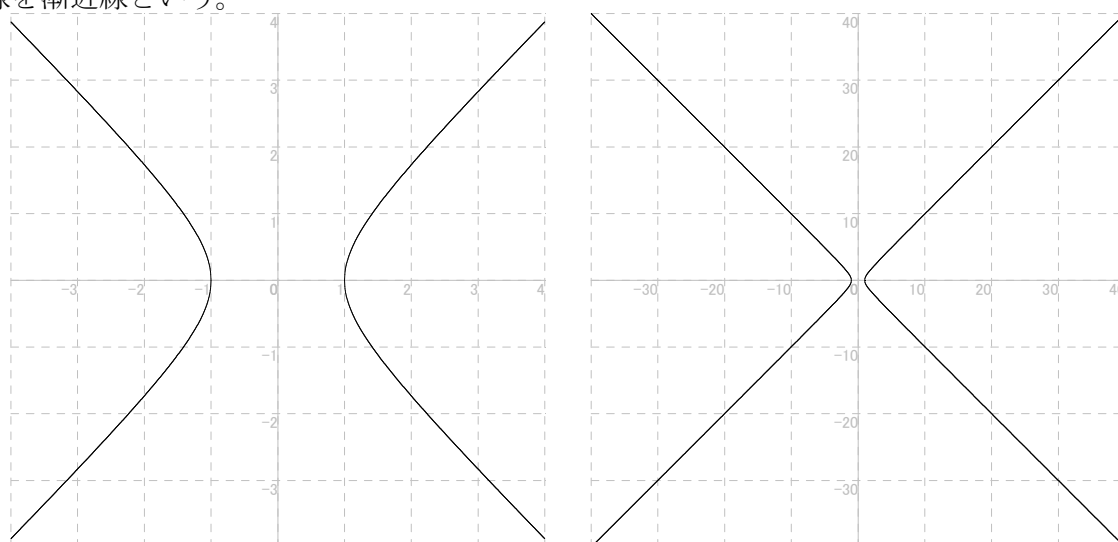
問 65 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, c > a > 0$ であるとき、 $x > 0$ ならば $F'P - FP = 2a$, $x < 0$ ならば $FP - F'P = 2a$ であることを示せ。

定理 66 $e = \frac{c}{a}$ とおくとき、双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$ は、直線 $x = \frac{a}{e}$ と点 $F(c, 0)$ とからの距離の比が e である点の軌跡である。



漸近線

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を遠方からのぞむと 2 直線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ とほぼ重なる。この 2 直線を漸近線という。



双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ をスケールを変えて描いてみた。

接線

2 次曲線の接線は 2 次式の判別式を用いて定義できるけれども、光学的な性質を議論するときは、局所的に直線とみなす微分法による定義が合理的。

定理 67 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は、 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ である。

証明. $x_0 \neq \pm a$ のとき。

このとき、 (x_0, y_0) の近くで曲線を $y = f(x)$ の形に書くことができる。

具体的には、 $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ または $f(x) = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

$$g(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{\{f(x)\}^2}{b^2} \text{ とおくと, } g'(x) = \frac{2x}{a^2} + \frac{2f(x)f'(x)}{b^2}.$$

$$g(x) = 1 \text{ より } g'(x) = 0 \text{ なので, } f'(x) = -\frac{b^2 x}{a^2 f(x)}$$

$$(x_0, y_0) \text{ における接線は, } y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$

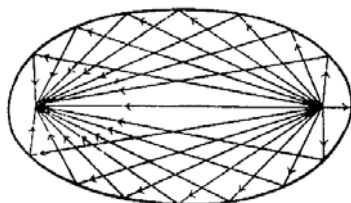
$$\frac{y_0(y - y_0)}{b^2} + \frac{x_0(x - x_0)}{a^2} = 0$$

$$\frac{y_0 y}{b^2} + \frac{x_0 x}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$$

$$\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2} = 1 \text{ なので, } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

$x_0 = \pm a$ のときは, 曲線を $x = f(y)$ の形に書いて考えると同じ結論が得られる。□

問題 23 点 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ を焦点とする楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ における接線と長軸 (x 軸) との交点を T とするとき, $FP : F'P = FT : F'T$ であることを証明せよ。[ヒント] $FP = a - \frac{c}{a}x_0$, $F'P = a + \frac{c}{a}x_0$



3.5.1 いろいろな曲線 (軌跡)

例 68 (アポロニウスの円) 異なる 2 点 A, B に対し, $AP:PB=4:3$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

例題 69 (楕円) 線分 AB は長さが 7 で, 点 A は x 軸上を動き, 点 B は y 軸上を動く。このとき, 線分 AB を 3:4 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

例題 70 放物線 $y = x^2$ を原点を中心として 2 倍に拡大して得られる曲線の方程式を求めよ。

☆この例題と同様にして, 放物線はすべて相似であることを示せる。

3.6 行列

3.6.1 回転

点 $P(x, y)$ を原点を中心に α だけ回転して得られる点を $Q(x', y')$ とする。

点 P の極座標を考えて, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とすると,

$$x' = r \cos(\theta + \alpha), y' = r \sin(\theta + \alpha)$$

加法定理を用いて変形すると

$$x' = r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = r \sin \theta \cos \alpha + r \cos \theta \sin \alpha = y \cos \alpha + x \sin \alpha$$

3.6.2 行列による回転の表現

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

を

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

で表す。() 内に数を 2 次元的に配置したものを**行列**といい、横方向の数の並びを**行**、縦方向の数の並びを**列**という。

回転を表す方程式

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

を行列を用いて表すと、

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.7 行列と一次変換

3.7.1 一次変換

2 数の組 (x, y) に 2 数の組 (x', y') を対応させる変換で、

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

と表すことができるものを一次変換という。

回転は一次変換であるが、原点を中心とする拡大・縮小や、原点を通る直線に関する対称移動も一次変換である。

例 71 直線 $ax + by = 0$ に関する対称移動 (ただし, $(a, b) \neq (0, 0)$ とする)。

点 $P(x, y)$ が点 $Q(x', y')$ に移るとき、直線 PQ は直線 $ax + by = 0$ と直交し、 PQ の中点は直線 $ax + by = 0$ 上にあるので、

$$(x' - x, y' - y) \perp (b, -a) \quad (1)$$

$$a \cdot \frac{x + x'}{2} + b \cdot \frac{y + y'}{2} = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ より } b(x' - x) - a(y' - y) = 0$$

$$bx' - ay' = +bx - ay \quad (1)'$$

$$(2) \text{ より } a(x + x') + b(y + y') = 0$$

$$ax' + by' = -ax - by \quad (2)'$$

(1)', (2)' を x', y' について解いて

$$\begin{cases} x' = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}x + \frac{-2ab}{a^2 + b^2}y \\ y' = \frac{-2ab}{a^2 + b^2}x + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}y \end{cases}$$

Note. 一次変換は原点を原点に移す。だから、平行移動は一次変換ではない。一次変換と平行移動の合成で表される変換はアフィン変換と呼ばれる。

3.7.2 行列の表し方

行列を1文字で表すとき、イタリック大文字を用いるのが慣例。また、そして、行列 A の i 行 j 列の数を a_{ij} で表す。

たとえば、 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ のように書く。

3.7.3 行列の和と定数倍

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ に対し、次のように定める。

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$k \text{ を実数とするととき, } kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ を零行列という。}$$

計算公式

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$O \text{ を零行列とするととき, } A + O = O + A = A$$

$$h, k \text{ を実数とするととき, } h(kA) = (hk)A$$

3.7.4

3.7.5 一次変換の合成

一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ に続けて一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を行う変換を考える。

点 $P(x, y)$ が一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ によって点 $Q(x', y')$ に移り、点 Q が一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ によって点 $R(x'', y'')$ に移るとき、

$$x' = b_{11}x + b_{12}y$$

$$y' = b_{21}x + b_{22}y$$

$$\begin{aligned} x'' &= a_{11}x' + a_{12}y' = a_{11}(b_{11}x + b_{12}y) + a_{12}(b_{21}x + b_{22}y) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= a_{21}x' + a_{22}y' = a_{21}(b_{11}x + b_{12}y) + a_{22}(b_{21}x + b_{22}y) \\ &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y \end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \text{ のとき,} \\ \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.7.6 行列の積

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ に対し,}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \text{ と定める。すると,}$$

$$A \left(B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = (AB) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ が成立する。}$$

これは、一次変換の合成は、それを表す行列の積を計算すればよいことを意味する。

以後、 $(AB) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を $AB \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ と書く。

Note. AB の i 行 j 列成分 $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}$ は、 A の i 行 $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \end{bmatrix}$ と B の j 列 $\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \end{bmatrix}$ の内積。

Note. 行列の積について交換法則 $AB = BA$ は成立しない。

3.7.7 単位行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ を単位行列といい, } E \text{ で表す。}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ に対し, } EA = AE = A \text{ が成立する。}$$

3.7.8 逆行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ に対し, } AX = XA = E \text{ となる行列を } A \text{ の逆行列という。}$$

逆行列を具体的に求めてみよう。

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \text{ とおくと, } AX = E \text{ から}$$

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{bmatrix} \text{ なので,}$$

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \quad (1)$$

$$a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \quad (2)$$

$$a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \quad (3)$$

$$a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \quad (4)$$

(1)(3) から x_{11} と x_{21} , (2),(4) から x_{12} と x_{22} が求まる。

$$(1) \times a_{22} \quad a_{11}a_{22}x_{11} + a_{12}a_{22}x_{21} = a_{22} \quad (1)'$$

$$(3) \times a_{12} \quad a_{12}a_{21}x_{11} + a_{12}a_{22}x_{21} = 0 \quad (3)'$$

$$(1)' - (3)' \text{ より } (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_{11} = a_{22}$$

$$\therefore a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \text{ のとき, } x_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

同様にして, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ のとき,

$$x_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

すなわち, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ のとき,

$$X = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\text{逆に, } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \text{ であれば, } X = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \text{ が } AX =$$

$XA = E$ を満たすことは容易に確かめられる。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ に対し, } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ を行列式といい, } \det A \text{ で表す。}$$

$\det A \neq 0$ のとき, A の逆行列がちょうど一つ存在する。 A の逆行列を A^{-1} で表す。

$$\text{すなわち, } \det A \neq 0 \text{ のとき, } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

練習 72 2 行 2 列の行列 A, B に対し, $\det AB = \det A \cdot \det B$ であることを示せ。

$$\text{解 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ とすると,}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} \det AB &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \\ &= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{aligned}$$

練習 73 $\det A = 0$ のとき, $AX = E$ となる行列 X は存在しないことを示せ。

解 $AX = E$ とすると, $\det(AX) = \det A \det X = 0, \det E = 1$ なので矛盾。

4 行列・一次変換

行列・一次変換は過去に高校数学の内容だったことがある。2×2 行列の制約は、2 次元でしか効果のないケイリー—ハミルトンの定理を普及させ、行列・一次変換が高校数学から消え去る要因となった。多変数関数の扱いの入口である行列・一次変換の重要性は増している（多変量統計解析、特に主成分分析）。行列・一次変換は抽象的な概念である。その概念を習得するとどんなよさがあるのか理解させるのに適した題材は何だろうか？ また、主成分分析の初歩をやさしく学ばせることは可能だろうか？

回転、鏡映は行列を用いて表現するとよさが分かる。文系数学を目指す場合でも幾何学を通して一次変換を学ぶ道があつていいのではないか。

4.0.9 行列による一次変換の表現

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, & y' &= cx + dy \text{ を} \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

で表す。

例

動点 P は、2 地点 A, B のいずれかに存在し、1 日ごとに所在が定まる。

ある日、 A 地点にあったとき、翌日も A 地点にある確率は 0.4、 B 地点に移る確率は 0.6、 B 地点にあったとき、翌日 A 地点に移る確率は 0.9、 B 地点に留まる確率は 0.1 であるという。

ある日、 A 地点にある確率を a_0 、 B 地点にある確率を b_0 で、翌日、 A 地点にある確率を a_1 、 B 地点にある確率を b_1 で表すと、

$$a_1 = 0.4a_0 + 0.9b_0$$

$$b_1 = 0.6a_0 + 0.1b_0$$

行列を用いて表すと

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

4.0.10 行列の計算公式

A, B, C を 2 行 2 列の行列とすると、

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

注意 積の交換法則 $AB = BA$ は成立しない。

4.0.11 単位行列と零行列

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を単位行列, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ を零行列という。

A を 2 行 2 列の行列とすると

$$A + O = O + A = A, AE = EA = A, OA = AO = O$$

4.0.12 行列のスカラー倍

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする。実数 k に対し, $kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$ 。

4.0.13 逆行列

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ となる行列 A^{-1} を行列 A の逆行列という。

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする。

$\det A = ad - bc$ とおく。

$$\det A \neq 0 \text{ のとき, } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

4.0.14 連立一次方程式

連立一次方程式 $\begin{cases} ax + by = e \\ cd + dy = f \end{cases}$ を, 行列を用いて $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ と書く。

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0 \text{ のとき, } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

4.1 回転

4.1.1 原点を中心とする回転

原点を中心とする角 θ の回転移動によって点 $P(x, y)$ が点 $Q(x', y')$ に移るとき,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

なぜなら, $x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha$ とすると,

$$x' = r \cos(\alpha + \theta) = r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = r \sin(\alpha + \theta) = r \cos \theta \sin \alpha + r \sin \theta \cos \alpha = x \sin \theta + y \cos \theta$$

Note.

原点を中心とする角 θ の回転移動によって

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

のように対応することから回転行列を定めることができるけれども、その場合、回転が一次変換であることが分かっていることが前提であることに注意。

例

曲線 $xy = 2$ を原点のまわりに 45° 回転してできる曲線の方程式
求める曲線上の任意の点を $Q(x, y)$ とすると、

曲線 $xy = 2$ 上に点 $P(x_0, y_0)$ があつて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

より $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$, $y_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$

点 $P(x_0, y_0)$ は曲線 $xy = 2$ 上にあるので

$$\begin{aligned} x_0 y_0 &= 2 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) &= 2 \\ y^2 - x^2 &= 4 \end{aligned}$$

4.1.2 線対称移動（鏡映）

x 軸に関する線対称移動

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

直線 $y = x \tan \theta$ に関する線対称移動

原点を中心に $-\theta$ 回転し、 x 軸に関する線対称移動を行い、原点を中心に θ 回転する
のと同じなので、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.1.3 2点間の距離を変えない一次変換

一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ で2点間の距離を変えないものを求めると、

$$a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0, b^2 + d^2 = 1.$$

$a^2 + c^2 = 1$ だから、 $a = \cos \theta, c = \sin \theta$ となる θ が存在する。

$ab + cd = 0$ より、 $b : d = -c : a = -\sin \theta : \cos \theta$

$b^2 + d^2 = 1$ より, $b = \mp \sin \theta, d = \pm \cos \theta$ (複号同順)

すなわち, 原点を中心とする回転であるかまたは原点を通る直線に関する線対称移動。

4.1.4 原点を動かさない表向き相似変換

原点を中心とする拡大・縮小と原点を中心とする回転の合成

k を正の数とすると, 平面上の一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を原点を中心とする表向き相似変換という。

練習 74 (1) 原点を中心とする表向き相似変換と原点を中心とする表向き相似変換の合成は原点を中心とする表向き相似変換であることを示せ。

(2) 原点を中心とする拡大・縮小は原点を中心とする表向き相似変換であることを示せ。

(3) 原点を中心とする回転は原点を中心とする表向き相似変換であることを示せ。

原点を中心とする表向き相似変換を表す行列は, $k \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cos \theta & -k \sin \theta \\ k \sin \theta & k \cos \theta \end{bmatrix}$ である。

練習 75 任意の a, b (ただし, $a^2 + b^2 > 0$) に対し, $a = k \cos \theta, b = k \sin \theta$ となる正の数 k と角 θ があることを示せ。

だから, $a^2 + b^2 > 0$ のとき, 行列 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ が表す一次変換は, 原点を中心とする表向き相似変換である。

4.2 代数的構造

4.2.1 零因子

2 次正方行列 A, B で $AB = O$ となる O でない A, B が存在する。

4.2.2 $a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の代数系

原点を中心とする表向き相似変換を表す行列 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ただし, $a^2 + b^2 > 0$) を考える。

練習 76 (1) 原点を中心とする表向き相似変換を表す行列 A と原点を中心とする表向き相似変換を表す行列 B の積について交換法則 $AB = BA$ が成立することを示せ。

(2) 原点を中心とする表向き相似変換を表す行列 A と原点を中心とする表向き相似変換を表す行列 B の和 $A + B$, 差 $A - B$, 積 AB は原点を中心とする表向き相似変換を表す行列であることを示せ。

(3) 原点を中心とする表向き相似変換を表す行列 A は逆行列を持ち, A^{-1} も原点を中心とする表向き相似変換を表すことを示せ。

4.3 一次変換による直線や曲線の像

例題 77 一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ によって直線 $2x + 3y = 4$ はどのような図形に移されるか。

解. 直線上の点 $P(x, y)$ が点 $Q(x', y')$ に移されるとき,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = 3x + 2y, \quad y' = x - y \quad \text{より}$$

$$x = \frac{1}{5}(x' + 2y'), \quad y = \frac{1}{5}(x' - 3y')$$

$$2x + 3y = 4 \quad \text{なので,}$$

$$2(x' + 2y') + 3(x' - 3y') = 20$$

$$x' - y' = 4$$

よって, 直線 $2x + 3y = 4$ 上の点は直線 $x - y = 4$ 上に移される。

逆に, 直線 $x - y = 4$ 上の点 $Q(x', y')$ に対し,

この変換で点 Q に移る直線 $2x + 3y = 4$ 上の点 $P(x, y)$ が存在することを示す。

$$x = \frac{1}{5}(x' + 2y'), \quad y = \frac{1}{5}(x' - 3y') \quad \text{により定まる点を } P(x, y) \quad \text{とすると,}$$

$$x' = 3x + 2y, \quad y' = x - y \quad \text{だから点 } P \text{ は点 } Q \text{ に移る。}$$

$$2x + 3y = \frac{2}{5}(x' + 2y') + \frac{3}{5}(x' - 3y') = x' - y'.$$

$$\text{点 } Q \text{ は直線 } x - y = 4 \text{ 上の点だから } x' - y' = 4$$

$$\therefore 2x + 3y = 4$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ は直線 } 2x + 3y = 4 \text{ 上にある。}$$

ゆえに, 直線 $2x + 3y = 4$ は直線 $x - y = 4$ 上に移る。

別解

直線 $2x + 3y = 4$ の方向ベクトルは $(-3, 2)$ なので,

直線 $2x + 3y = 4$ 上の点 $P(x, y)$ に対し,

$$x = 2 - 3t, \quad y = 2t \quad \text{となる } t \text{ がある。}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 5t \\ 2 - 5t \end{bmatrix}$$

$$x' = 6 - 5t, \quad y' = 2 - 5t \quad \text{より } x' - y' = 4$$

$$\text{逆に, } x' - y' = 4 \quad \text{のとき, } t = \frac{6 - x'}{5} \quad \text{とおくと, } x' = 6 - 5t, \quad y' = 2 - 5t$$

直線 $2x + 3y = 4$ 上の点 $P(2 - 3t, 2t)$ が点 (x', y') に移る。

ゆえに, 直線 $2x + 3y = 4$ は直線 $x - y = 4$ 上に移る。□

例題 78 一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ によって直線 $2x + 3y = 4$ はどのような図形に移されるか。

解. 直線 $2x + 3y = 4$ 上の点 $P(x, y)$ が点 $Q(x', y')$ に移されるとき,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = 4x + 2y$$

$$y' = 2x + y$$

$$\therefore x' - 2y' = 0$$

よって, 直線 $2x + 3y = 4$ 上の点は直線 $x - 2y = 0$ 上に移される。

逆に, 直線 $x - 2y = 0$ 上の点 $Q(x', y')$ に対し,

この変換で点 Q に移る直線 $2x + 3y = 4$ 上の点 $P(x, y)$ が存在することを示す。

$4x + 2y = x'$, $2x + y = y'$, $2x + 3y = 4$ となる x, y を求めればよい。

$$2x + y = y', \quad 2x + 3y = 4 \quad \text{から} \quad x = \frac{3}{4}y' - 1, \quad y = 2 - \frac{1}{2}y'$$

$x' - 2y' = 0$ なので $4x + 2y = x'$ も成立する。

別解

直線 $2x + 3y = 4$ の方向ベクトルは $(-3, 2)$ なので,

直線 $2x + 3y = 4$ 上の点 $P(x, y)$ に対し,

$x = 2 - 3t$, $y = 2t$ となる t がある。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 8t \\ 4 - 4t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x' = 8 - 8t, \quad y' = 4 - 4t \quad \text{より} \quad x' - 2y' = 0$$

逆に, $x' - 2y' = 0$ のとき, $t = \frac{8 - x'}{8}$ とおくと, $x' = 8 - 8t$, $y' = 4 - 4t$

直線 $2x + 3y = 4$ 上の点 $P(8 - 8t, 4 - 4t)$ が点 (x', y') に移る。

ゆえに, 直線 $2x + 3y = 4$ は直線 $x - 2y = 4$ 上に移る。□

例題 79 一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ によって直線 $2x + y = 4$ はどのような図形に移されるか。

解. 直線 $2x + y = 4$ 上の点 $P(x, y)$ が点 $Q(x', y')$ に移されるとき,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = 4x + 2y = 8$$

$$y' = 2x + y = 4$$

よって, 直線 $2x + y = 4$ は点 $(8, 4)$ に移される。

別解

直線 $2x + y = 4$ の方向ベクトルは $(-1, 2)$ なので,

直線 $2x + y = 4$ 上の点 $P(x, y)$ に対し,

$x = 2 - t, y = 2t$ となる t がある。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって、直線 $2x + 3y = 4$ は点 $(8, 4)$ に移される。□

この例題の解は直線 $x - 2y = 0$ ではないから、前 2 つの例題の解は逆も示さなければ不十分であることが理解できる。

一次変換で直線は直線または 1 点に移されるから、直線上の異なる 2 点の移動先を求めることで直線を変換した像を求めることができる。しかし、その手法は一般化できないことが次の例題で示される。

例題 80 一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ によって円 $x^2 + y^2 = 4$ はどのような図形に移されるか。

解. 直線上の点 $P(x, y)$ が点 $Q(x', y')$ に移されるとき,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = 3x + 2y, y' = x - y \text{ より}$$

$$x = \frac{1}{5}(x' + 2y'), y = \frac{1}{5}(x' - 3y')$$

$x^2 + y^2 = 4$ なので,

$$\left\{ \frac{1}{5}(x' + 2y') \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{5}(x' - 3y') \right\}^2 = 4$$

$$2x'^2 - 2x'y' + 13y'^2 = 100$$

よって、直線 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点は図形 $2x'^2 - 2x'y' + 13y'^2 = 100$ 上に移される。

逆に、図形 $2x'^2 - 2x'y' + 13y'^2 = 100$ 上の点 $Q(x', y')$ に対し,

この変換で点 Q に移る円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点 $P(x, y)$ が存在することを示す。

$$x = \frac{1}{5}(x' + 2y'), y = \frac{1}{5}(x' - 3y') \text{ により定まる点を } P(x, y) \text{ とすると,}$$

$x' = 3x + 2y, y' = x - y$ だから点 P は点 Q に移る。

$$\text{このとき, } x^2 + y^2 = \left\{ \frac{1}{5}(x' + 2y') \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{5}(x' - 3y') \right\}^2 = \frac{1}{25} (2x'^2 - 2x'y' + 13y'^2).$$

点 Q は図形 $2x'^2 - 2x'y' + 13y'^2 = 100$ 上の点だから $2x'^2 - 2x'y' + 13y'^2 = 100$

$$\therefore x^2 + y^2 = \frac{1}{25} \cdot 100 = 4$$

$\therefore$ 点 P は円 $x^2 + y^2 = 4$ 上にある。

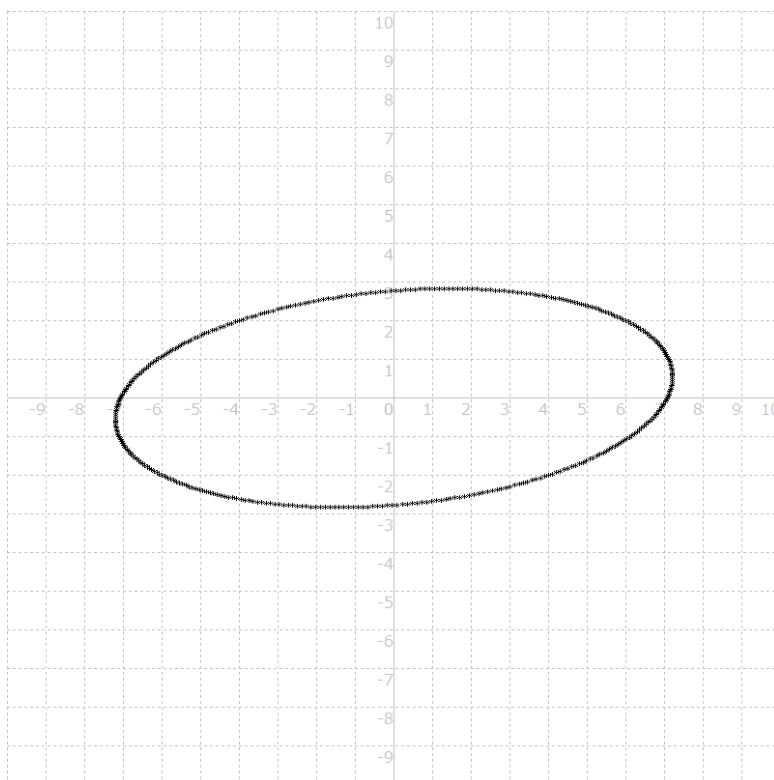
ゆえに、円 $x^2 + y^2 = 4$ は図形 $2x'^2 - 2x'y' + 13y'^2 = 100$ に移る。□

コンピュータを用いて作図すると次のようになる。

```

10 SET WINDOW -10,10,-10,10
20 DRAW grid
30 FOR t=0 TO 2*PI STEP PI/180
40   LET x=2*COS(t)
50   LET y=2*SIN(t)
60   PLOT POINTS: 3*x+2*y, x-y
70 NEXT t
80 END

```



これは、楕円のように見える。本当に楕円だろうか。原点を中心とする回転によりそれを確かめよう。

例題 81 曲線 $2x^2 - 2xy + 13y^2 = 100$ を原点のまわりに角 θ 回転し、得られる曲線の方程式が xy の項を含まないように θ を定めよ。

解. 回転して得られる曲線上の点を $Q(x', y')$ 、それに対応するもとの曲線上の点を $P(x, y)$ とする。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{より}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

x, y は方程式 $2x^2 - 2xy + 13y^2 = 100$ を満たすので、

$$2(x' \cos \theta + y' \sin \theta)^2 - 2(x' \cos \theta + y' \sin \theta)(-x' \sin \theta + y' \cos \theta) + 13(-x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 = 100$$

これを展開したとき、 $x'y'$ の項は $(-2 \cos^2 \theta - 22 \cos \theta \sin \theta + 2 \sin^2 \theta)x'y'$ なので、

$$2 \cos^2 \theta + 22 \cos \theta \sin \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$$

となる θ を取ればよい。

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta, \quad 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta \text{ なので,}$$

$$2 \cos 2\theta + 11 \sin 2\theta = 0 \text{ とすればよい。}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{5\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{11}{5\sqrt{5}} \text{ となる } \alpha \text{ をとると,}$$

$$\sin(2\theta + \alpha) = 0$$

$$\theta = -\frac{\alpha}{2} \text{ と定めればよい。ただし, } \cos \alpha = \frac{2}{5\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{11}{5\sqrt{5}}. \quad \square$$

このとき、曲線の方程式は $Ax^2 + By^2 = 100$ の形になるので、この曲線は確かに楕円である。

4.4 複素数

$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の代数系での経験を土台に、2次元ベクトルに新たな乗算を定義する（詳細を省く）。

4.5 射影変換

3Dグラフィックスの基礎・・・コンピュータは何を計算しているのか

4.5.1 透視投影

例 82 視点の高さを 1.5 m として、0.5 m 先に地平面に垂直に置かれたスクリーンに見えたとおりに写しとったとすると、原点をスクリーン中央の地平面との接点に置くと、地平面上の点 $(x, y, 0)$ は、次式で定まるスクリーン上の点 $(x', 0, z')$ に写る。

$$z' = \frac{1.5y}{0.5 + y}$$

$$x' = \frac{0.5x}{0.5 + y}$$

同様に、透視投影の方程式は、行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ を用いて

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}} \text{ の形に書ける。}$$

4.5.2 射影変換とは

定義 83 平面上の変換 $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ が正則行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ を用いて

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$$

と表されるとき, f は A により表される射影変換であるという。

例 84 アフィン変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ は, 正則行列 $\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が表す射影変換である。

問 85 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則行列であるとき, $\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則行列であることを確かめよ。

例 86 単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が表す射影変換は, 恒等写像。

注意 87 $k \neq 0$ のとき, A と kA は同じ射影変換を表す。

例 88 例 82 は, $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$ が表す射影変換。この変換は

$$y' = \frac{3y}{1+2y}$$

$$x' = \frac{x}{1+2y}$$

とも書けるから, この射影変換を表す行列を $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とすることもできる。

4.5.3 射影変換の合成

問題 24 射影変換 f, g がそれぞれ 3 次の正則行列 A, B により表されるとき, 合成変換 $g \circ f$ は BA により表される。

[ヒント] $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, g: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$$

$$x'' = \frac{b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}}{b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}}, y'' = \frac{b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}}{b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}} \text{ として } x'', y'' \text{ を } x, y \text{ で表す。}$$

問題 25 射影変換 f が 3 次の正則行列 A により表されるとき, 逆行列 A^{-1} が表す射影変換は f^{-1} である。

[ヒント] 単位行列は恒等写像を表す。

4.5.4 射影変換の問題

問題 26 (1) 例 82 の逆変換を求めよ。

(2) 次の直線, 曲線の例 82 による像を求めよ。

(ア) $y = x + 1$ (イ) $y = 2x + 3$ (ウ) $y = x^2$ (エ) $x^2 + y^2 = 1$

問題 27 4 点 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$ をそれぞれ O , $A'(2,1)$, $B'(4,5)$, $C'(1,3)$ に移す射影変換を求めよ。

4.5.5 射影変換の特徴

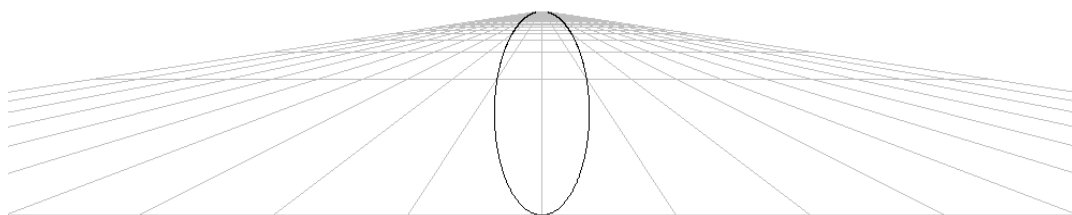
問題 28 射影変換は直線を直線に移す。

[ヒント] 直線の方程式を $y = mx + n$, 射影変換 f の逆変換を $x = \frac{b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}}{b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}}$,

$y = \frac{b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}}{b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}}$ とおく。

問題 29 射影変換は 2 次曲線を 2 次曲線に移す。

[ヒント] 2 次曲線の方程式を $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ とおく。



参考 放物線 $y = ax^2$ の射影変換

```
DIM M(4,4)
```

```
MAT READ M
```

```
DATA 1, 0, 0, 0
```

```
DATA 0, 1.5, 0, 1
```

```
DATA 0, 0, 1, 0
```

```
DATA 0, 0, 0, 1
```

```
PICTURE Grid
```

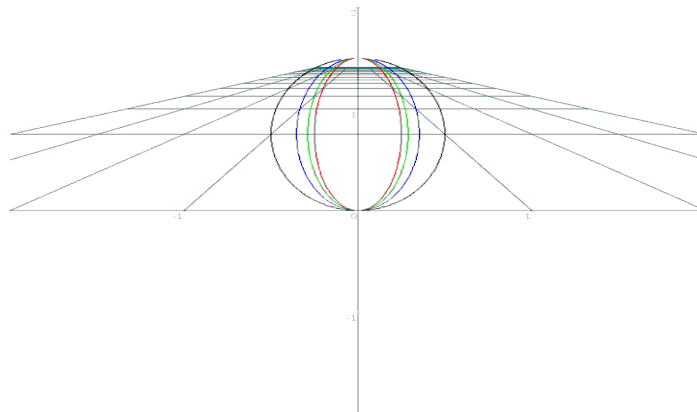
```
SET LINE COLOR 11
```

```
FOR x=-4 TO 4
```

```

    PLOT LINES:x,0;x,16
NEXT x
FOR y=0 TO 16
    PLOT LINES:-4,y;4,y
NEXT y
END PICTURE
PICTURE Parabolas
    FOR a=1 TO 4
        SET LINE COLOR a
        FOR x=-10 TO 10 STEP 0.01
            PLOT LINES:x, a*x^2;
        NEXT x
        PLOT LINES
    NEXT a
END PICTURE
SET WINDOW -2,2,-2,2
DRAW axes
DRAW Grid WITH M
DRAW Parabolas WITH M
END

```



参考 円 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r = 1, 2$) の射影変換

```

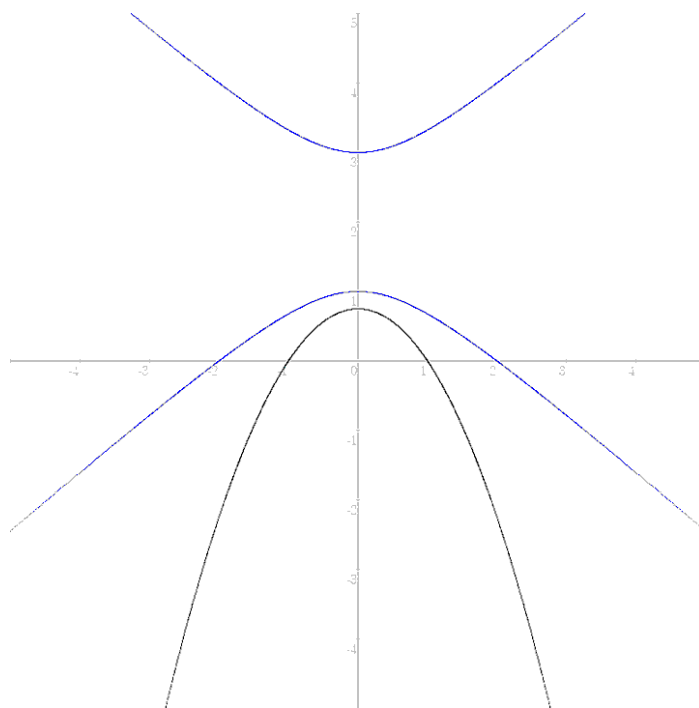
DIM M(4,4)
MAT READ M
DATA 1, 0, 0, 0
DATA 0, 1.5, 0, 1
DATA 0, 0, 1, 0
DATA 0, 0, 0, 1
PICTURE Circles
    SET POINT STYLE 1
    FOR r=1 TO 2

```

```

SET POINT COLOR r
FOR t=0 TO 2*PI STEP PI/3600
  WHEN EXCEPTION IN
    PLOT POINTS: r*COS(t),r*SIN(t)
  USE
  END WHEN
NEXT t
PLOT LINES
NEXT r
END PICTURE
SET WINDOW -5,5,-5,5
DRAW axes
DRAW Circles WITH M
END

```



命題 89 任意の2つの四角形 $ABCD$, 四角形 $A'B'C'D'$ に対し, 四角形 $ABCD$ を四角形 $A'B'C'D'$ に移す射影変換が存在する。ただし, 4点を作る図形が四角形であるとは, それら4点がすべて異なり, かつ, どの3点も一直線上にないことである。

問題 30 座標平面に, y 軸上の定点 $K(0, k)$ と定直線 $y = ax + b$ がある。ただし, $k > b > 0$ とする。

(1) K と直線上の動点 $P(x, ax + b)$ を結ぶ直線 KP と x 軸との交点を $P'(x', 0)$ とするとき, x' を x で表せ。[ヒント] $\overrightarrow{KP'} = t\overrightarrow{KP}$ となる実数 t がある。[答] $x' = \frac{-kx}{ax + b - k}$

(2) $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ とする。

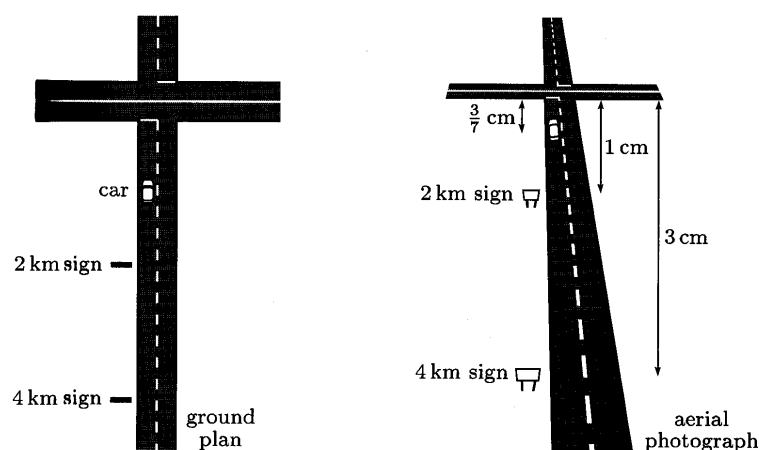
直線 $y = ax + b$ 上の4点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ に対し,

KA, KB, KC, KD と x 軸との交点を順に A', B', C', D' とすると,

$$\frac{AC}{BC} / \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} / \frac{A'D'}{B'D'}$$

(注意 $/$ は除算を表す)。[ヒント] 同一直線上の点なので, x 座標だけ計算すれば済む。

問題 31 下図のように観測されたとき, 車は交差点から何 km 手前にいるか? ⁽¹⁾



5 球面幾何

我々は, 1 点を中心とする k 倍の拡大縮小で, 平面上の (あるいは空間内の) 任意の 2 点間の距離が k 倍になることを基礎に議論を進めてきた。このことは必ずしも絶対的な真理とはいえない。この性質が成立しない幾何学も作れる。その具体例となるのが球面幾何である。

5.1 球面の座標

5.1.1 極座標

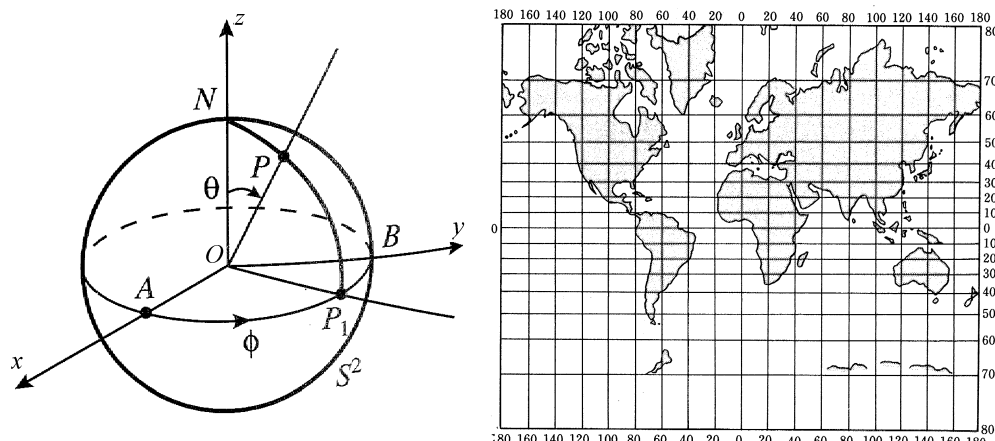
原点を中心とする半径 1 の球を単位球という。単位球を S^2 で表す²。以後, 特に断らない限り単位球のみを扱う。

球面 S^2 上の点 $P(x, y, z)$ に対し, 半直線 OP と z 軸の正の向きのなす角 θ を**天頂角**, 点 P の xy 平面への正射影を点 $P'(x, y, 0)$ とするとき, xy 平面上で半直線 OP' が x 軸の正の向きとなす角 ϕ を**方位角**という。

すなわち, $x = \sin \theta \cos \phi$, $y = \sin \theta \sin \phi$, $z = \cos \theta$ 。

¹D.A.Brannan 他著 「Geometry」(Cambridge University Press) より

²球面を英語で sphere という。



地球を真球とみなし，地球の中心を原点，地球の半径を 1 とする座標系を考えると，北極を点 $N(0,0,1)$ ，緯度，経度がそれぞれ 0° の点を $A(1,0,0)$ とする座標を入ると，天頂角は，北極が 0° ，赤道が 90° ，南極が 180° であり，方位角は東経と一致し，負の方位角が西経に対応する。

たとえば，東京はおよそ北緯 36° ，東経 140° であるので，天頂角はおよそ 54° ，方位角はおよそ 140° である。ブラジルのリオデジャネイロは，およそ南緯 23° ，西経 43° であるので，天頂角はおよそ 113° ，方位角はおよそ -43° である。

5.1.2 球面上の距離

中心を通る平面による球の切り口を**大円**という。球面上の 2 点間の距離は 2 点を通る大円の短いほうの弧（劣弧という）の長さである。

例題 90 東京とリオデジャネイロの間の地表面に沿った距離を求めよ。ただし，地球は周が 40000km の真球であると仮定する。

解. 東京，リオデジャネイロをそれぞれ P, Q で表すと，座標はそれぞれ，

$$P(\sin 54^\circ \cos 140^\circ, \sin 54^\circ \sin 140^\circ, \cos 54^\circ),$$

$$Q(\sin 113^\circ \cos(-43^\circ), \sin 113^\circ \sin(-43^\circ), \cos 113^\circ)$$

である。 $\vec{OP}$ と $\vec{OQ}$ のなす角を θ とすると，

$$\cos \theta = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OQ}}{|\vec{OP}| |\vec{OQ}|} = \vec{OP} \cdot \vec{OQ}$$

$$= \sin 54^\circ \cos 140^\circ \sin 113^\circ \cos(-43^\circ) + \sin 54^\circ \sin 140^\circ \sin 113^\circ \sin(-43^\circ) + \cos 54^\circ \cos 113^\circ$$

$$= \sin 54^\circ \sin 113^\circ (\cos 140^\circ \cos(-43^\circ) + \sin 140^\circ \sin(-43^\circ)) + \cos 54^\circ \cos 113^\circ$$

$$= \sin 54^\circ \sin 113^\circ \cos(140^\circ - (-43^\circ)) + \cos 54^\circ \cos 113^\circ$$

$$= \sin 54^\circ \sin 113^\circ \cos 183^\circ + \cos 54^\circ \cos 113^\circ$$

$$\doteq -0.973349473739382 \text{ だから } \theta \doteq 166.7^\circ.$$

よって，地表面に沿って測った距離は，およそ $40000 \times \frac{166.7}{360} \doteq 18500(\text{km})$ である。□

問題 32 2 地点の緯度，経度から 2 地点間の地表面に沿った距離を求める公式を求めよ。ただし，緯度は北緯を正の数，南緯を負の数，経度は東経を正の数，西経を負の数で与えるものとする。

問題 33 仙台とサンフランシスコはどちらも北緯 38 度付近に位置する。仙台は東経 141 度であり、サンフランシスコは西経 122 度にある。大円に沿って測った距離と、緯線に沿って測った距離を求めよ。

5.1.3 球面三角形

S^2 上の 3 点 A, B, C に対し、球面三角形 ABC は、大円の弧 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ で囲まれた図形である。ただし、大円の弧は短い側を取るものとする。弧 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ を辺と呼び、その長さを c, a, b で表す。角の大きさの単位をラジアンにとれば、それらは、各弧に対する中心角の大きさに等しい。また、頂角 A, B, C は、各頂点で交わる大円を含む 2 平面の交角である。

定理 91 球面三角形 ABC に対し、 $\cos a = \sin b \sin c \cos A + \cos b \cos c$ (余弦定理)

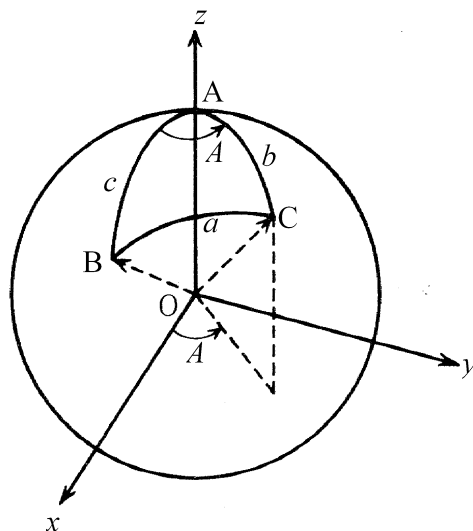
$$\text{すなわち,} \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

証明. 球面上で三角形を回転させて、 A を点 $(0, 0, 1)$ に移し、 B を方位角が 0 の点に移す。このとき、 B の天頂角は c であり、点 C の天頂角は b 、方位角は A である。

したがって、頂点 B, C の座標は、

$$B(\sin c, 0, \cos c)$$

$$C(\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$$



a は弧 $\widehat{BC}$ の中心角だから、

$$\cos a = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b \quad \square$$

観察 92 球面幾何の余弦定理は平面幾何の余弦定理の拡張になっている。すなわち、球面上の狭い範囲を対象とすると、球面幾何の余弦定理は平面幾何の余弦定理とほぼ一致する。なぜなら、

$x \div 0$ のとき、 $\sin x \div x, \cos x \div 1 - \frac{x^2}{2}$ なので、 a, b, c が 0 に近いとき、

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \div \frac{1 - \frac{a^2}{2} - \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2}\right)}{bc}$$

$$b, c \text{ が } 0 \text{ に近いことから } \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) \doteq 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2}$$

$$\therefore \cos A = \doteq \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

定理 93 球面三角形 ABC に対し, $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$ (正弦定理)

$$\begin{aligned} \text{証明. 余弦定理より, } \sin^2 A = 1 - \cos^2 A &= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \frac{1 + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ \therefore \frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} &= \frac{1 + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} \end{aligned}$$

□

観察 94 a, b, c が 0 に近いとき, $a \doteq \sin a, b \doteq \sin b, c \doteq \sin c$ なので, 平面幾何の正弦定理は球面三角形の正弦定理の近似になっている。

注意 95 球面幾何では三角形の 2 角から残りの角を求めることができないので, 正弦定理で 1 辺両端角から残りの辺の長さを求めることはできない。

正弦定理は実用性が乏しいが, 次の定理を導くのに用いられる。辺の長さの正弦の比を角の大きさの正弦の比に置き換えるのに用いる。正弦定理は分数式の形に書かれるけれども, 本質は,

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C$$

という比例式 (連比) である。

この定理により, 3 角から各辺の長さを求めること, および, 1 辺両端角から残りの角を求めることができる。

定理 96 球面三角形 ABC に対し, $\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$
すなわち, $\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C$

$$\begin{aligned} \text{証明. 余弦定理より, } \cos a &= \sin b \sin c \cos A + \cos b \cos c \\ \cos b &= \sin c \sin a \cos B + \cos c \cos a \end{aligned}$$

第 2 式を第 1 式に代入して

$$\begin{aligned} \cos a &= \sin b \sin c \cos A + (\sin c \sin a \cos B + \cos c \cos a) \cos c \\ \cos a &= \sin b \sin c \cos A + \sin c \sin a \cos c \cos B + \cos^2 c \cos a \\ \cos a &= \sin b \sin c \cos A + \sin c \sin a \cos c \cos B + (1 - \sin^2 c) \cos a \\ \sin^2 c \cos a &= \sin b \sin c \cos A + \sin c \sin a \cos c \cos B \\ \sin c \cos a &= \sin b \cos A + \sin a \cos c \cos B \end{aligned}$$

正弦定理を用いて

$$\sin C \cos a = \sin B \cos A + \sin A \cos c \cos B$$

2 頂点 A, C を入れ替えて

$$\sin A \cos c = \sin B \cos C + \sin C \cos a \cos B$$

最後の 2 式から $\cos c$ を消去して

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \quad \square$$

問題 34 球面三角形の合同条件（辺の長さと角の大きさを定める条件）は何か。また、3 辺の長さの比と 3 角の大きさが等しいための条件を相似条件と呼ぶと、相似条件は合同条件と同一であることを示せ。

5.1.4 双曲幾何

球面三角形では、三角形 OAB の 2 辺 OA, OB を 2 倍に延ばしたとき、辺 AB は 2 倍よりも短くなる。逆に、三角形 OAB の 2 辺 OA, OB を 2 倍に延ばしたとき、辺 AB が 2 倍よりも長くなる幾何学を考えることもできる。それを具体的に目で見える形に示すのは難しいけれども、その種の幾何学として双曲幾何と呼ばれる幾何がある。双曲幾何に対応して、球面幾何の条件を緩めた幾何を楕円幾何という。

球面三角形の内角の和は 180° より大きいけれど、双曲幾何では双曲三角形の内角の和は 180° より小さい。我々が住んでいる宇宙空間は $\mathbb{R}^3$ をモデルにして考えていいのだろうか。楕円幾何か双曲幾何を考えるのが正しいのかもしれない。それを決定するのに宇宙空間の巨大な三角形の内角の和を調べてみるができる。今のところ、三角形の内角の和が 180° より大きいとか小さいとか結論できるような実験結果は得られていないようだけれども、その結果次第では、 $\mathbb{R}^3$ の幾何が別の幾何学の近似体系として扱われる時代が来るかも知れない。

6 結語

教員になろうとする人が学ぶべきことは

- 1) 幾何学が社会において果たして役割を知り、それを次世代の担う若者に伝えること。
- 2) 直観に基づいて証明をせずに用いた事項が何であったかを明確にすること。

確率統計

一部のデータから全体を推測する統計分野を推測統計という。確率でその精度を保証する。

現存する高校教科書をみると推測統計分野は、「……であることが知られている」のオンパレードである。実証的に学べるものに変えなければならない。

2024.08.24 白石和夫

1 確率・統計

コンピュータで計算する時代である。二項分布や多項分布など、直接計算できるものを無理やり正規分布で近似する必要はない。コンピュータによる計算を通して、論理の核心部分を鮮明にすることが可能になる。

1.1 事象と確率

1.1.1 事象

試行 同じ条件のもとで何回でも繰り返すことが可能な実験・観察。

全事象 試行の結果として起こり得る結果の全体。（「事象の全て」ではない）

事象 試行の結果起こること。全事象の部分集合として表す。

根元事象 1 個の要素だけからなる事象。

例 1 1 個のさいころを振って出る目の数を調べる時、全事象は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。

偶数の目が出る事象は、その部分集合 $\{2, 4, 6\}$ 。

根元事象は、 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ の 6 個。

排反事象 事象 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ が排反であるとは、 $i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \emptyset$

確率で用いる用語は紛らわしい。集合で用いる用語との対応を示す。

集合	確率
全体集合	全事象
部分集合	事象
空集合	空事象
補集合	余事象
	根元事象
要素（元）	

1.1.2 確率

確率は、指定された事象の起こりやすさを全体を 1 とする割合で表す数値である。

集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す。

ある試行において事象 A の起こる確率を $P(A)$ で表す。

同程度に確からしいとき

全事象 U の根元事象のいずれもが同程度に確からしいとき、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

同程度に確からしいとは限らないとき（統計的確率）

全事象 U の根元事象を $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ とする。すなわち、 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ は排反で、 $U = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$, $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = \dots = n(A_n) = 1$ とする。

各根元事象の確率 $P(A_k)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) が定まり、各 $P(A_k)$ は、

$$P(A_k) \geq 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n), \quad \sum_{k=1}^n P(A_k) = 1$$

を満たすものとする。

このとき、事象 A の確率 $P(A)$ を

$$P(A) = \sum_{x \in A} P(\{x\})$$

で定める。ただし、 $\sum_{x \in A} P(\{x\})$ は、 A のすべての要素 x に対し $P(\{x\})$ を加えたものを表す。

Note1. 根元事象の確率は、比 $P(A_1) : P(A_2) : \dots : P(A_n)$ が指定されていればよい。
 $P(A_1) : P(A_2) : \dots : P(A_n) = p_1 : p_2 : \dots : p_n$ と指定されたとき、 $P(A_k) = \frac{p_k}{\sum_{j=1}^n p_j}$ で

ある。

例 実験・観察によって観測された回数の相対度数を、起こりやすさと考えて、各根元事象の確率と呼ぶ。

Note2. 同程度に確からしい場合の確率の定義は、 $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n)$ と定めた特別な場合である。

確率の基本性質

U を全事象とする。

$$p(U) = 1, P(\emptyset) = 0$$

$$A \subset U \text{ に対し, } 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ のとき } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

余事象の確率

$$A \subset U \text{ に対し, } P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

1.1.3 条件付き確率

$B \subset U$ とする。 B を全事象とするときの事象 $A \cap B$ の確率を $P_B(A)$ で表し、事象 B が起きたときの事象 A の条件付き確率という。

確率の定義から次の等式が導かれる。

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

例 ジョーカー 1 枚を含む 53 枚のトランプのカードから 1 枚のカードを取り出す試行を考え、絵札を取り出す事象を A 、スペードのカードを取り出す事象を B とする。このとき、 $P(B) = \frac{13}{53}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{53}$, $P_B(A) = \frac{3}{13}$ なので、上の等式が成立している。

乗法定理 $P_B(A)$ と $P(B)$ が分かっているとき $P(A \cap B)$ を求めることができる。

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

例題 1 ある感染症は、感染率は 4 % であるという。検査で非感染者を陰性と正しく判定する確率が 98 %、感染者を正しく陽性と判定する確率が 99 % である。検査で陽性であったとき、感染者である確率を求めよ。

一人の人を選んだとき、感染者である事象を A 、検査で陽性と判定される事象を B とする。

題意より、

$$P(A) = 0.04, P(\bar{A}) = 1 - 0.04 = 0.96, P_{\bar{A}}(B) = 1 - 0.98 = 0.02, P_A(B) = 0.99.$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0.96 \times 0.02 = 0.0192$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0.04 \times 0.99 = 0.0396$$

$$\therefore P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0.0588$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.0396}{0.0588} \doteq 0.67 \quad \text{答 約 } 67 \%$$

1.1.4 独立試行

2 つの試行 T_1, T_2 は、どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき、独立であるという。

試行 T_1 の全事象を U_1 、試行 T_2 の全事象を U_2 とするとき、試行 T_1, T_2 が独立であるとき、試行 T_1 で事象 A 、試行 T_2 で事象 B が起こる確率は、 $P_{U_1}(A) \times P_{U_2}(B)$ である。

☆丁寧に説明すると、 $U_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, U_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ とするとき、直積 $U_1 \times U_2$ の各根元事象 $\{(x_i, y_j)\}$ の確率が、

$j = 1, 2, \dots, n$ に対し

$$P\{(x_1, y_j)\} : P\{(x_2, y_j)\} : \dots : P\{(x_m, y_j)\} = P_{U_1}(\{x_1\}) : P_{U_1}(\{x_2\}) : \dots : P_{U_1}(\{x_m\}),$$

$i = 1, 2, \dots, m$ に対し

$$P\{(x_i, y_1)\} : P\{(x_i, y_2)\} : \dots : P\{(x_i, y_n)\} = P_{U_2}(\{y_1\}) : P_{U_2}(\{y_2\}) : \dots : P_{U_2}(\{y_n\})$$

となることから、 $P\{(x_i, y_j)\} = P_{U_1}(\{x_i\}) \times P_{U_2}(\{y_j\})$ が導かれる。

1.1.5 独立反復試行の確率

成功確率 p の独立試行を n 回行うとき、ちょうど k 回成功する確率は ${}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$

1.2 確率変数と確率分布

1.2.1 確率変数と確率分布

全事象を U とする。

U の各要素に実数を対応させる関数を確率変数という。

確率変数 X の取り得る値 x に $P(\{u|X(u) = x\})$ を対応させる関数を X の確率分布という。

本質部分は、起こりやすさの比で、全体が 1 となるように各項の和で割ったものが確率。確率分布の概念の習得には、連比の概念の習得が欠かせない。

事象 $\{u|X(u) = x\}$ を $X = x$ で表し、 $P(\{u|X(u) = x\})$ を $P(X = x)$ と略記する。

例 成功確率 p の独立試行を n 回行うとき、成功回数を X とすると、

$$P(X = k) = {}_n C_k p^k (1 - p)^{n-k}$$

例 さいころを 3 回投げるとき、1 の目の出る回数を X とすると、

$$P(X = 0) : P(X = 1) : P(X = 2) : P(X = 3) = \frac{1}{6^3} : \frac{3 \times 5}{6^3} : \frac{3 \times 5^2}{6^3} : \frac{5^3}{6^3}$$

二項分布

$P(X = k) = {}_n C_k p^k (1 - p)^{n-k}$ である確率分布を二項分布という。

独立試行の確率でない場合でも、この式で表される分布は二項分布と呼ばれる。

1.2.2 確率変数の期待値、分散

期待値、分散の定義

確率変数 X のとりうる値を $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$,

X の確率分布を $P(X = x_i) = p_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ とする。

$m = E(X)$ とするとき、

$$X \text{ の期待値 } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$X \text{ の分散 } V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

期待値・分散の性質

X を確率変数とするとき、定数 a, b を用いて $aX + b$ で定義される確率変数について

$$E(aX + b) = aE(X) + b,$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

1.2.3 確率変数の和と積

確率変数の和の期待値

確率変数 X, Y について、 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

なぜなら、 X が取り得る値を $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, Y が取り得る値を $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ とし、 $P(X = x_i, Y = y_j)$ を p_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) と書くことにすると、

$$\begin{aligned}
P(X = x_i) &= \sum_{j=1}^n p_{ij}, P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^m p_{ij} \text{ だから,} \\
E(X) &= \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n p_{ij}, E(Y) = \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^m p_{ij} \\
E(X+Y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i p_{ij} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n p_{ij} + \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^m p_{ij} \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}$$

確率変数の積の期待値

確率変数 X, Y について, X が取り得る値を $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, Y が取り得る値を $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ とする。

すべての i, j ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) に対し $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ が成立するとき, X と Y は**独立**であるという。

X と Y が独立であるとき, $E(XY) = E(X)E(Y)$

なぜなら,

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j P(X = x_i)P(Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^m x_i P(X = x_i) \sum_{j=1}^n y_j P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^m x_i P(X = x_i) E(Y) = E(Y) \sum_{i=1}^m x_i P(X = x_i) \\
&= E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

確率変数の和の分散

X と Y が独立であるとき, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

$$\begin{aligned}
&\text{なぜなら, } V(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2 \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\
&= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) = V(X) + V(Y)
\end{aligned}$$

確率変数の積 (3 変数)

確率変数 X, Y, Z について, X が取り得る値を $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, Y が取り得る値を $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, Z が取り得る値を $z_1, z_2, z_3, \dots, z_o$ とする。

すべての i, j, k ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq o$) に対し

$$P(X = x_i, Y = y_j, Z = z_k) = P(X = x_i)P(Y = y_j)P(Z = z_k)$$

が成立するとき, X, Y, Z は**独立**であるという。

X, Y, Z が独立であるとき, X と Y は独立で, $X + Y$ と Z は独立である。

なぜなら,

$$\begin{aligned}
P(X = x_i, Y = y_j) &= \sum_{k=1}^o P(X = x_i, Y = y_j, Z = z_k) \\
&= \sum_{k=1}^o P(X = x_i)P(Y = y_j)P(Z = z_k) \\
&= P(X = x_i)P(Y = y_j) \sum_{k=1}^o P(Z = z_k) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \\
P(X + Y = x_i + y_j, Z = z_k) &= P(X = x_i, Y = y_j, Z = z_k) \\
&= P(X = x_i)P(Y = y_j)P(Z = z_k) = P(X = x_i, Y = y_j)P(Z = z_k) \\
&= P(X + Y = x_i + y_j)P(Z = z_k)
\end{aligned}$$

X, Y, Z が独立であるとき, $V(X + Y + Z) = V(X) + V(Y) + V(Z)$
 なぜなら, $V(X + Y + Z) = V(X + Y) + V(Z) = V(X) + V(Y) + V(Z)$

確率変数の和の期待値・分散

4 個以上の確率変数の独立性も同様に定義する。

n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ について,

$$E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \dots + E(X_n)$$

さらに, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が独立であれば,

$$V(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \dots + V(X_n)$$

例題 2 成功確率 p の独立試行を n 回行うとき, 成功回数を X とすると

$$E(X) = np, V(X) = np(1 - p)$$

解答 3 k 回目に成功するとき $X_k = 1$, 失敗するとき $X_k = 0$ とすると,

$$E(X_k) = p, V(X_k) = E(X_k^2) - (E(X_k))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

$$\therefore E(X) = np, V(X) = np(1 - p)$$

1.3 標本平均

1.3.1 標本平均の期待値と分散

平均 μ , 分散 σ^2 の母集団から大きさ n の標本を復元抽出する。

k 回目に得られる値を X_k とすると, $E(X_k) = \mu, V(X_k) = \sigma^2$ 。

毎回の抽出が他の回に影響を与えないから $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ は独立である。

$$\therefore E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = n\mu, V(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = n\sigma^2$$

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の平均を $\bar{X}$ で表し, 標本平均という。

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n)$$

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}V(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = \frac{1}{n}\sigma^2$$

標本分散の期待値

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の分散を S^2 で表し, 標本分散という。すなわち,

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - (\bar{X})^2$$

$$V(X_k) = E(X_k^2) - (E(X_k))^2 \text{ より } E(X_k^2) = V(X_k) + (E(X_k))^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - (E(\bar{X}))^2 \text{ より } E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + (E(\bar{X}))^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2$$

$$\therefore E(S^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k^2) - E((\bar{X})^2) = \frac{1}{n} \times n(\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2 \right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

標本不偏分散

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1}E(S^2) = E\left(\frac{n}{n-1}S^2\right) \text{ となるので,}$$

$$U^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 \text{ とおくと, } E(U^2) = \sigma^2.$$

U^2 を標本不偏分散という。標本不偏分散は母分散の推定値として用いられる。

1.4 条件付き確率

事象 B を全事象とするときの $A \cap B$ の確率を $P_B(A)$ で表す。

$$P_B(A) = P(A \cap B) / P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B)$$

例題 4 さいころを n 回振るとき目の数の和が k となる確率を $p_{n,k}$ とすると,

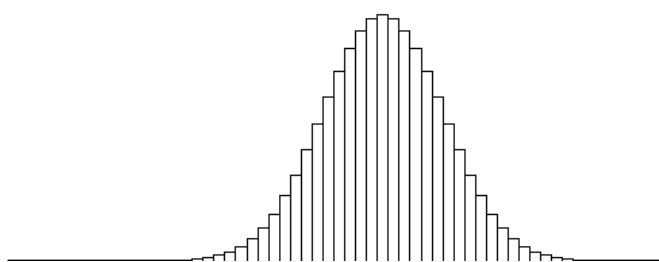
$$p_{1,1} = p_{1,2} = \cdots = p_{1,6} = \frac{1}{6}$$

$$n > 1 \text{ のとき, } p_{n,k} = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} p_{n-1,k-i}, \text{ ただし, } k < n \text{ のとき } p_{n,k} = 0 \text{ とする。}$$

```

DIM p(10,60)
MAT p=ZER
FOR i=1 TO 6
  LET p(1,i)=1/6
NEXT i
FOR n=2 TO 10
  FOR k=n TO 6*n
    FOR i=1 TO MIN(6,k-1)
      LET p(n,k)=p(n,k)+p(n-1,k-i)/6
    NEXT i
  NEXT k
NEXT n
SET WINDOW -1,61,0,0.2
LET n=10
FOR i=1 TO 60
  PLOT LINES: i-0.5,0; i-0.5,p(n,i); i+0.5,p(n,i); i+0.5,0
NEXT i
END

```



ベイズの定理

事象 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ が排反で, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ とする。

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B) \end{aligned}$$

なので,

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)}{P(B)} = \frac{P_{A_k}(B)}{P(A_1)P_{A_1}(B) + \dots + P(A_k)P_{A_k}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)}$$

例題 5 4 枚のコインがあり, うち 3 枚は表裏が等しい確率で出現し, 1 枚のみ異常で, 表が出る確率が 60 % である。1 枚のコインを無作為に選び, 10 回投げたら 6 回表が出た。このコインが異常である確率を求めよ。

解

正常コインを 10 回投げて 1 の目が 6 回出る確率は ${}_{10}C_6 \times 0.5^{10} = 0.205078125$

異常コインを 10 回投げて 1 の目が 6 回出る確率は ${}_{10}C_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4 = 0.250822656$

	1 の目が 6 回出る		合計
正常コイン	$\frac{3}{4} \times {}_{10}C_6 \times 0.5^{10}$		$\frac{3}{4}$
異常コイン	$\frac{1}{4} \times {}_{10}C_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4$		$\frac{1}{4}$
合計	$\frac{3}{4} \times {}_{10}C_6 \times 0.5^{10} + \frac{1}{4} \times {}_{10}C_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4$		1

無作為にコインを選んで 1 の目が 6 回出る確率は

$$\frac{3}{4} \times {}_{10}C_6 \times 0.5^{10} + \frac{1}{4} \times {}_{10}C_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4 = 0.21651425775$$

異常コインを選んでそれを 10 回投げて 1 の目が 6 回出る確率は

$$\frac{1}{4} \times {}_{10}C_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4 = 0.062705664$$

10 回投げて 1 の目が 6 回出るときそのコインが異常である確率は,

$$\frac{\frac{1}{4} \times {}_{10}C_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4}{\frac{3}{4} \times {}_{10}C_6 \times 0.5^{10} + \frac{1}{4} \times {}_{10}C_6 \times 0.6^6 \times 0.4^4} = 0.289614479210896$$

1.5 累積確率分布

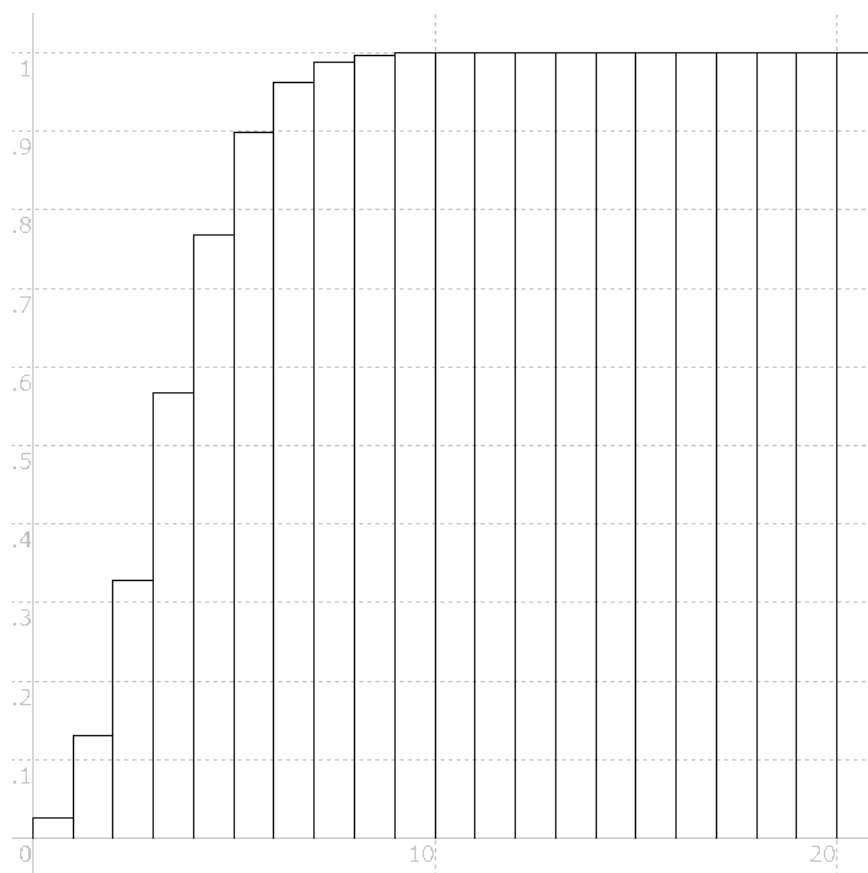
検定を実行するのに累積確率分布が便利である。

確率変数 X に対し, $P(X \leq x)$ を累積確率分布という。

例題 6 さいころを 20 回振るときの 1 の目が出る回数を X とするとき, X の累積確率分布を求めよ。

解

```
100 DECLARE EXTERNAL FUNCTION Comb
110 LET n=20
120 LET p=1/6
130 SET WINDOW -0.5, n+1, -0.05, 1.05
140 DRAW grid(10, 0.1)
150 LET a=0
160 FOR k=0 TO n
170     LET x=comb(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k)
180     LET a=a+x
190     PLOT LINES: k, 0; k,a; k+1,a
200 NEXT k
210 END
1000 EXTERNAL FUNCTION Comb(n,r)
1010 REM 組合せの数 (combination)
1020 IF r=0 THEN
1030     LET comb=1
1040 ELSE
1050     LET comb=comb(n,r-1)*(n-r+1)/r
1060 END IF
1070 END FUNCTION
```



解説 組合せの数 ${}_nC_r$ を漸化式

$${}_nC_0 = 1, r \geq 1 \text{ のとき } {}_nC_r = {}_nC_{r-1} \times \frac{n-r+1}{r}$$

を利用して求めている。

例題 7 さいころを 20 回振るときの 1 の目の出る回数を X とするとき, X の逆方向累積確率分布 $P(X \geq x)$ を求めよ。

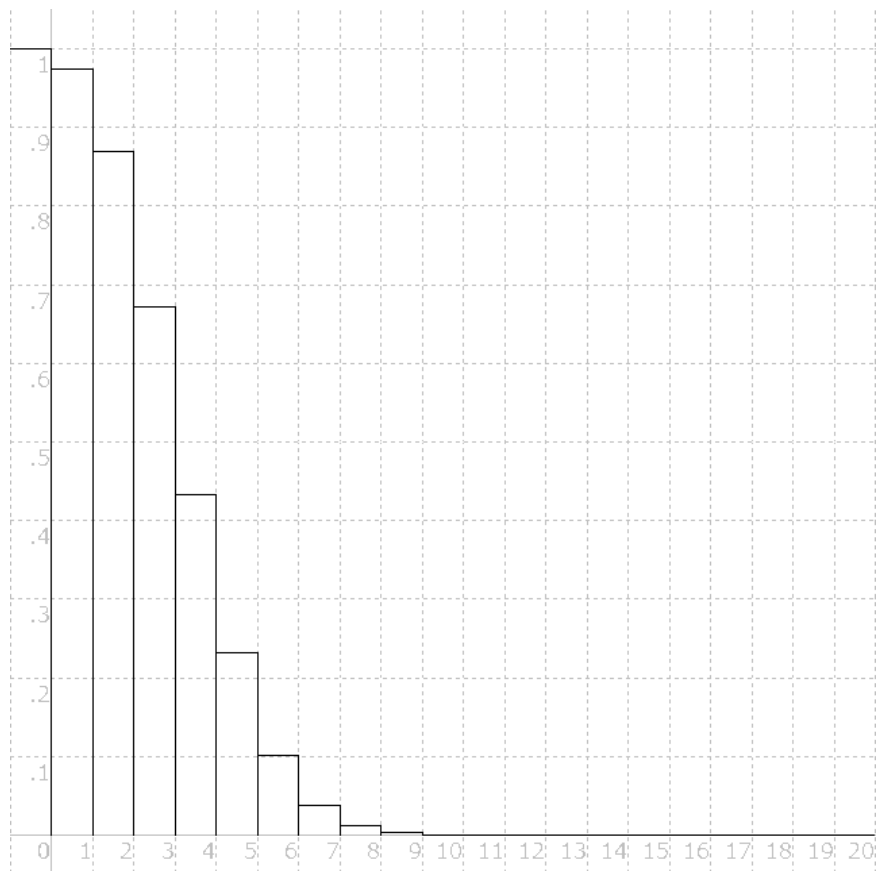
解

```

100 DECLARE EXTERNAL FUNCTION Comb
110 LET n=20
120 LET p=1/6
130 SET WINDOW -1, n, -0.05, 1.05
140 DRAW grid(1, 0.1)
150 LET a=0
160 FOR k=n TO 0 STEP -1
170   LET x=comb(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k)
180   LET a=a+x
190   PLOT LINES: k, 0; k,a; k-1,a
200 NEXT k
210 END
1000 EXTERNAL FUNCTION Comb(n,r)

```

(以下, 省略)



Note.

$n = 20$ 程度であれば問題ないが, n が大きくなると, 前例題の方法で組合せの数 ${}_nC_r$ を求めると $r = n/2$ に近い r で桁あふれが発生して計算できなくなる。検定のための 2.5 % 点を求めるために逆方向累積分布を場合は,

```

1000 EXTERNAL FUNCTION Comb(n,r)
1010 IF r>n/2 THEN
1020   LET Comb=Comb(n,n-r)
1030 ELSEIF r=0 THEN
1040   LET comb=1
1050 ELSE
1060   LET comb=comb(n,r-1)*(n-r+1)/r
1070 END IF
1080 END FUNCTION

```

のように, $r > n/2$ のときは, ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ の公式を用いて計算する。

1.6 検定

検定論の本質は, 実際に観察された結果が, 想定する確率分布から考えて起こりそうか見定めることである。それを計量的に行うために, 想定する分布に従う確率変数 X 対

し、 $P(a \leq X \leq b) = 1 - \alpha$ となる 2 数 a, b を求める。(確率変数 X が主語のように見えるが、本当の主語は確率分布である。つまり、「確率変数」は記述の都合で、考察の対象は「分布」である。)

2 項分布などでは、コンピュータによる計算で、そのような 2 数が容易に求まる。

例題 8 $n = 180, p = \frac{1}{6}$ のとき $\sum_{k=0}^x {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} < 0.025$ となる最大の自然数 x を求めよ。

解

```
LET n=180
LET p=1/6
LET c=0
FOR k=0 TO n
  LET c=c+comb(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k)
  IF c>=0.025 THEN EXIT FOR
NEXT k
PRINT k-1
END
```

(答 20)

練習 9 例題 $n = 180, p = \frac{1}{6}$ のとき、 $\sum_{k=x}^n {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} < 0.025$ となる最小の自然数 x を求めよ。

1.7 推定

パラメータ θ をもつ確率分布に対し、その分布に従う確率変数を X として $P(a_\theta \leq X \leq b_\theta) = \alpha$ となる 2 数 a_θ, b_θ を定める。このとき、 X の取り得る値 x に対し、 $I_x = \{\theta | a_\theta \leq x \leq b_\theta\}$ とし、 I_x が区間として定まるときその下端と上端を L_x, U_x とする。すなわち、 $L_x \leq \theta \leq U_x \Leftrightarrow a_\theta \leq x \leq b_\theta$ 。 $\therefore P(L_x \leq \theta \leq U_x) = P(a_\theta \leq X \leq b_\theta) = \alpha$

一般に、確率変数 X から定まる区間 $[L_x, U_x]$ があって $P(L_x \leq \theta \leq U_x) = \alpha$ となるとき、 $[L_x, U_x]$ を信頼度 α の信頼区間という。 $[L_x, U_x]$ が確率変数であることに注意。 $P(L_x \leq \theta \leq U_x)$ は、(未知の) 母数 θ をもつ確率分布について確率変数 $[L_x, U_x]$ が θ を含む確率であって、確率変数 X の実現値を x とするとき、 θ が区間 $[L_x, U_x]$ に存在する確率ではない (θ を確率変数と見ていない)。

☆ この信頼区間の定義は難解。高校数学では、

信頼度 α の信頼区間 = 有意水準 $1 - \alpha$ の検定で棄却されない母数 θ の区間
と限定していいのではないだろうか。

例題 10 さいころを 100 回投げて 1 の目が 15 回出た。

(1) 1 の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ であると仮定したとき、100 回さいころを投げて x 回 1 の目が

出る確率の累積確率分布（順方向および逆方向）を求める。

(2) $P(X = x) = {}_{100}C_x p^x (1 - p)^{100-x}$ とし, $p = 0.0001, \dots, 0.9999$ に対し, $P(X < a) \geq 0.025, P(X > b) \leq 0.025$ となる最小の a , 最大の b を求める。

このとき, $P(a \leq X \leq b) \geq 0.95$

(1)

$$P(X = x) = {}_{100}C_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{100-x}$$

順方向

```
LET n=100
LET p=1/6
LET c=0
FOR x=0 TO n
  LET c=c+ COMB(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x)
  PRINT USING "### %.#####":x,c
NEXT x
END
```

(実行結果)

```
0  0.000000012
1  0.000000254
(中略)
9  0.021292412
10 0.042695684
(中略)
100 1.000000000
```

逆方向

```
LET n=100
LET p=1/6
LET c=0
FOR x=n TO 0 STEP -1
  LET c=c+ COMB(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x)
  PRINT USING "### %.#####":x,c
NEXT x
END
```

(実行結果)

```
100 0.000000000
(中略)
25  0.021703379
24  0.037864369
(中略)
0   1.000000000
```

$$P(X < 10) < 0.025, P(X > 24) < 0.025, P(10 \leq x \leq 24) \geq 0.95$$

100 回さいころを投げて 1 の目が 15 回出ることは、危険率 5 %では棄却されない。

(2)

```

LET n=100
FOR p=0.0001 TO 0.9999 STEP 0.0001
  PRINT p,
  LET c=0
  FOR x=0 TO n
    LET c=c+ COMB(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x)
    IF c>=0.025 THEN EXIT FOR
  NEXT x
  PRINT x,
  LET c=0
  FOR x=n TO 0 STEP -1
    LET c=c+ COMB(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x)
    IF c>=0.025 THEN EXIT FOR
  NEXT x
  PRINT x
NEXT p
END

```

(実行結果)

(前略)

.0864	4	14
.0865	4	15

(中略)

.2353	15	32
.2354	16	32

(後略)

$p=0.0865 \sim 0.2353$ のとき、100 回さいころを投げて 1 の目が 15 回出ることは、危険率 5 %では棄却されない。

すなわち、1 の目が出る確率 p の 95 %信頼区間は $0.0865 \leq p \leq 0.2353$ 。

例題 11 (母比率の推定)

ある工場で、製品の中から無作為に 400 個を選んで調べたところ、40 個の不良品があった。

この工場で作られる製品の不良率 p に対する信頼度 95 %の信頼区間を求めよ。

解 不良率を p とするとき、400 個中 x 個の不良品ができる確率は ${}_{400}C_x p^x (1-p)^{400-x}$
 $P(X = x) = {}_{400}C_x p^x (1-p)^{400-x}$ とし、 $p = 0.0001, \dots, 0.9999$ に対し、
 $P(X < a) \geq 0.025, P(X > b) \leq 0.025$ となる最小の a 、最大の b を求める。

上の例題と同様のプログラムを実行して

(前略)

.0724 19 39

.0725 19 40

(中略)

.1336 40 67

.1337 41 67

(後略)

 p の 95 %信頼区間は $0.0725 \leq p \leq 0.1336$ 。

☆正規分布で近似する必要がない。上述の結果は十進 BASIC の 10 進 1000 桁モードを使用して求めた。

1.7.1 ベイズ推定

事前分布を仮定し，実験結果から事後分布を計算する。

例題 12 A 社製のさいころは，1 の目が出る確率が平均 $\frac{1}{6}$ ，分散 0.0025^2 の正規分布に従うことが知られている。A 社製のさいころを一つ取り出し，200 回投げたところ，1 の目が 30 回出た。このとき，このさいころの 1 の目が出る確率 p の確率分布を求めよ。

$$\text{解. } f(x) = \frac{1}{0.0025\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \frac{1}{6})^2}{2 \times 0.0025^2}\right),$$

$\Delta x = \frac{1}{10000}, x_k = k\Delta x \quad (k = 0, 1, \dots, 10000)$ とする。

$p = x_k$ のとき，このさいころを 200 回投げて 1 の目が 30 回出る確率は ${}_{200}C_{30} x_k^{30} (1 - x_k)^{170}$

このさいころを 200 回投げて 1 の目が 30 回出る確率は $\sum_{k=0}^{1000} f(x_k) \Delta x \times {}_{200}C_{30} x_k^{30} (1 - x_k)^{170}$

このとき， $x_k - 0.00005 \leq p < x_k + 0.00005$ となる条件付き確率は

$$\frac{f(x_k) \Delta x \times {}_{200}C_{30} x_k^{30} (1 - x_k)^{170}}{\sum_{k=0}^{1000} f(x_k) \Delta x \times {}_{200}C_{30} x_k^{30} (1 - x_k)^{170}} = \frac{f(x_k) \times x_k^{30} (1 - x_k)^{170}}{\sum_{k=0}^{1000} f(x_k) \times x_k^{30} (1 - x_k)^{170}} \quad \square$$

```
100 OPTION ARITHMETIC NATIVE
```

```
110 DEF f(x)=EXP(-(x-1/6)^2/(2*0.0025^2))/(0.0025*SQR(2*PI))
```

```
120 LET N=1000
```

```
130 DIM p(0 TO N)
```

```
140 LET t=0
```

```
150 FOR k=0 TO N
```

```
160   LET x=k/N
```

```
170   LET p(k)=f(x)*x^30*(1-x)^170
```

```
180   LET t=t+p(k)
```

```
190 NEXT k
```

```
200 MAT PRINT p;
```

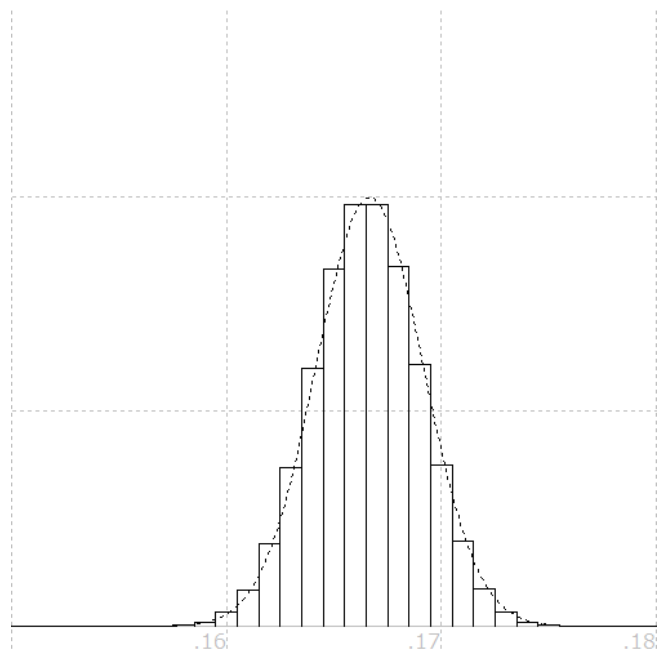
```
210 MAT p=(1/t)*p
```

```

220 SET WINDOW 0.15, 0.18, -10, 230
230 DRAW grid(0.01,80)
240 FOR k=0 TO N
250     LET x=k/N
260     PLOT LINES: x-0.5/N,0 ;x-0.5/N, p(k)*N; x+0.5/N, p(k)*N; x+0.5/N,0
270 NEXT k
280 SET line STYLE 3
290 FOR x=0.15 TO 0.18 STEP 0.0001
300     PLOT LINES:x,f(x);
310 NEXT x
320 END

```

点線は事前分布。事後分布がわずかに左方にシフトしている。



例題 13 あるさいころを、2000 回投げたところ、1 の目が 300 回出た。このとき、このさいころの 1 の目の出る確率 p の確率分布を求めよ。

さいころの 1 の目の出る確率について何も仮定がないので、それは一様分布に従うとして計算することになると、次のようになる。ただし、仮定がないとき一様分布と仮定してよいかについては、議論の余地あり。

$$\text{解. } f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } 1 < x) \end{cases},$$

$$\Delta x = \frac{1}{10000}, x_k = k\Delta x \quad (k = 0, 1, \dots, 10000) \text{ とする.}$$

$p = x_k$ のとき、このさいころを 2000 回投げて 1 の目が 300 回出る確率は

$${}^{2000}C_{300} x_k^{300} (1 - x_k)^{1700}$$

従って、このさいころを 2000 回投げて 1 の目が 300 回出る確率は

$$\sum_{k=0}^{10000} f(x_k) \Delta x \times {}^{2000}C_{300} x_k^{300} (1 - x_k)^{1700}$$

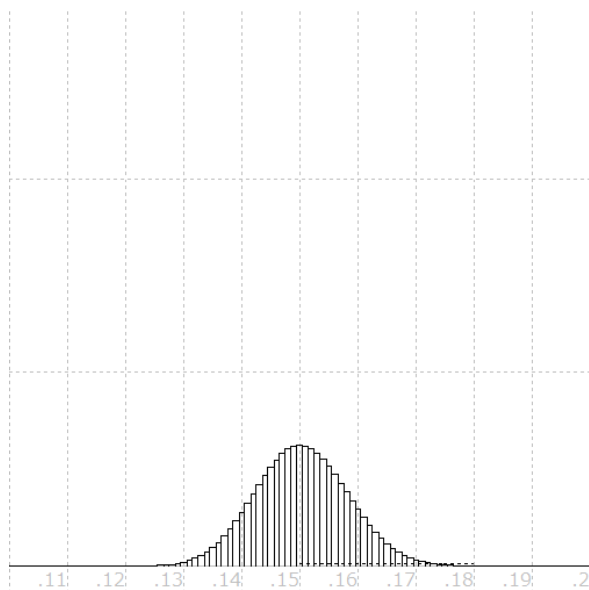
このとき, $x_k - 00005 \leq p < x_k + 00005$ となる条件付き確率は

$$\frac{\Delta x \times {}_{2000}C_{300} x_k^{300} (1-x_k)^{1700}}{\sum_{k=0}^{1000} \Delta x \times {}_{2000}C_{300} x_k^{300} (1-x_k)^{1700}} = \frac{x_k^{300} (1-x_k)^{1700}}{\sum_{k=0}^{1000} x_k^{300} (1-x_k)^{1700}} \quad \square$$

```

100 OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
110 DEF f(x)=1
120 LET N=1000
130 DIM p(0 TO N)
140 LET t=0
150 FOR k=0 TO N
160   LET x=k/N
170   LET p(k)=f(x)*x^300*(1-x)^1700
180   LET t=t+p(k)
190 NEXT k
200 MAT PRINT p;
210 MAT p=(1/t)*p
220 SET WINDOW 0.1, 0.2, -10, 230
230 DRAW grid(0.01,80)
240 FOR k=0 TO N
250   LET x=k/N
260   PLOT LINES: x-0.5/N,0 ;x-0.5/N, p(k)*N; x+0.5/N, p(k)*N; x+0.5/N,0
270 NEXT k
320 END

```



十進 BASIC の十進 1000 桁モードを利用して計算している。通常の倍精度数で計算するためには漸化式を用いるなどの工夫が必要。

1.8 正規分布

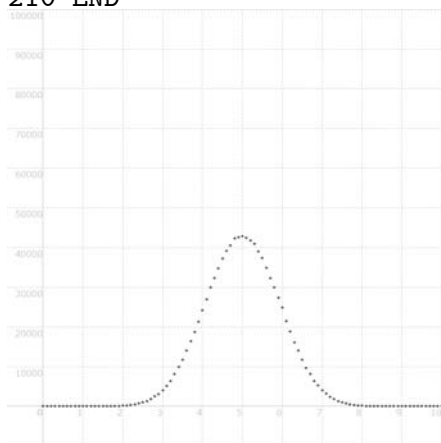
検定・推定の理論は正規分布抜きに学ぶことができる。たとえば、2項分布の問題であれば、正規分布による近似を行わないほうが正確な計算ができるから、正規分布による近似の必要性はない。

正規分布を学ぶ意義は、誤差の累積が正規分布を導くこと。実験的なアプローチが欠かせない。

実験 一様乱数の和の分布

10 個の $[0,1]$ 一様乱数の和の分布を求めてみた。

```
100 DEF s=RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND
110 DIM d(0 TO 100)
120 FOR t=1 TO 10^6
130   LET i=ROUND(s*10)
140   LET d(i)=d(i)+1
150 NEXT t
160 SET WINDOW -9,101,-10^4,10^5
170 DRAW grid(1,10^4) WITH SCALE(10,1)
180 FOR i=0 TO 100
190   PLOT POINTS:i,d(i)
200 NEXT i
210 END
```



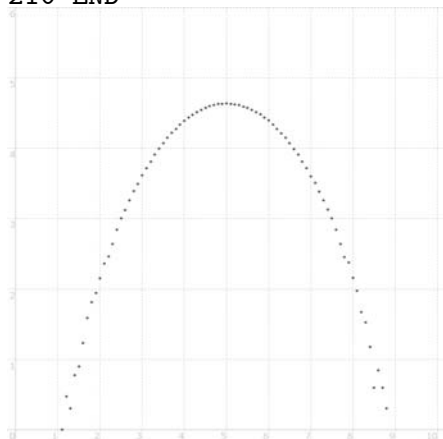
この曲線は何を意味するのだろうか？ 縦軸の目盛りを常用対数に変えてみる。

```
100 DEF s=RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND
110 DIM d(0 TO 100)
120 FOR t=1 TO 10^6
130   LET i=ROUND(s*10)
140   LET d(i)=d(i)+1
150 NEXT t
160 SET WINDOW -.2,10.2,-0.2,6
170 DRAW grid
180 FOR i=0 TO 100
```

```

190   IF d(i)>0 THEN PLOT POINTS:i/10,LOG10(d(i))
200 NEXT i
210 END

```



この結果は、10 個の $[0,1)$ 一様乱数の和を X とおくと、 $\log_{10} P(X = x)$ が x の 2 次関数であることを示している。

正規分布 $N(m, \sigma^2)$

確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとは、

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \text{ となること。}$$

確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき、 $E(X) = m, V(X) = \sigma^2$ であり、確率変数 $\frac{X-m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従う。

☆重要な視点は、期待値が 0 の正規分布が (1 より小さい定数 a があって) a^{x^2} に比例すること。そのうち、分散が 1 であるように定数 a を定めたものが標準正規分布。

標準正規分布は、ある定数 K を用いて $P(a \leq X \leq b) = K \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ と表される分布である。定数 K は $P(-\infty \leq X \leq \infty) = 1$ という要請を満たすための係数である。

定数 K は $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ を計算することで定められる。導出には複素解析が必要だけれども $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ であることが知られている。

連続型確率変数の期待値と分散

連続型確率変数 X に対し $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ となる関数 $f(x)$ を取り、 $E(X) = \int_a^b x f(x)dx, V(X) = \int_a^b (x-m)^2 f(x)dx$, (ただし、 $m = E(X)$) とする。

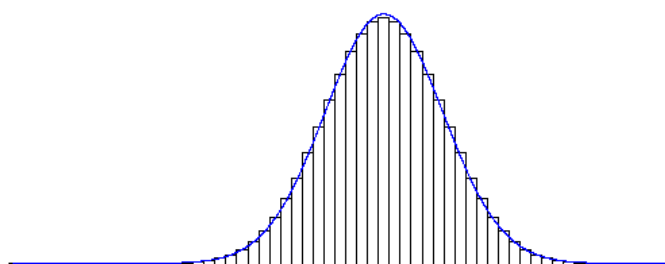
☆この定義が期待値、分散を意味することは、区分求積を知らないとう理解できない。

中心極限定理

確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が独立であって、各 X_k は平均値が m 、分散が σ^2 であるような同一の確率分布を持つとする。 n が十分大きいとき、 $X = \sum_{k=1}^n X_k$ の分布は、正規分布 $N(nm, n\sigma^2)$ に近い。従って、 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ の分布は、正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に近い。

中心極限定理の証明は難しいが、二項分布や多項分布を計算したり、乱数を用いたシミュレーションなどで近似の様子を観察することができる。

例 14 さいころを n 回振るとき、目の数の和の期待値は $\frac{7}{2}n$, 分散は $\frac{35}{12}n$ 。目の数の和の分布と $N(\frac{7}{2}n, \frac{35}{12}n)$ のグラフを描くとほぼ一致している。



練習 15 さいころを 10000 回投げるとき 1 の目が出る回数の確率分布を求めよ。

(1) $a_k = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k}$ とおくと、 $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$ であることを利用して計算する。

[ヒント] $b_k = \log a_k$ とおくと $b_{k+1} - b_k = \log \frac{n-k}{k+1} + \log \frac{p}{1-p}$, $b_0 = n \log(1-p)$, $b_n = n \log p$. 上向き, 下向きの両方向からの計算で誤差を減らす。

(2) 乱数によるシミュレーション。

(3) 正規分布で近似して求める。

中心極限定理からの帰結

定理 16 n が十分大きいとき、確率変数 $\bar{X}$ について、不等式

$$m - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < m + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

が成立する確率はおおよそ 95% である。

不等式を $\bar{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ と変形することで、 σ が既知であるときの、未知母数 m の 95% 信頼区間を求めることができる。この不等式における確率変数は $\bar{X}$ であることに注意。この不等式は、標本調査を多数回繰り返したとき、得られた信頼区間が未知母数 m を含む確率が 95% であることを意味する。

観察 17 信頼区間の幅 $\propto \frac{1}{\sqrt{n}}$

だから、たとえば、信頼区間の幅を $\frac{1}{10}$ 倍にしたければ、標本の大きさ n を 100 倍にしなければならない。

これと同様の傾向が正規分布を仮定できない場合にも観察される。

1.8.1 正規分布と区間推定

正規分布は区間推定の公式を作るのに都合のよい分布である。一般には、区間推定は難しい課題である。

例 18 母平均 m は不明だけれど、母分散 σ^2 が既知の正規母集団 $N(m, \sigma^2)$ から取った大きさ n の標本を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする。

$X_1, X_2, \dots, X_n$ は正規分布にしたがうから、 $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ も正規分布に従い、その平均は m 、分散は $\frac{\sigma^2}{n}$ である。

そこで、 $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とおくと、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うから、

$$-1.96 < \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 1.96$$

となる確率はおおよそ 95% である。不等式を

$$\bar{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

と変形することができて、これが m の 95 % 信頼区間である。

正規分布することが分かっているときには、標本平均もまた正規分布になる。他の分布のときには標本平均の分布を式で表すのは簡単ではないし、それができたとしても m について解き直すのも容易とは限らない。

新時代の記述統計

2024.08.23 白石和夫

3 記述統計

コンピュータの時代となり、従来の少数のデータから全体像を推測する推測統計から、大量のデータから情報を抽出する記述統計に重要度がシフトしている。

記述統計を的確に用い、その発展を図るためには、その数理的な裏付けに精通していることが不可欠である。線形代数と記述統計の結びつき、特に、固有値・固有ベクトルが主成分分析に果たす役割について知っておくことが求められるであろう。

3.1 期待値・分散

3.1.1 代表値

N 個の数値 $x_1, x_2, \dots, x_N$ に対し、

相加平均 $\bar{x} = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N)$,

相乗平均 $\sqrt[N]{x_1 x_2 \dots x_N}$,

調和平均 $\frac{1}{\frac{1}{N} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_N} \right)}$,

2乗平均平方根値 $\sqrt{\frac{1}{N} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)}$

2乗平均平方根値は、電力を基準に電圧の平均を計算するのに用いられる。なぜなら、電力 = 電圧 × 電流、電流 ∝ 電圧だから電力 ∝ 電圧 × 電圧。

対象を正の数とすると、

2乗平均平方根値 ≥ 相加平均 ≥ 相乗平均 ≥ 調和平均
の関係がある。

たとえば、正の2数 a, b に対して

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \left\{ \frac{1}{2}(a + b) \right\}^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{4} = \frac{1}{4}(a - b)^2 \geq 0 \text{ なので,}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \geq \frac{1}{2}(a + b)$$

3.1.2 散布度

標準偏差

N 個の数値 $x_1, x_2, \dots, x_N$ に対し、

$s_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2}$ を標準偏差という。

標準偏差は、偏差 $x_k - \bar{x}$ の2乗平均平方根値。

$s_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2$ を分散という。

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k^2 - 2\bar{x}x_k + \bar{x}^2) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2 - \bar{x}^2$$

すなわち、分散 = x^2 の平均 - (平均)²

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

3.1.3 データの標準化

$z = \frac{x - \bar{x}}{s_x}$ の式を用いて変換すると、 $\bar{z} = 1$, $s_z = 1$ 。

3.2 2変量の統計

2次元集計表や散布図は中学校で学ぶことを想定。

2次元集計表では縦の合計と横の合計が一致する。

散布図からデータの散らばりの傾向を読み取れるように。

3.2.1 2次元度数分布

$x_0 < x_1 < \cdots < x_m$, $y_0 < y_1 < \cdots < y_n$ とする。区間 $[x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$ にある点 (x, y) の個数を a_{ij} で表すとき、

区間 $[x_i, x_{i+1})$ にある点の個数は $\sum_{j=1}^m a_{ij}$, 区間 $[y_{j-1}, y_j)$ にある点の個数は $\sum_{i=1}^n a_{ij}$

3.2.2 相関係数

ある集団に属する2つの変量 x, y について、その値の組を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_N, y_N)$ とする。

$r = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(x_k - \bar{x})}{s_x} \frac{(y_k - \bar{y})}{s_y}$ を x と y の相関係数という。

$$s_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \text{ とおくと, } r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

s_{xy} を x, y の共分散という。

命題 1 $-1 \leq r \leq 1$

証明. $-1 \leq r \leq 1$ を示すために、 $-s_x s_y \leq s_{xy} \leq s_x s_y$ を示す。

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に対し、

$$|\mathbf{a}|^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad |\mathbf{b}|^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

と定めるとき、コーシー・シュワルツの不等式 $-|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ が成立することを利用する。

$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \geq 0$ を示せばよい。

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 = x^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0 \text{ だから, } x \text{ に関する 2 次方程式 } x^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 = 0$$

の解は高々 1 つなので, 判別式を D として

$$\frac{D}{4} = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leq 0$$

$$\therefore \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

この不等式において, $a_k = x_k - \bar{x}$, $b_k = y_k - \bar{y}$ とおいて N^2 で割ると,

$$\left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \right\}^2 \leq \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2 \right\} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2 \right\}$$

$$\therefore s_{xy}^2 \leq s_x^2 s_y^2$$

$$\therefore -s_x s_y \leq s_{xy} \leq s_x s_y \quad \square$$

3.2.3 回帰直線

最小 2 乗法

ある集団に属する 2 つの変量 x, y について, その値の組を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_N, y_N)$ とする。

一次関数 $y = ax + b$ で変量 x の値から y の値を推定したい。

$\sum_{k=1}^N \{y_k - (ax_k + b)\}^2$ が最小となるように a, b を定める。

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2 = s_x^2 + \bar{x}^2, \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 = s_y^2 + \bar{y}^2, \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k y_k = s_{xy} + \bar{x}\bar{y} = r s_x s_y + \bar{x}\bar{y} \quad \text{に}$$

注意すると,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{y_k - (ax_k + b)\}^2 = \{b - (\bar{y} - a\bar{x})\}^2 + s_x^2 \left(a - r \frac{s_y}{s_x} \right)^2 + s_y^2 (1 - r^2)$$

と変形できるので,

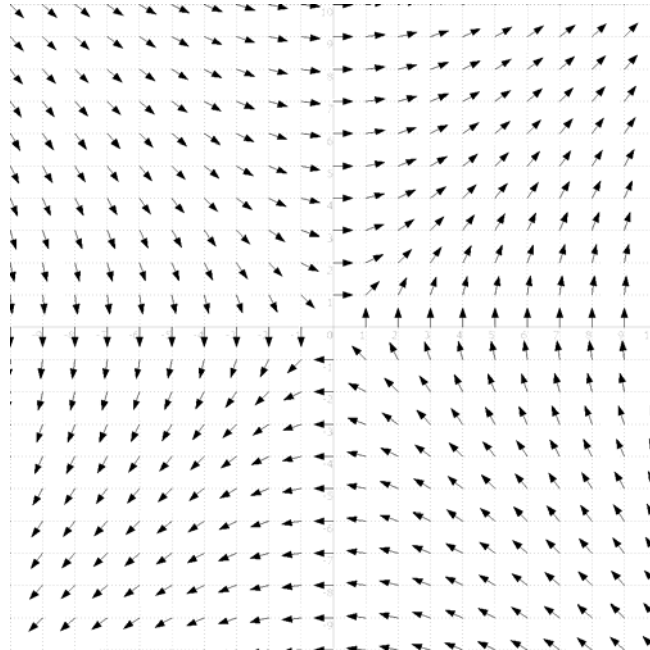
$$a = r \frac{s_y}{s_x}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \text{ と定めると } \sum_{k=1}^N \{y_k - (ax_k + b)\}^2 \text{ が最小になる。}$$

y の x への回帰直線

直線 $y = r \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}) + \bar{y}$ を y の x への回帰直線という。

3.3 固有値・固有ベクトル

観察 2 次の図は, 一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって各格子点がどの向きに移動するか, 同じ大きさの有向線分を用いて図示したものである。移動方向が原点へ向かう向き, あるいは, 原点と反対の向きとなるものを見出すことができる。



この図は次のプログラムを用いて描いた。

```

100 DATA 1,2
110 DATA 2,1
120 DIM m(2,2)
130 MAT READ m
140 SET WINDOW -10,10,-10,10
150 DRAW grid
160 FOR x=-10 TO 10
170   FOR y=-10 TO 10
180     LET xx=m(1,1)*x+m(2,1)*y
190     LET yy=m(2,1)*x+m(2,2)*y
200     IF (xx-x)^2+(yy-y)^2>0 THEN
210       LET ang=ANGLE(xx-x, yy-y)
220       DRAW arrow WITH ROTATE(ang)*SHIFT(x,y)
230     END IF
240     WAIT DELAY 0.01
250   NEXT y
260 NEXT x
280 PICTURE arrow
290   PLOT LINES: 0,0; 0.3,0
300   PLOT AREA : 0.3,0.1; 0.3,-0.1 ; 0.6,0
310 END PICTURE
320 END

```

正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, すなわち,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ を固有ベクトル, 実数 λ を固有値という。

固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{v}$ は, $(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を満たす。

$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ なので, $\det(A - \lambda E) = 0$ 。逆に $\det(A - \lambda E) = 0$ であれば, $(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ となる零でないベクトル $\mathbf{v}$ が存在する。

$\det(A - \lambda E)$ を固有多項式, $\det(A - \lambda E) = 0$ を固有方程式という。

転置行列 (transposed matrix)

行列 A に対し, 行と列を入れ換えて得られる行列を A の転置行列といい, A^T で表す。

たとえば,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ に対し, } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$v = (a, b) \text{ に対し, } v^T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

転置行列の計算公式

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A^T)^T = A$$

$$\text{実数 } k \text{ に対し, } (kA)^T = kA^T$$

Note. 転置演算 A^T は行列の積に優先する。

Note. A の転置行列を tA で表すことも多い。

内積 ベクトルの内積を転置行列を用いて表すことができる。

$$u = (a, b), v = (c, d) \text{ に対し, } u \cdot v = u v^T$$

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ に対し, } u \cdot v = u^T v$$

対称行列

正方行列 A は, $A^T = A$ となるとき対称行列と呼ばれる。

対称行列の固有値・固有ベクトル

対称行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ の固有方程式 $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = 0$ を展開して整理すると, $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ 。判別式を D とすると,

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$$

なので, 単位行列のスカラー倍でない 2 次対称行列は異なる 2 個の固有値を持つ。

その固有値を λ_1, λ_2 とし, λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ とする。

すなわち, $A^T = A$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (\lambda_1 \mathbf{v}_1)^T \mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T A^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T A \mathbf{v}_2 \\
\lambda_2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_1 \cdot \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot A \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T A \mathbf{v}_2 \\
\therefore \lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) &= \lambda_2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \\
(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) &= 0 \\
\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ より } \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= 0.
\end{aligned}$$

命題 3 単位行列のスカラー倍でない 2 次実対称行列は 2 個の異なる固有値を持つ。

命題 4 実対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する。

3.4 多変量統計解析（主成分分析）

主成分分析への入口 ある集団に属する 2 つの変量 x, y について、その値の組を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_N, y_N)$ とする。

直線 $ax + by + c = 0$ と各点 (x_k, y_k) との距離の平方の和 $\sum_{k=1}^N \frac{(ax_k + by_k + c)^2}{a^2 + b^2}$ が最小と

なるように $a : b : c$ を定める。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2 = s_x^2 + \bar{x}^2, \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 = s_y^2 + \bar{y}^2, \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k y_k = s_{xy} + \bar{x}\bar{y} \text{ を用いて,} \\
&\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(ax_k + by_k + c)^2}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{a^2 + b^2} \left(a^2 \sum_{k=1}^N x_k^2 + 2ab \sum_{k=1}^N x_k y_k + b^2 \sum_{k=1}^N y_k^2 + 2ac \sum_{k=1}^N x_k + 2bc \sum_{k=1}^N y_k + c^2 \right) \\
&= \frac{a^2 (s_x^2 + \bar{x}^2) + 2ab (s_{xy} + \bar{x}\bar{y}) + b^2 (s_y^2 + \bar{y}^2) + 2ac\bar{x} + 2bc\bar{y} + c^2}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{(c + a\bar{x} + b\bar{y})^2 - a^2\bar{x}^2 - 2ab\bar{x}\bar{y} - b^2\bar{y}^2 + a^2 (s_x^2 + \bar{x}^2) + 2ab (s_{xy} + \bar{x}\bar{y}) + b^2 (s_y^2 + \bar{y}^2)}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{(c + a\bar{x} + b\bar{y})^2 + a^2 s_x^2 + 2ab s_{xy} + b^2 s_y^2}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

$c + a\bar{x} + b\bar{y} = 0$ のとき最小。 $a : b$ を定めればよい。

以降の展開に 5 案ある。

解法 1

$a = \cos \theta, b = \sin \theta$ としておく。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(ax_k + by_k + c)^2}{a^2 + b^2} &= \frac{a^2 s_x^2 + 2ab s_{xy} + b^2 s_y^2}{a^2 + b^2} = s_x^2 \cos^2 \theta + 2s_{xy} \cos \theta \sin \theta + s_y^2 \sin^2 \theta \\
&= \frac{1}{2} s_x^2 (1 + \cos 2\theta) + s_{xy} \sin 2\theta + \frac{1}{2} s_y^2 (1 - \cos 2\theta) \\
&= \frac{1}{2} (s_x^2 + s_y^2) + \frac{1}{2} (s_x^2 - s_y^2) \cos 2\theta + s_{xy} \sin 2\theta \\
\frac{1}{2} (s_x^2 - s_y^2) &= r \cos 2\alpha, s_{xy} = r \sin 2\alpha \text{ (ただし } r > 0 \text{) とおくと,} \\
\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(ax_k + by_k + c)^2}{a^2 + b^2} &= \frac{1}{2} (s_x^2 + s_y^2) + r \cos(2\theta - 2\alpha)
\end{aligned}$$

最小となるのは、 $2\theta - 2\alpha = \pi$ 、すなわち、 $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ のとき。

このとき, $a = \cos \theta = -\sin \alpha$, $b = \sin \theta = \cos \alpha$

$\frac{1}{2}(s_x^2 - s_y^2) = r \cos 2\alpha$, $s_{xy} = r \sin 2\alpha$ より, $s_x^2 - s_y^2 = 2r(b^2 - a^2)$, $s_{xy} = 2rab$

r を消去して, $a^2 s_{xy} + abs_y^2 = abs_x^2 + b^2 s_{xy}$

Note.

$a(as_{xy} + bs_y^2) = b(as_x^2 + bs_{xy}) = ab\lambda$ とおくと

$$as_{xy} + bs_y^2 = b\lambda$$

$$as_x^2 + bs_{xy} = a\lambda$$

$$\begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

すなわち, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は共分散行列 $\begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトル。

Note2.

この直線は, 直線 $y - \bar{y} = \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x})$ ではない。

別解 (商の微分法を利用, 三角関数を回避)

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(ax_k + by_k + c)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 s_x^2 + 2abs_{xy} + b^2 s_y^2}{a^2 + b^2} = \frac{s_x^2 + 2\frac{b}{a}s_{xy} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 s_y^2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$\frac{b}{a} = t$ とおいて $f(t) = \frac{s_x^2 + 2ts_{xy} + t^2 s_y^2}{1 + t^2}$ とすると,

$$f'(t) = \frac{(2s_{xy} + 2ts_y^2)(1 + t^2) - 2t(s_x^2 + 2ts_{xy} + t^2 s_y^2)}{(1 + t^2)^2} = \frac{-2t^2 s_{xy} - 2ts_x^2 + 2ts_y^2 + 2s_{xy}}{(1 + t^2)^2}$$

$$f'(t) = 0 \text{ より } s_{xy} - ts_x^2 + ts_y^2 - t^2 s_{xy} = 0$$

$$t^2 s_{xy} + t(s_x^2 - s_y^2) - s_{xy} = 0$$

別解 2 (偏微分を利用)

$$f(a, b) = \frac{a^2 s_x^2 + 2abs_{xy} + b^2 s_y^2}{a^2 + b^2} \text{ とおく。}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{(2as_x^2 + 2bs_{xy})(a^2 + b^2) - (a^2 s_x^2 + 2abs_{xy} + b^2 s_y^2)(2a)}{(a^2 + b^2)^2} \\ &= \frac{-2b(a^2 s_{xy} - abs_x^2 + abs_y^2 - b^2 s_{xy})}{(a^2 + b^2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{同様に, } \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{-2a(-a^2 s_{xy} + abs_x^2 - abs_y^2 + b^2 s_{xy})}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 0 \text{ より } a^2 s_{xy} - abs_x^2 + abs_y^2 - b^2 s_{xy} = 0$$

別解 3 (ラグランジュの未定乗数法)

$a^2 + b^2 = 1$ の制約のもとで $a^2 s_x^2 + 2abs_{xy} + b^2 s_y^2$ を最小にしたい。

$f(a, b) = a^2 s_x^2 + 2abs_{xy} + b^2 s_y^2$, $g(a, b) = a^2 + b^2 - 1$ とおき, ラグランジュの未定乗数法を適用する。以後の計算は最も容易だが, ラグランジュの未定乗数法が成立する理由を説明するのは簡単ではない。

別解 4 (固有値, 固有ベクトル)

行列を固有値, 固有ベクトルを用いて分解する。この手法だと微積分は不要。以後, こ

れを述べる。

共分散行列の固有ベクトル

$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$ とし, $|r| < 1$ の場合を考える。

共分散行列 $\begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1, λ_2 とする。

λ_1, λ_2 は正の数である。

なぜなら, 固有多項式 $\lambda^2 - (s_x^2 + s_y^2) \lambda + s_x^2 s_y^2 - s_{xy}^2 = 0$ において 2 次方程式の解と係数の関係から

$$\lambda_1 + \lambda_2 = s_x^2 + s_y^2 \geq 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 = s_x^2 s_y^2 - s_{xy}^2 > 0 \quad (\because r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \text{ で } |r| < 1)。$$

$\lambda_1 > \lambda_2$ とし, λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ とし, $|\mathbf{v}_1| = 1, |\mathbf{v}_2| = 1$ としておく。

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(ax_k + by_k + c)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 s_x^2 + 2abs_{xy} + b^2 s_y^2}{a^2 + b^2} \text{ の最小値を求める。}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \text{ としておく。 } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 \text{ とする。 } a^2 + b^2 = 1 \text{ より, } t_1^2 + t_2^2 = 1$$

$$a^2 s_x^2 + 2abs_{xy} + b^2 s_y^2 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} A(t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} (t_1 A \mathbf{v}_1 + t_2 A \mathbf{v}_2)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} (t_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2) = t_1 \lambda_1 \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 + t_2 \lambda_2 \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \mathbf{v}_2$$

$$= t_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1^T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2^T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = t_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1^T (t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2) + t_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2^T (t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2)$$

$$= t_1^2 \lambda_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 + t_2^2 \lambda_2 \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 = t_1^2 \lambda_1 + t_2^2 \lambda_2 = t_1^2 (\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2$$

$$a^2 s_x^2 + 2abs_{xy} + b^2 s_y^2 \text{ が最小となるのは, } t_1 = 0, t_2 = 1, \text{ すなわち, } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{v}_2 \text{ のとき。}$$

3.4.1 主成分分析 (2 変数)

ある集団に属する 2 つの変量 x, y について,

その値の組を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_N, y_N)$ とする。

$(\bar{x}, \bar{y})$ を原点とする新たな座標軸 z, w を導入して,

$$\begin{pmatrix} z_k \\ w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k - \bar{x} \\ y_k - \bar{y} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

とする。ただし, $a^2 + b^2 = 1$ 。

$\sum_{k=1}^N z_k^2$ が最大となるように a, b を定めたい。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N z_k^2 &= \sum_{k=1}^N \{a(x_k - \bar{x}) + b(y_k - \bar{y})\}^2 \\ &= \sum_{k=1}^N \{a^2(x_k - \bar{x})^2 + 2ab(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) + b^2(y_k - \bar{y})^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2 + 2ab \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) + b^2 \sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2 \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k^2 = s_x^2 a^2 + 2s_{xy} ab + s_y^2 b^2 \\
&= s_x^2 a^2 + s_{xy} ab + s_{xy} ab + s_y^2 b^2 \\
&= (s_x^2 a + s_{xy} b) a + (s_{xy} a + s_y^2 b) b \\
&= \begin{pmatrix} s_x^2 a + s_{xy} b & s_{xy} a + s_y^2 b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} \text{の固有値を } \lambda, \lambda' (\lambda > \lambda') \text{ とし,}
\end{aligned}$$

λ に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ とする。

$\mathbf{v} \perp \mathbf{v}'$ なので, $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ としてよい。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \quad \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} \mathbf{v}' = \lambda' \mathbf{v}' \\
&\begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} \text{ なので,} \\
&\mathbf{v}^T \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}'^T \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} = \lambda' \mathbf{v}' \\
&\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = s \mathbf{v} + t \mathbf{v}' \text{ とする。ただし, } s^2 + t^2 = 1 \text{ とする。} \\
&\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = s^t \mathbf{v} + t^t \mathbf{v}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k^2 &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \left\{ s^t \mathbf{v} \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} + t^t \mathbf{v}' \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= (s \lambda^t \mathbf{v} + t \lambda'^t \mathbf{v}') (s \mathbf{v} + t \mathbf{v}') \\
&= s^2 \lambda + t^2 \lambda'
\end{aligned}$$

$\lambda > \lambda'$, $s^2 + t^2 = 1$ としたので,

$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k^2$ が最大となるのは $s = 1$, すなわち, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{v}$ のとき。

3.4.2 主成分分析 (3 変数)

ある集団に属する 2 つの変量 x, y, z について, その値の組を $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \dots, (x_N, y_N, z_N)$ とする。

$\begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda, \lambda', \lambda''$ ($\lambda > \lambda' > \lambda''$) とし,

$\lambda, \lambda', \lambda''$ に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを, それぞれ, $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}''$ とする。

$$w_k = a(x_k - \bar{x}) + b(y_k - \bar{y}) + c(z_k - \bar{z}) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

(ただし, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$)

とおいて, $\sum_{k=1}^N w_k^2$ が最小となるように a, b, c を定めたい。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N w_k^2 &= \sum_{k=1}^N \{a(x_k - \bar{x}) + b(y_k - \bar{y}) + c(z_k - \bar{z})\}^2 \\ &= a^2 \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2 + b^2 \sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2 + c^2 \sum_{k=1}^N (z_k - \bar{z})^2 \\ &\quad + 2ab \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) + 2ac \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(z_k - \bar{z}) + 2bc \sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})(z_k - \bar{z}) \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_k^2 &= s_x^2 a^2 + s_y^2 b^2 + s_z^2 c^2 + 2s_{xy} ab + 2s_{xz} ac + 2s_{yz} bc \\ &= s_x^2 a^2 + s_{xy} ab + s_{xz} ac + s_{xy} ab + s_y^2 b^2 + s_{yz} bc + s_{xz} ac + s_{xy} bc + s_z^2 c^2 \\ &= (s_x^2 a + s_{xy} b + s_{xz} c) a + (s_{xy} a + s_y^2 b + s_{yz} c) b + (s_{xz} a + s_{xy} b + s_z^2 c) c \\ &= \begin{pmatrix} s_x^2 a + s_{xy} b + s_{xz} c & s_{xy} a + s_y^2 b + s_{yz} c & s_{xz} a + s_{xy} b + s_z^2 c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix} \mathbf{v} &= \lambda \mathbf{v}, \quad \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix} \mathbf{v}' = \lambda' \mathbf{v}', \\ \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix} \mathbf{v}'' &= \lambda'' \mathbf{v}'' \\ \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix} \text{なので,} \\ \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix} &= \lambda \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}'^T \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix} = \lambda' \mathbf{v}', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}''^T \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix} &= \lambda'' \mathbf{v}'' \\
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= s\mathbf{v} + t\mathbf{v}' + u\mathbf{v}'' \text{ とする。ただし, } s^2 + t^2 + u^2 = 1 \text{ とする。} \\
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} &= s\mathbf{v}^T + t\mathbf{v}'^T + u\mathbf{v}''^T \\
\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_k^2 &= \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&= \left\{ s\mathbf{v}^T \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix} + t\mathbf{v}'^T \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix} + u\mathbf{v}''^T \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{xy} & s_z^2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&= (s \lambda \mathbf{v}^T + t \lambda' \mathbf{v}'^T + u \lambda'' \mathbf{v}''^T) (s\mathbf{v} + t\mathbf{v}' + u\mathbf{v}'')
\end{aligned}$$

実対称行列の固有ベクトルは直交するので,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_k^2 &= s^2 \lambda + t^2 \lambda' + u^2 \lambda'' \\
\lambda > \lambda' > \lambda'', \quad s^2 + t^2 + u^2 &= 1 \text{ としたので,} \\
\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k^2 \text{ が最大となるのは } s &= 1, \text{ すなわち, } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{v} \text{ のとき。}
\end{aligned}$$

Note.

3次元(以上)の場合は, 固有方程式が重解を持つことがある。その場合, 重複度に応じた個数の固有ベクトルを直交するように選べば, 同様の議論が成立する。

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ のとき, 固有多項式は, } \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

$$\lambda = 4 \text{ に対応する固有ベクトルは, } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \text{ に対応する固有ベクトルとして, } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の2個求まるが,}$$

$$k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ となるように } k \text{ を定めることができる。}$$

$$(-k-1)(-1) + k = 0 \text{ より, } k = -\frac{1}{2}$$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, あるいは, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は, $\lambda = 1$ に対応し直交する固有ベクトルである。

3.5 研究課題

複素数に言及しないで線形代数を教えることは可能か。

共役複素数

複素数 $\alpha = x + yi$ (x, y は実数) に対し, $\bar{\alpha} = x - yi$.
 $\alpha\bar{\alpha} = x^2 + y^2 = |\alpha|^2$, $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$

実対称行列

その成分がすべて実数である対称行列を実対称行列という。一般に, 次が成立する。

定理 5 実対称行列の固有値はすべて実数である。

証明. λ を実対称行列 $A = (a_{ij})$ の固有値とし, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ を固有ベクトルとする。

すなわち, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

$\bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$ とすると, $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$ より, $\bar{\mathbf{v}}^T A = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}^T$

$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ の両辺に左から $\bar{\mathbf{v}}^T$ をかけて, $\bar{\mathbf{v}}^T A\mathbf{v} = \lambda\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{v}$

$\bar{\mathbf{v}}^T A = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}^T$ の両辺に右から $\mathbf{v}$ をかけて, $\bar{\mathbf{v}}^T A\mathbf{v} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{v}$

$\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{v} = \bar{v}_1 v_1 + \bar{v}_2 v_2 + \cdots + \bar{v}_n v_n = |v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2$

$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ なので, $\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{v} = |v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2$ は正の実数 (0 でない)。

だから, $\lambda\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{v} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{v}$ より $\lambda = \bar{\lambda}$ なので, λ は実数。□

コンピュータによる計算

2025.02.10 白石和夫

計算しながら数学を学ぶ

いつの日にか役に立つとって数学を学ぶのは退屈なものである。数学を学んだらそれを使って実際に計算して確かめてみたい。

探究の道具

数値計算から未知の法則が見えてくることがある。数学を学び、深めるための技能として計算機を操る能力の習得を目指さなければならない。

Computational Thinking

コンピュータを学ぶのは、現実の問題を計算問題に転嫁する考え方を身に付けることが目的。

自立思考

数学を創造的思考の道具として使うためには、自立思考が欠かせない。自分の考えが正しいことを自身で判断できなければ、伝統の殻など破って先に進むことなどできない。プログラミングは自立思考を養うのに適した教材である。

論理的な表現

プログラミングは機械との対話である。論理を組み立ていく経験を積むとともに、自分の意図を正しく伝えるために曖昧さのない表現をする力が養われる。

計算を道具として使う力

計算機を道具として使うことを前提とすることで、計算機が存在しない時代には実用性のなかった数学理論が有用なものとして使われるようになってきた。大量の繰り返し計算が前提であるが、現実のコンピュータは、有限桁の近似計算によって、大量の高速計算を可能にしている。しかし、電卓の計算とは物量が大きく違い、電卓計算での経験が通用しないこともある。

★は、やや高度な内容であることを示す。当座、無視して先に進んでよい。

1 計算の利用とアルゴリズムの記述

1.1 プログラム言語

1.1.1 JIS Full BASIC

BASIC は、1964 年頃、米国ダートマス大学の J.G.Kemeny らによって開発された初学者向けのプログラム言語である。J.G.Kemeny は、スリーマイル島原発事故調査委員会の委員長を努めたことでも知られるが、数学教育の世界では、数学教育現代化の旗手として活躍したことで知られる。BASIC は数学教育の視点で作られたプログラム言語である。

BASIC には、

- “=” が計算実行の意味で使われるのを嫌い、代入文を LET で始めることにした
- 数値の型の別（整数型、実数型など）をなくした
- 数値式の文法を数学で用いられるものに近いものとした
- 行列 (matrix) 演算命令 (MAT 文) がある

などの特徴があった。

構造化プログラミングの技法などを取り入れて BASIC の完全規格として制定されたのが Full BASIC である。日本では 1993 年に JIS になっている。

Full BASIC では、上述以外にも次のような特徴がある。

- 数値は浮動小数点十進数

- 数値演算は、組込関数も含めて統一的に正確さが規定される

- グラフィックス命令が規格に含まれる

以後、Full BASIC を用いて記述する。きめ細かく定められた規格があるので、確実な動作が保証できる。また、Full BASIC は人とコンピュータとで解釈が異なってしまうことがないように注意を払った文法が採用されているので、試行錯誤で使っていくことができる（紛らわしい文を書くとは翻訳時エラーになる）。

ここでは、処理系として十進 BASIC を用い、一部、十進 BASIC 独自の拡張も利用する。特に、Full BASIC 規格はすべての行に行番号を書くことを要求しているが、十進 BASIC は行番号の省略を許しているので、行番号なしの形でプログラムを示すこともある。なお、行番号ありで示したプログラムも、実際には行番号に依存しないプログラムなので、行番号を無視してよい。

1.2 アルゴリズムの表現

アルゴリズム記述の基礎を学ぶ。

1.2.1 変数

変数とは、数値の記憶場所のこと。数学でいう変数とは微妙に意味が異なる。

変数に A, B, C, A1, A2, total などの名前を付けて識別する。

変数名

変数名は、英字に英数字を何文字か続けたもの。

変数名中の英字は、大文字・小文字の違いが無視される。

代入文

変数に値を代入するのに LET 文を用いる。

LET 文は、

LET 変数名=数値式

の形に書かれる。数値式を計算した結果が変数に代入される。

例

LET A=A+1

数値式 $A+1$ を計算して A に代入する。つまり、 A に 1 を加算する。LET 文を実行しても、等号の左右が等しくなるとは限らないことに注意。

予約語

変数名として利用できない綴りがある。それらは予約語と呼ばれる。Full BASIC の予約語は JIS で定められている。これら以外の綴りは変数名（および後に学ぶ関数名）として自由に使える。

予約語（数値変数名、数値関数名として使えない綴り）

PI,RND,MAXNUM,DATE,TIME,EXLINE,EXTYPE,CON,IDN,ZER,TRANSFORM,
NOT,ELSE,PRINT,REM

例 1 PI は予約語なので、

LET PI=3.14

は、不可。PI は円周率 π を表す定数。その値を変更して使うことはできない。

例 2 SIN は予約語ではないので、

LET SIN=0.5

は可。ただし、組込関数の $\text{SIN}(x)$ は使えなくなる。

1.2.2 数値式

加減乗除は、 $+$, $-$, $*$, $/$ 。

べき乗は、 a^b を a^b で表す。

優先順位は、べき乗、乗除、加減の順。

優先順位を変えるのに $()$ を用いる。括弧は何重にも使えるが、常に丸括弧を用いる。

Note. Full BASIC は他の多くのプログラム言語と異なる文法を採用している。通常の数学と同様、負数は括弧で括る。たとえば、“ x^{-2} ”は不可、“ $x^{(-2)}$ ”とする。

組込関数

加減乗除やべき乗の他、組込関数がある。

$\text{ABS}(x)$ x の絶対値 (absolute value)

$\text{SQR}(x)$ x の非負の平方根 (square root)

$\text{INT}(x)$ x を超えない最大の整数 (integer)
 $\text{MOD}(x, y)$ x を y で割った余り $x - y * \text{INT}(x/y)$
 $\text{SIN}(x)$ x の正弦
 $\text{COS}(x)$ x の余弦
 $\text{ACOS}(x)$ $x = \cos \theta$ となる θ
 $\text{ANGLE}(x, y)$ 原点と点 (x, y) を結ぶ半直線が x 軸の正の向きとなす角
 $\text{EXP}(x)$ 指数関数 e^x
 $\text{LOG}(x)$ 自然対数 $\log_e x$
 $\text{DEG}(x)$ $x * 180 / \pi$
 $\text{RAD}(x)$ $x * \pi / 180$
 PI 円周率 π
 その他, $\text{ASIN}(x)$, $\text{TAN}(x)$, $\text{LOG10}(x)$ など

1.2.3 入力と出力

INPUT 文

変数に値を入力するのに INPUT 文を用いる。

例

```
INPUT a, b, c
```

プログラムが実行されたら、キーボードから 3 つの数をコンマで区切って入力する（最後に Enter キーを押す）。

INPUT 文で数値式を入力することはできない。たとえば、

```
INPUT a
```

に対し、 $\text{SQR}(2)$ を入力するのは不可。

PRINT 文

PRINT 文は、数値式の計算結果を画面上に出力する。

例

```
INPUT a, b, c
```

```
PRINT (-b-SQR(b^2-4*a*c))/(2*a), (-b+SQR(b^2-4*a*c))/(2*a)
```

```
END
```

この例のように、PRINT 文に、コンマで区切って複数の数値式を書いてよい。そのとき、計算結果は同じ行に表示される。

Note. $*$ と $/$ の優先順位は同じなので、 $2*a$ で割ることを $/2*a$ と書いてはいけない。

常用対数 $\log_{10} x$

正の数 M を入力すると、 $10^x = M$ となる x を出力するプログラム。常用対数 $\log_{10} x$ を求めるのに、組込関数 $\text{LOG10}(x)$ を用いる。

```
INPUT M
```

```
PRINT LOG10(M)
```

```
END
```

注意 数学的には $10^{\log_{10} x} = x$ であるが、コンピュータの計算は有限小数による近似なので、丸め誤差のために $10^{\log_{10}(x)} = x$ が成立しないことがある。

例

次のプログラムを十進 BASIC で実行すると、20 行の実行結果は 6 になるのに、30 行の計算結果は 2.E-16 となる。2.E-16 は、 2.0×10^{-16} を意味する。20 行で 6 が表示されるのは、計算結果が有効数字 15 桁に丸めて表示されるからである。実際の計算結果は、オプションメニューの「数値」で「表示桁数を多く」にチェックを入れて実行すると表示される。

```
10 LET x=6
20 PRINT 10^LOG10(x)
30 PRINT 10^LOG10(x)-x
40 END
```

変数への代入とは？

変数に代入されるのは、計算結果の数値。数式が代入されるのではない（数学と違う）。

問 1 次のプログラムを実行したらどうなるか？

```
LET x=1
LET y=2*x+3
PRINT y
LET x=3
PRINT y
END
```

例題 2 三角形 ABC の 3 辺の長さ a, b, c を入力して、 $\angle A$ の大きさを求める。

[ヒント] $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

弧度法を学んでいない生徒を対象とするときは、プログラムの初めに

OPTION ANGLE DEGREES

を書いて角度の単位を「度」に変える。

解

```
OPTION ANGLE DEGREES
INPUT a,b,c
PRINT ACOS((b^2+c^2-a^2)/(2*b*c))
END
```

1.2.4 場合分け

```
IF 条件 THEN
.....
END IF
```

条件が成立したとき, …… を実行する。

IF 条件 THEN

……1

ELSE

……2

END IF

条件が成立したとき, ……1 を実行し, そうでないとき ……2 を実行する。

実行する文が 1 文のみのとき

IF 条件 THEN ……

のように書けることがある。このとき, END IF を書かない。

1.2.5 論理式 (条件の書き方)

等式・不等式 (大小比較)

数学	BASIC
$a = b$	$a=b$
$a < b$	$a<b$
$a > b$	$a>b$
$a \leq b$	$a<=b$
$a \geq b$	$a>=b$
$a \neq b$	$a<>b$

注意 $a<x<b$ のように大小比較を続けて書くことはできない (翻訳時に誤りとなる)。
 $a<x$ AND $x<b$ のように AND を用いて書く。また, 数学ではコンマで区切って書かれた等式, 不等式において, コンマが意味するものは「かつ」だったり「または」だったりする。その意味を正しく解釈して, AND, OR を用いて書く。

★ 大小比較の結果を真偽値という数値として扱うプログラム言語も多い。真偽の数値への対応はプログラム言語によってさまざま (たとえば, Microsoft BASIC は, 真が -1 , 偽が 0) であるが, その種のプログラム言語では, “ $a<x<b$ ” は, “ $a<x$ の真偽値が b より小” と解釈されるかも知れない。

論理式 AND, OR, NOT

数学	BASIC
p かつ q	p AND q
p または q	p OR q
p でない	NOT p

結合の優先順位は NOT, AND, OR の順。AND は OR より強い。

() を用いて結合順位を変えることができる。たとえば, “ p OR q ” の否定は, “NOT (p OR q)”。括弧を省いて “NOT p OR q ” と書くと “(NOT p) OR q ” の意味になる。

練習 3 4 で割り切れない年は平年で, 4 で割り切れる年は, 100 で割り切れないかまたは

400 で割り切れるときうるう年で、それ以外は平年である。たとえば、1900 年は平年、2000 年はうるう年。西暦年 y を入力すると、平年かうるう年か答えるプログラムを作る。

[ヒント] a を b で割った余りは、組込関数 $\text{MOD}(a, b)$ で求まる。

```

INPUT y
IF _____ THEN
    PRINT "うるう年"
ELSE
    PRINT "平年"
END IF
END

```

★ AND, OR の短絡評価

p AND q で p が偽であるときには q をテストしない。たとえば、 $x=0$ のとき

```
IF x<>0 AND 1/x>2 THEN ...
```

を実行すると、 $1/x>2$ をテストせずに先に進む。

同様に、 p OR q で p が真であるときには q をテストしない。たとえば、 $x=0$ のとき、

```
IF x=0 OR 1/x<2 THEN ...
```

を実行すると $1/x<2$ はテストせずに先に進む。

1.2.6 繰り返し

無限ループ

```
DO
```

```
.....
```

```
LOOP
```

..... を繰り返し実行する。

例

```
LET A=1
```

```
DO
```

```
    PRINT A
```

```
    LET A=A+1
```

```
LOOP
```

1 ずつ加えた数を無限に出力し続ける。

繰り返しを止める条件を指定する

```
IF 条件 THEN EXIT DO
```

条件が成立したら繰り返しを抜ける。

例

```
LET A=1
DO
  IF A>10 THEN EXIT DO
  PRINT A
  LET A=A+1
LOOP
END
```

1～10 まで出力して停止する。

DO UNTIL ... LOOP

数学に関する計算手順だと DO 行の直後に繰り返し条件を指定すると都合のよいことが多い。上の例と同じことを次のように書く。

```
LET A=1
DO UNTIL A>10
  PRINT A
  LET A=A+1
LOOP
END
```

★ DO WHILE ... LOOP

繰り返しを抜ける条件の代わりに繰り返しを継続する条件を書くこともできる。

WHILE p は, UNTIL NOT p と同じ意味。

```
LET A=1
DO WHILE A<=10
  PRINT A
  LET A=A+1
LOOP
END
```

コラッツ予想 ($3n + 1$ 問題)

自然数 n に対し, 偶数であれば 2 で割り, 奇数であれば 3 倍して 1 を加える操作を繰り返すと, いずれ 1 になると予想されている。すべての自然数に対し正しいかどうかは未解決。

```
INPUT n
DO UNTIL n=1
  IF MOD(n,2)=0 THEN
    LET n=n/2
  ELSE
    LET n=3*n+1
  
```

```

END IF
PRINT n
LOOP
END

```

注意 計算途中で数値が正しく表現できる範囲にあるかの確認が必要。十進 BASIC の十進モードだと正確さが保てるのは $1E16$ までで、それを越えると正しく扱えない。十進 BASIC の場合は、有理数モードで実行することを推奨する。

例題 4 座標平面上，はじめ，原点で x 軸の正の向きに動くように待機している点 P が，指定された距離 r だけ，また，指定された角度 a だけ向きを変えて進む。角度は反時計まわりに測るものとする。この動きを何回か繰り返したとき，原点からどれだけ離れ，また， x 軸の正の向きを始線として測るときどの角度にいるだろうか。

解 r, a を繰り返し入力する。入力を終わるときは， $0, 0$ を入力するものとする。

現在地点を x, y ，現在の進行方向を t で表す。角度 a が入力されたら，現在の進行方向 t に a を足す。そうすると， x 軸方向に $r \cdot \cos(t)$ ， y 軸方向に $r \cdot \sin(t)$ 進むことになる。

```

100 OPTION ANGLE DEGREES
110 LET x=0
120 LET y=0
130 LET t=0
140 DO
150     INPUT r,a
160     IF r=0 AND a=0 THEN EXIT DO
170     LET t=t+a
180     LET x=x+r*COS(t)
190     LET y=y+r*SIN(t)
200 LOOP
210 PRINT "r="; SQR(x^2+y^2), "θ="; ANGLE(x,y)
220 END

```

Note1. PRINT 文の出力項目を区切る文字にコンマとセミコロンがある。セミコロンのみで区切ると，続けて出力する。

Note2. ★ このプログラムは，結果が $r=0$ となるとき， $\text{ANGLE}(0,0)$ を計算しようとしてエラーになる。それが気になる場合は，

```

210 IF x=0 AND y=0 THEN
220     PRINT "r=";0
230 ELSE
240     PRINT "r="; SQR(x^2+y^2), "θ="; ANGLE(x,y)
250 END IF
260 END

```

のように書き換える。210 行の条件を $x=y=0$ と書けないことに注意。Full BASIC だと “ $x=y=0$ ” は翻訳時にエラーになるけれども、大小比較の結果を真偽値として扱う言語で “ $x=y=0$ ” を IF 文に書くと、 $(x=y \text{ の真偽値})=0$ の意味に解釈されるので注意。

参考 ★ 航海術の世界では、真北の方角を基準として時計まわりに方位角を定義する。 x 軸、 y 軸の正の向きを、それぞれ、東、北に対応させて数学の流儀で測った角を θ 、航海術における方位角を ϕ とすると、 $\phi = 90^\circ - \theta$ の関係にある。

1.2.7 FOR~NEXT

```
LET A=○
```

```
DO UNTIL A>□
```

```
.....
```

```
LET A=A+1
```

```
LOOP
```

の形の繰り返しを用いる機会が多い。同様の内容を

```
FOR A=○ TO □
```

```
.....
```

```
NEXT A
```

で表現する。

★ DO~LOOP と FOR~NEXT の違い

FOR~NEXT で □ に数値式を書いたとき、その値は、繰り返し開始時点で計算され、繰り返しの実行中、その値が継続して用いられる。繰り返しの途中で □ の値を変えて繰り返し条件を変えようとしてもできない。

例

```
LET N=10
```

```
FOR A=1 TO N
```

```
PRINT A
```

```
LET N=1
```

```
NEXT A
```

は、1 から 10 までを出力する。

一方、

```
LET N=10
```

```
LET A=1
```

```
DO UNTIL A>N
```

```
PRINT A
```

```
LET A=A+1
```

```
LET N=1
```

```
LOOP
```

は、1 を出力して終わる。

1.3 初歩的な算法

1.3.1 数列の和と積

数列の和 Σ

n を入力すると $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}$ を計算するプログラムを作ろう。

BASIC で $\sqrt{k}$ は SQR(k) であるが、

PRINT 1+SQR(2)+SQR(3)+ $\cdots$ +SQR(n)

と書いても認識しない。和を収納するための変数を一つ用意し、以下のように加算していく。

LET t=0

LET t=t+SQR(1)

LET t=t+SQR(2)

LET t=t+SQR(3)

.....

LET t=t+SQR(n)

n が確定していれば必要な行数だけコピーして書けばよいのだけれど、 n が未定の場合、加算するための文を新たな変数 k を用いて

LET t=t+SQR(k)

と一般化し、この文を k の値を 1 から n まで変化させて実行すればよい。

10 INPUT n

20 LET t=0

30 FOR k=1 TO n

40 LET t=t+SQR(k)

50 NEXT k

60 PRINT t

70 END

練習 5 自然数 n を入力すると、 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ を出力するプログラムを作れ。

[ヒント] 初期値として 1 を与えた変数に 1,2,3, $\cdots$, n を順にかけていく。

順列の数 ${}_nP_r$ ${}_nP_r = n \times (n-1) \times \cdots (n-r+1)$

${}_nP_r$ は、 $n-0, n-1, \cdots, n-(r-1)$ の r 個の数の積で、

0 から番号をつけると、 $k=0, 1, \cdots, r-1$ で k 番目の数は、 $n-k$

1 から番号をつけると、 $k=1, 2, \cdots, r$ で k 番目の数は、 $n-k+1$

0 から番号をつける考え方のとき

10 INPUT n,r

20 LET P=1

30 FOR k=0 TO r-1

40 LET P=P*(n-k)

```

50 NEXT k
60 PRINT P
70 END

```

1 から番号をつける考え方のとき

```

10 INPUT n,r
20 LET P=1
30 FOR k=1 TO r
40     LET P=P*(n-k-1)
50 NEXT k
60 PRINT P
70 END

```

Note. 上のプログラムは、いずれも、 r に 0 を代入すると、FOR～NEXT の繰り返し部分は 1 回も実行されず、答は 1 になる。数学では ${}_nP_0 = 1$ と考えるので、FOR～NEXT のこの性質は数学との相性がよい。

問 6 数学では、 $0! = 1, \sum_{k=1}^0 a_k = 0$ と考えるのが普通。上の各例、練習のプログラムがこの定義にあっているか検証せよ。

1.3.2 数列の漸化式

$a_0 = 3, a_n = 2a_{n-1} + 4$ で定義される数列の第 1 項～第 10 項までを計算するプログラムを作ろう。

変数 a に初期値として 3 を代入しておき、その値を 2 倍して 4 を加える計算を 10 回繰り返せばよい。

```

10 LET a=3
20 FOR n=1 TO 10
30     LET a=2*a+4
40     PRINT n,a
50 NEXT n
60 END

```

$a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 4$ で定義される数列の第 1 項～第 10 項を計算するプログラムは、

```

10 LET a=3
20 FOR n=1 TO 10
30     PRINT n,a
40     LET a=2*a+4
50 NEXT n
60 END

```

考察 1つ目のプログラムでは、FOR 文の次の行 (30 行) の実行前の a は a_{n-1} 、2つ目のプログラムでは、FOR 文の次の行 (30 行) の実行前の a は a_n になっている。そして、LET $a=2*a+4$ の実行で世代交代する。

次の漸化式の計算方法を考えてみよう。

練習 7 数列 $\{a_n\}$ の第 1 項～第 10 項を計算するプログラムを作れ。

$$(1) a_1 = 3, a_{n+1} = na_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(2) a_1 = 3, a_n = na_{n-1} + 2 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

[ヒント] (1) は, 3, 5, 12, $\dots$, (2) は, 3, 8, 26, $\dots$

1.3.3 配列 (添字付き変数)

上の方法で数列の漸化式は計算できるけれども、あとで途中の数を使うことができない。番号のついた変数を用意して、それを利用して計算すると、計算結果を残し、あとで使うこともできるようになる。

BASIC では、番号の付いた変数のことを添字 ^{そえじ}付き変数といい、その全体を配列という。配列を使うためには、配列名とともにその大きさを DIM 文であらかじめ宣言しておく。DIM 文には、DIM に続けて配列名を書き、添字の最後の数を () で括弧で書く。DIM は、大きさを意味する英語 dimension の略。

例

DIM a(20)

上のように宣言すると、 $a(1), a(2), a(3), \dots, a(20)$ の全部で 20 個の変数を使える。

先ほどの漸化式のように、添字 0 に対応する変数も必要な場合は、

DIM a(0 TO 20)

のように DIM 文を書く。

例

```
10 DIM a(0 TO 20)
20 LET a(0)=3
30 FOR k=1 TO 20
40   LET a(k)=2*a(k-1)+4
50   PRINT k,a(k)
60 NEXT k
70 END
```

添字付き変数は、フィボナッチ数列のようにやや複雑な漸化式で定義された数列の計算にも便利である。

フィボナッチ数列

フィボナッチ数列 $f_0 = 1, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} (n = 2, 3, 4, \dots, 20)$ を計算する。

```
10 DIM f(0 TO 20)
20 LET f(0)=1
```

```

30 LET f(1)=1
40 FOR k=2 TO 20
50   LET f(k)=f(k-1)+f(k-2)
60   PRINT k,f(k)
70 NEXT k
80 END

```

練習 8 フィボナッチ数列 $\{f_k\}$ に対し, 数列 $\left\{\frac{f_{k+1}}{f_k}\right\}$ を計算せよ (近似小数で求める)。気づくことは何か?

練習 9 (フィボナッチ数列の和) フィボナッチ数列 $\{f_k\}$ に対し, $s_n = 1 + \sum_{k=1}^n f_k$ で定義される数列 $\{s_n\}$ を計算せよ。何か, 気づくことはないだろうか。

練習 10 フィボナッチ数列 $\{f_k\}$ に対し, $a_n = \sum_{k=1}^n f_{2k-1}$, $b_n = \sum_{k=1}^n f_{2k}$ で定義される数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を計算せよ。

1.3.4 2次元配列

添字を 2 つ持つ配列を用いることもできる。

例

```
DIM m(3,4)
```

このように宣言すると,

```
m(1,1),m(1,2),m(1,3),m(1,4),
```

```
m(2,1),m(2,2),m(2,3),m(2,4),
```

```
m(3,1),m(3,2),m(3,3),m(3,4)
```

の 12 個の添字付き変数が見える。

パスカルの三角形

組合せの数 ${}_nC_r$ は次の漸化式で計算できる (パスカルの三角形)。

$${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$$

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r \quad (0 < r < n)$$

次のように 2 次元配列を用いて計算できる。

```

100 DIM C(10, 0 TO 10)
110 FOR n=1 TO 10
120   LET C(n,0)=1
130   FOR r=1 TO n-1
140     LET C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r)
150   NEXT r
160   LET C(n,n)=1
170 NEXT n

```

```

180 FOR n=1 TO 10
190   FOR r=0 TO n
200     PRINT C(n,r);
210   NEXT r
220   PRINT
230 NEXT n
240 END

```

実行結果

```

1  1
1  2  1
1  3  3  1
1  4  6  4  1
1  5 10 10 5 1
1  6 15 20 15 6 1
1  7 21 35 35 21 7 1
1  8 28 56 70 56 28 8 1
1  9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

```

PRINT 文で項目をセミコロンで区切って書くと詰めて出力される。また、PRINT 文の末尾にセミコロン（またはコロン）を書くと改行しない。

また、220 行のように PRINT だけ書くと、改行だけ実行する。

練習 11 n 個の変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ に関する方程式 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ の非負整数解の個数を ${}_nH_r$ で表す。たとえば、 $x_1 + x_2 = 3$ の非負整数解は、 $(x_1, x_2) = (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ なので、 ${}_2H_3 = 4$ 。

(1) 次の漸化式が成立することを示せ。

$${}_1H_r = 1, {}_nH_0 = 1, {}_nH_r = {}_nH_{r-1} + {}_{n-1}H_r \quad (n \geq 2, r \geq 1)$$

(2) 上記を用いて ${}_nH_r$ を計算するプログラムを作れ。

ただし、 $n = 1, 2, \dots, 10, r = 0, 1, 2, \dots, 10$ とする。

1.4 曲線の描画

1.4.1 数表の作成

FOR～NEXT において、FOR 文に変数の増分を書くことができる。

例

```

10 FOR x=0 TO 1 STEP 0.1
20   PRINT x,SQR(x)
30 NEXT x
40 END

```

FOR 変数の増分は、FOR 文の末尾に STEP 句を書いて指定する。
この例の場合、 x の値を 0 から 1 まで 0.1 刻みで増やしながら繰り返す。

1.4.2 関数のグラフ

関数 $y = x^3 - 3x + 1$ のグラフを描くプログラム

```
SET WINDOW -5,5,-5,5
DRAW GRID
SET POINT STYLE 1
FOR x=-5 TO 5 STEP 0.001
    PLOT POINTS: x,x^3-3*x+1
NEXT x
END
```

Full BASIC では、グラフィックス画面は正方形。

SET WINDOW 文で仮想的な座標系を設定して利用する。

SET WINDOW 文には、左端、右端、下端、上端の順に各座標を書く。

DRAW GRID は、図でグレーで描画されている座標格子を描く。

GRID は十進 BASIC 独自の組込み絵定義なので、純粋な Full BASIC の場合、GRID の定義部を別途書く必要がある。

SET POINT STYLE 1 は、PLOT POINTS 文で描かれる描点の形状を最小の点に変える命令。SET POINT STYLE を実行しないとき、描点の形状は*。

PLOT POINTS 文は、指定された座標に点を描く。座標は、 x 座標、 y 座標の順にコンマで区切って書く。PLOT POINTS と座標対の間にコロンを書く。



1.4.3 DEF 文

次に示す例のように関数 $f(x)$ を数式で定義して用いることができる。

```
DEF f(x)=x^3-3*x+1
SET WINDOW -5,5,-5,5
```

```

DRAW GRID
SET POINT STYLE 1
FOR x=-5 TO 5 STEP 0.001
  PLOT POINTS: x,f(x)
NEXT x
END

```

1.4.4 例外状態処理

プログラム実行中に零除算や桁あふれなどのエラーが起これと、プログラムは実行を停止する。零除算や桁あふれなどのエラーが起きたとき、プログラムを正常に続行させるために、**例外状態処理**を用いる。零除算や桁あふれなど、プログラム実行中に起こるエラーを、**例外**という。

例外処理区は、次の形に書かれる。

```

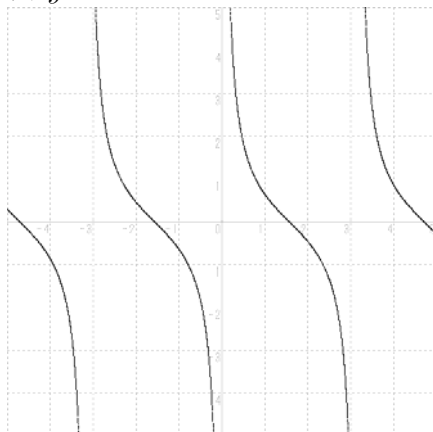
WHEN EXCEPTION IN
  .....
USE
  .....
END WHEN

```

動作の説明

通常、USE 行と END WHEN 行の間は実行されない。WHEN EXCEPTION IN 行と USE 行の間で例外が起これと、USE 行と END WHEN 行の間に書かれた文を実行して先に進む。

例 $y = \cot x$ のグラフ



```

DEF f(x)=COT(x)
SET WINDOW -5,5,-5,5
DRAW GRID
SET POINT STYLE 1
FOR x=-5 TO 5 STEP 0.001
  WHEN EXCEPTION IN
    PLOT POINTS: x,f(x)

```

```

USE
END WHEN
NEXT x
END

```

例外状態処理がないと， $\text{COT}(0)$ を計算するところで実行が止まってしまう。

練習 12 次の関数のグラフを描け。

$$(1) y = x \sin \frac{1}{x} \quad (-2 \leq x \leq 2) \quad (2) y = \frac{\sin x}{x} \quad (-2 \leq x \leq 2) \quad (3) y = \sin \frac{1}{x} \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

1.4.5 媒介変数表示の曲線

例 リサージュ曲線 $y = \cos \theta, y = \sin \left(3\theta + \frac{\pi}{6} \right)$ を描く。

```

SET WINDOW -1,1,-1,1
DRAW GRID
SET POINT STYLE 1
FOR t=0 TO 2*PI STEP PI/1440
  LET x=COS(t)
  LET y=SIN(3*t+PI/6)
  PLOT POINTS: x, y
NEXT t
END

```

1.4.6 極座標

極座標で $r = f(\theta)$ と表示された曲線を描く。

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の関係を利用する。

例 $r = \sin \frac{2}{3}\theta$

θ の変域を考えて描く。 $0 \leq \theta \leq 6\pi$

```

SET WINDOW -1,1,-1,1
DRAW grid
SET POINT STYLE 1
FOR t=0 TO 2*PI STEP PI/720
  LET r=SIN(2*t)
  PLOT POINTS:r*COS(t),r*SIN(t)
NEXT t
END

```

例 レムニスケート $r^2 = 2 \cos 2\theta$

$2 \cos 2\theta < 0$ のときをどうするか。例外状態処理にまかせてしまう手もある。


```

SET WINDOW -2,2,-2,2
DRAW grid
SET POINT STYLE 1
FOR t=0 TO 2*PI STEP PI/7200
  WHEN EXCEPTION IN
    LET r=SQR(2*COS(2*t))
    PLOT POINTS:r*COS(t),r*SIN(t)
  USE
END WHEN
NEXT t
END

```

練習 13 極方程式 $r = 1 + s \cos \theta$ で表される曲線をリマソンという。定数 s を変化させたとき、曲線はどう変わるか。

1.5 数値計算（近似計算）

1.5.1 桁落ち

微分係数

関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

で定義されている。数値計算で、 Δx を 0 に近づけたときの収束の様子を観察してみたい。

たとえば、 $f(x) = \sqrt{x}$ のとき、 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ だから $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \div 0.353553390593274$

$\frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ は、 Δx を 1, 0.1, 0.01, 0.001 のように 0 に近づけていったらこの値に近づくはず。

```

10 DEF f(x)=SQR(x)
20 LET a=2
30 FOR k=1 TO 15
40   LET dx=10^(-k)
50   PRINT dx,(f(a+dx)-f(a))/dx
60 NEXT k
70 END

```

実行結果は、

.1	.349241122458488
.01	.35311255026876
.001	.3535092074646
.0001	.353548971286
.00001	.35355294866

.000001	.3535533464
.0000001	.353553386
.00000001	.3535534
.000000001	.3535534
.0000000001	.353554
.00000000001	.35356
.000000000001	.3536
.0000000000001	.354
.00000000000001	.36
.000000000000001	0

途中、0.3535534 まで正しい値に近づくけれども、その後、正しい数値から離れてしまっている。その様子を詳しく調べてみよう。

十進 BASIC は、数値変数は 15 桁の精度を持つが、数値計算自体はそれよりも高い精度で実行される。通常、計算結果は 15 桁に丸めて表示されるけれども、オプション・メニューの「数値」で、「表示桁数を多く」にチェックを入れると、本来の計算結果が表示される。その状態で次のプログラムを実行してみよう。

```

10 DEF f(x)=SQR(x)
20 LET a=2
30 FOR k=2 TO 20
40   LET dx=10^(-k)
50   PRINT k, dx, (a+dx)-a, f(a+dx), f(a), (f(a+dx)-f(a))/dx
60 NEXT k
70 END

```

実行結果は省く。

$k=19$ のとき、 $(a+dx)-a$ の値は 0 となっている。これは、 dx が小さすぎるので $a+dx$ を計算すると a と同じ値になってしまうことを意味している。

しかし、 $k=17$ のとき、 $(a+dx)-a$ は 0 ではないから、 $a+dx$ と a は異なる。けれども、 $f(a+dx)$ と $f(a)$ の計算結果はどちらも 1.414213562373095 と同じである。だから、このときも、 $f(a+dx)-f(a)$ は 0 となる。

次に、 $k=14$ のときを考えよう。このとき、 $f(a+dx)=1.4142135623730986$,

$f(a)=1.414213562373095$ で、異なるのは最後の 2 桁に過ぎない。

先の計算結果は、そのような事情を反映している。

この例のように、丸められた 2 数の減法において、その 2 数が近い数であるときに有効数字の桁数が減ってしまう現象を『桁落ち』という。桁落ちは、コンピュータを利用する数値計算において留意すべきことのひとつである。

問 14 Full BASIC では、プログラムのはじめに

OPTION ARITHMETIC NATIVE

を書くと CPU 固有の浮動小数演算（通常、2 進小数）に変わる。2 進小数演算で、 Δx を $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots$ のように 0 に近づけていったときの計算結果について調べよ。

1.5.2 平方根

$a > 1$ のときを考える。縦が 1, 横が a の長方形の面積は a 。面積を変えずに縦, 横の長さを近づけていく。

数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を $x_1 = 1, y_1 = a, x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, y_{n+1} = \frac{a}{x_{n+1}}$ と定めれば, $x_n y_n = a$ となっている。ここで, $|x_n - y_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ であれば, $x_n \rightarrow \sqrt{a}, y_n \rightarrow \sqrt{a}$ 。

```

10 INPUT a
20 LET x=1
30 LET y=a
40 DO UNTIL ABS(x-y)/x<1E-14
50   LET x=(x+y)/2
60   LET y=a/x
70   PRINT x,y
80 LOOP
90 END

```

実行結果 (2 を入力)

```

? 2
1.5          1.33333333333333
1.41666666666667 1.41176470588235
1.41421568627451 1.41421143847487
1.41421356237469 1.4142135623715
1.4142135623731  1.41421356237309

```

40 行右端の定数 1E-14 は, 計算機の計算精度に応じて修正が必要。

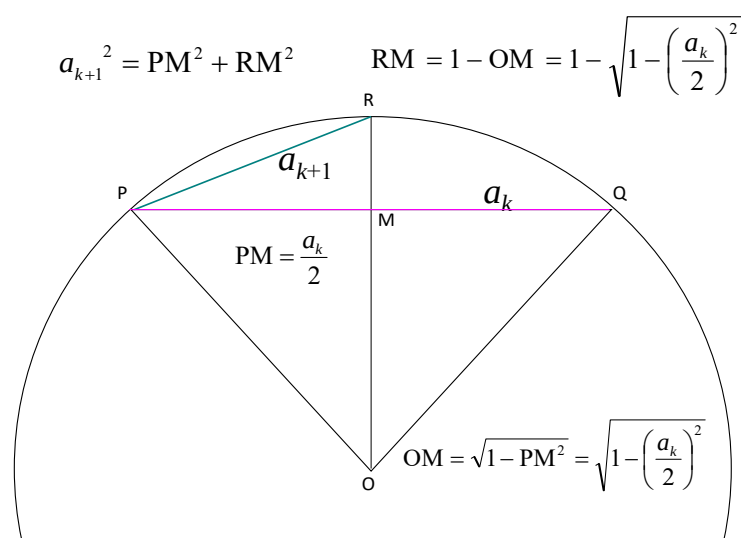
★ $\sqrt{a}$ は, 2 次方程式 $x^2 - a = 0$ の解なので, ニュートン法で近似計算できる。上で得られた近似式は, 実質, ニュートン法から得られるものと同じ。

1.5.3 円周率 π

加減乗除を用いて平方根の計算ができることが分かった。加減乗除と開平算を用いて, 円周率 π の近似値を求める方法を考えよう。

三平方の定理から導く

半径 1 の円に内接する正 2^k 角形の 1 辺の長さを a_k , 周の長さの半分を l_k とする ($k = 2, 3, 4, \dots$)。



$$a_2 = \sqrt{2}$$

$$a_{k+1}^2 = \left(\frac{a_k}{2}\right)^2 + \left\{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_k}{2}\right)^2}\right\}^2$$

$$l_k = 2^{k-1} a_k$$

$$s_k = a_k^2 \text{ とおくと,}$$

$$s_2 = 2$$

$$s_{k+1} = \frac{s_k}{4} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{s_k}{4}}\right)^2$$

$$l_k = 2^{k-1} \sqrt{s_k}$$

$k = 3, 4, 5, \dots, 30$ に対し l_k を計算するプログラムを作ると,

10 OPTION ARITHMETIC NATIVE

20 LET s=2

30 FOR k=3 TO 30

40 LET s=s/4+(1-SQR(1-s/4))^2

50 PRINT 2^(k-1)*SQR(s)

60 NEXT k

70 END

10 行の OPTION ARITHMETIC NATIVE は, 2 進演算を行わせるのが目的。50 行で $2^{(k-1)}$ を計算しているので 2 進演算のほうが誤差が少ない。

問 15 (1) $s_{k+1} = 2 - \sqrt{4 - s_k}$ と変形できることを示せ。

(2) $s_{k+1} = \frac{s_k}{2 + \sqrt{4 - s_k}}$ と変形できることを示せ。

(3) (1),(2) で求めた漸化式を利用して l_k を計算し, 計算結果について考察せよ。

半角の公式を利用する

半角の公式 $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$ を利用すると,

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$ から出発して, $\cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{8}, \cos \frac{\pi}{16}, \dots$ を計算できる。

半径 1 の円に内接する正 2^n 角形の周の長さの半分は $2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$ である。これらの事実を用いて, 加減乗除と開平算のみを用いて円周率 π の近似値を求める。

問 16 (1) $c_n = \cos \frac{\pi}{2^n}$ とおくとき, c_n に関する漸化式を求め, $\cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{8}, \cos \frac{\pi}{16}, \dots$ を計算するプログラムを作れ。

(2) 2 倍角の公式から $\sin \theta = \frac{\sin 2\theta}{2 \cos \theta}$ である。 $s_n = \sin \frac{\pi}{2^n}$ とおくとき, s_{n-1} と c_n から s_n を計算する数式を求め, それを利用して $2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$ を計算するプログラムを作れ。

1.6 整数

1.6.1 ユークリッドの互除法

最大公約数とは

2 数 a, b の最大公約数を $\text{GCD}(a, b)$ で表す。

d が a の約数であるとは, $a = dn$ となる整数 n が存在すること。

d が 2 数 a, b の公約数であるとは, $a = dm, b = dn$ となる整数 m, n が存在すること。

2 数 a, b の最大公約数とは, a, b の公約数のうち, 最大の数。

余りを考える割算 (整除)

$b > 0$ とする。 a を b で割った商を q , 余りを r とすると, q は整数で, $a = bq + r, 0 \leq r < b$ 。

Note. 「余りを考える割算」と呼ぶことが多いが, 本質は商を整数に限定すること。「整除」ということもあるが, 除数や被除数を整数に限定しない。

例 1.2 を 0.5 で割った商は 2, 余りは 0.2

互除法の原理

定理 17 $b > 0$, a を b で割った余りを r とするとき,

$$d \text{ が } a, b \text{ の公約数} \Leftrightarrow d \text{ が } b, r \text{ の公約数}$$

証明. 容易 (a を b で割った商を q とおくと, $a = bq + r$) □

この定理は, a, b の公約数全体の集合と b, r の公約数全体の集合が一致することを意味する。

だから, $\text{GCD}(a, b)$ が存在すれば, $\text{GCD}(a, b) = \text{GCD}(b, r)$

特に, a, b がともに整数で $b > 0$ であれば, r を a を b で割った余りとするとき,

$$\text{GCD}(a, b) = \text{GCD}(b, r)$$

互除法による最大公約数の計算

$a > 0$ のとき $\text{GCD}(a, 0) = a$ であることを利用する。

例 $\text{GCD}(32, 18) = \text{GCD}(18, 14) = \text{GCD}(14, 4) = \text{GCD}(4, 2) = \text{GCD}(2, 0) = 2$

コンピュータで計算する

a を b で割った余りを $a \bmod b$ で表す。また、変数への代入を $\leftarrow$ で表す。

2変数 a, b の値を, $(a, b) \leftarrow (b, a \bmod b)$ のように更新することを繰り返して, $b = 0$ になったら a が求める最大公約数。

BASIC では, a を b で割った余りを MOD 関数で求める。 $\text{MOD}(a, b) = a - b * \text{INT}(a/b)$

```
10 INPUT a,b
20 DO UNTIL b=0
30   LET r=MOD(a,b)
40   LET a=b
50   LET b=r
60 LOOP
70 PRINT a
80 END
```

30 行で $\text{MOD}(a, b)$ を計算して変数 r に保存しておき, 50 行の代入文で b に代入する。

補足

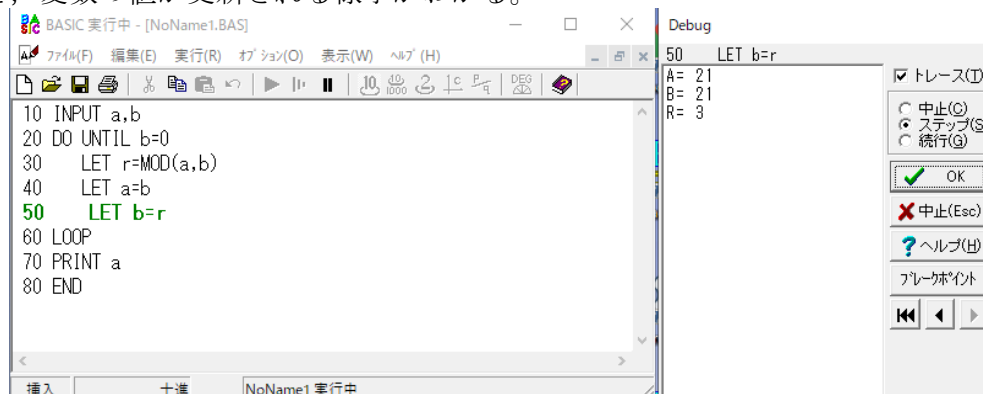
Full BASIC の MOD 関数は小数に対しても定義されているので, 上のプログラムに小数を入力しても正しく動作する。

Note.

「余りが 0 になったら, そのときの除数が最大公約数」と考えることもある。その場合のプログラムは,

```
10 INPUT a,b
20 DO
30   LET r=MOD(a,b)
40   IF r=0 THEN EXIT DO
50   LET a=b
60   LET b=r
70 LOOP
80 PRINT b
90 END
```

メモ. 十進 BASIC で実行するとき, ステップ実行機能を用いて 1 行ずつ実行してみると, 変数の値が更新される様子がわかる。



1.6.2 フィボナッチ数列

変数の値を順にずらしていく手法を用いれば、配列を用いずに、フィボナッチ数列 $f_0 = 1, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} (n = 2, 3, 4, \dots)$ を計算することができる。

第 n 項を a , 第 $n-1$ 項を b , 第 $n-2$ 項を c で表すと,

$n=2$ の準備として, $c=1, b=1$

$n=2$ から 3 へ移るのに, $c \leftarrow b, b \leftarrow a$

以後, 同様の準備をして, $a \leftarrow b+c$ の計算をすればよい。

```
10 LET c=1
20 LET b=1
30 FOR n=2 TO 10
40   LET a=b+c
50   PRINT a
60   LET c=b
70   LET b=a
80 NEXT n
90 END
```

1.6.3 素因数分解

整数 n を入力すると, 素因数分解するプログラムを作る。

n を 2 で割り, 割り切れたら, 2 を出力し, n を商で置き換える。これを割り切れなくなるまで繰り返す。

次に, n を 3 で割り, 割り切れたら, 3 を出力し, n を商で置き換える。これを割り切れなくなるまで繰り返す。

以後, 5 で割り, 7 で割り, $\dots$ と順に素数で割っていけば素因数分解できるけれども, この方法だと, 素数のリストをあらかじめ用意しておく必要がある。けれども, 除数を素数に限定せずに, 1 ずつ増やしていても素因数分解はできる。たとえば, 除数を $2, 3$ と増やしてきて, 4 で割るとき, 2 で割り切れるだけ割ってあれば 4 では割れないので, 4 を出力することはない。

除数を p , もとの数と計算途中の商を n で表すことにする。

```
100 INPUT n
110 LET p=2
120 DO UNTIL p>SQR(n)
130   DO UNTIL MOD(n,p)<>0
140     PRINT p
150     LET n=n/p
160   LOOP
170   LET p=p+1
180 LOOP
190 END
```

1.6.4 基底の変換

正の整数 n を入力すると、2進法に変換して表示するプログラムを作る。

求めるのは、0 または 1 を取る数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ で、

$$n = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + \dots$$

a_0 は n を 2 で割った余り、 a_1 はその商を 2 で割った余り、 a_2 はさらにその商を 2 で割った余りなので、

```
10 INPUT n
20 DO UNTIL n=0
30   LET a=MOD(n,2)
40   PRINT a
50   LET n=(n-a)/2
60 LOOP
70 END
```

このプログラムは、上記の $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ をこの順に出力する。

1.6.5 素数（エラステネスの篩）

素数は、1 より大きくて、1 より大きく自身より小さい整数の倍数とならない整数である。1 より大きく自身より小さい数（整数）の倍数となる数（整数）を合成数という。合成数のリストを作って残った数が素数である。素数を求めるこの手法をエラステネスの篩（ふるい）という。

100 以下の素数を求める手順を調べよう。

2 から 100 までの数を順に書いておく。

2 は素数。 $2 \times 2 = 4$ から順に 2 の倍数に印を付けていく。

3 は 2 の倍数になっていないから素数。 3×2 はすでに 2 の倍数として印を付け終わっているから、 $3 \times 3 = 9$ から順に 3 の倍数に印を付けていく。

4 は印が付いているので合成数。このとき、4 の倍数に印を付ける作業は不要。なぜなら、2 の倍数は印を付け終わっているから。

5 は印が付いていないので素数。 $5 \times 2, 5 \times 3, 5 \times 4$ はすでに印を付け終わっているから、 5×5 から順に 5 の倍数に印を付けていく。

6 は印が付いているので合成数。このとき、6 の倍数に印を付ける作業は不要。なぜなら、2 の倍数、3 の倍数は印を付け終わっているから。

以下、同様。

合成数のみを出力することになると、1000 以下の素数を求めるプログラムが次のように書ける。

```
100 LET N=1000
110 DIM s(1000)
120 MAT s=ZER
```



```

130 FOR i= 2 TO N
140     IF s(i)=0 THEN
150         PRINT i
160         FOR k=i*i TO N STEP i
170             LET s(k)=1
180         NEXT k
190     END IF
200 NEXT i
210 END

```

120 行の MAT ZER 文は、配列の全要素に零を代入する命令である。MAT は matrix (行列) の略。ZER は zero。

k が合成数のとき s(k) に 1 を代入して目印にする。

160 行の FOR 文では、k の値が N より大きくなったときに繰り返しを抜けることに注意。たいていの場合、k の値が N になることはない。

このプログラムは、Full BASIC 規格の範囲内で実行できるように書いてある。十進 BASIC で実行する場合は、110 行を

```
110 DIM s(N)
```

としてよい。そうしておくで、素数を求める範囲の上限値を修正する場合に 1ヶ所の書き換えで済む。

1.7 数列と級数

1.7.1 極限

Full BASIC では、JIS 規格によって計算結果の正確さが保証されている。けれども、複合する演算では計算結果の正確さを保つことができない。 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ の計算を例に、計算結果の正確さについて調べて行こう。

べき乗演算 a^b

$n = 1, 10, 100, \dots$ に対し、 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ の値を計算してみよう。 n を大きくすれば、 $e = 2.718281828459 \dots$ に近づいていくはずである。

```

10 FOR k=0 TO 20
20     LET n=10^k
30     PRINT n, (1+1/n)^n
40 NEXT k
50 END

```

実行結果

1	2
10	2.5937424601

100	2.70481382942153
1000	2.71692393223589
10000	2.71814592682522
100000	2.71826823717449
1000000	2.71828046931938
10000000	2.71828169254497
100000000	2.71828181486764
1000000000	2.7182818270999
10000000000	2.71828182832313
100000000000	2.71828182844545
1000000000000	2.71828182845769
10000000000000	2.71828182845891
100000000000000	2.71828182845903
1.E+15	2.71828182845904
1.E+16	2.71828182845905
1.E+17	2.71828182845905
1.E+18	2.71828182845905
1.E+19	1
1.E+20	1

$n = 1.E+18$ に対する値 2.71828182845905 はわりと正確であるが、 $n = 1.E+19$ になると、突如、計算結果は 1 になる。

BASIC は、べき乗の計算を正確に実行している。けれども、BASIC の数値には有効数字の桁数の限界があって、 $n = 1.E+18$ のとき $1 + 1/n = 1.0000000000000000001$ だけでも、 $n = 1.E+19$ のときには $1 + 1/n$ の計算結果は 1 になってしまう。だから、その n 乗は 1 でしかない。

なお、このあたりの事情を詳しく調べたいとき、十進 BASIC では、オプションメニューから「数値」を選んで「表示桁数を多く」にチェックを入れて実行する。そうでないと、計算結果は 15 桁に丸めて表示される。

なお、Full BASIC はべき乗演算だけでなく、三角関数や対数関数等の計算結果についても四則と同じ基準で演算結果の正確さが JIS で定められている。

四則のみで計算

次のプログラムを考えてみよう。この計算方法だったら四則の計算さえ正確に実行できれば、正しい答えが得られると思うかも知れない。

```

10 LET n=1E14
20 LET e=1
30 FOR k=1 TO n
40   LET e=e*(1+1/n)
50 NEXT k
60 PRINT e
70 END

```

この計算方法は、実行に時間がかかりすぎて現実的でないけれども、それだけではなく、四捨五入で丸める場合、答えは 2.5 になってしまうという問題がある。

小数第 6 位で四捨五入する場合で考えよう。このとき、 $1 + 1/n$ が正確な値を保てる限度は、 $n = 10^5$ である。だから、 $n = 10^5$ として計算する。

$n = 10^5$ のとき、

$$\begin{aligned} 1 + 1/n &= 1.00001 \\ (1 + 1/n)^2 &= 1.00001 \times 1.00001 = 1.00002 \\ (1 + 1/n)^3 &= 1.00002 \times 1.00001 = 1.00003 \\ (1 + 1/n)^4 &= 1.00003 \times 1.00001 = 1.00004 \\ &\dots\dots \\ (1 + 1/n)^{50000} &= 1.49999 \times 1.00001 = 1.5 \\ (1 + 1/n)^{50001} &= 1.5 \times 1.00001 = 1.50002 \\ (1 + 1/n)^{50002} &= 1.50002 \times 1.00001 = 1.50004 \\ (1 + 1/n)^{50003} &= 1.50002 \times 1.00001 = 1.50006 \\ &\dots\dots \\ (1 + 1/n)^{100000} &= 2.5 \end{aligned}$$

BASIC では、ROUND 関数で小数部の桁数を指定して丸めを実行できる。次のプログラムの実行結果は確かに 2.5 である。

```
10 LET n=1E5
20 LET e=1
30 FOR k=1 TO n
40   LET e=ROUND(e*(1+1/n),5)
50 NEXT k
60 PRINT e
70 END
```

高速べき乗法

$y = x^n$ を計算するのに、 n を 2 進法で表し、

$n = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + \dots$ ただし、 $a_k = 0$ または 1 とすると、

$$\begin{aligned} x^n &= x^{a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + \dots} \\ &= x^{a_0 \cdot 1} \times x^{a_1 \cdot 2} \times x^{a_2 \cdot 2^2} \times x^{a_3 \cdot 2^3} \times \dots \\ &= (x^1)^{a_0} \times (x^2)^{a_1} \times (x^{2^2})^{a_2} \times (x^{2^3})^{a_3} \times \dots \end{aligned}$$

このうち、 $x^1, x^2, x^{2^2}, x^{2^3}, \dots$ は、直前の値を 2 乗することで求まる。

たとえば、 $x^{2^3} = x^{2^2+2^2} = x^{2^2} \cdot x^{2^2} = (x^{2^2})^2$

そこで、 $y = 1$ としておいて、 $x^1, x^2, x^{2^2}, x^{2^3}, \dots, x^{2^k}, \dots$ を、順次、計算し、 $a_k = 1$ だったら y に x^{2^k} をかけることを繰り返せば、 x^n が求まる。

この方法を利用すると少ない乗算の回数でべき乗の計算ができる。高速化するだけでなく、乗算の回数が減ることで誤差も少なくなる。

次のプログラムは、 $x^1, x^2, x^{2^2}, x^{2^3}, \dots$ を計算するのに変数 p, 求めたい数に変数 e を割り当てている。

```

100 LET n=1E14
110 LET x=1+1/n
120 LET p=x
130 LET e=1
140 DO UNTIL n=0
150     DO UNTIL n=0
160         LET a=MOD(n,2)
170         LET n=(n-a)/2
180         IF a=1 THEN LET e=e*p
190         LET p=p*p
200     LOOP
210 LOOP
220 PRINT e
230 END

```

十進 BASIC の十進モードでの計算結果は 2.71828176566054 となり、先ほどの計算法より正しい値に近い。ただし、十進 1000 桁モードで計算した結果は、2.71828182845903164... で、それと比べると、誤差が目立つ。十進モードでの誤差が大きい原因は、先に示したのと同じ理由で、 $x^1, x^2, x^{2^2}, x^{2^3}, \dots$ の計算結果に誤差が多くなるからであろう。

二項定理

二項定理を使って計算してみよう。

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

なので、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

初項を第 0 項として、第 k 項を b_k とおく。

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$$

$$b_3 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$$

$$b_4 = \frac{1}{4!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}$$

.....

$$b_{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n-k}{n} b_k$$

数列 $\{b_k\}$ は、後半、ほぼ 0 になるので、手前の数項の加算で済む。

とりあえず、作ったプログラムが

```

10 LET n=1E14
20 LET s=0
30 LET b=1

```

```

40 FOR k=1 TO n
50   LET s=s+b
60   LET b=b*(n-k)/n/(k+1)
70   PRINT s
80 NEXT k
90 END

```

で、早い段階で 1.71828182845902 という値が得られている。

ただし、このままだと 10^{14} 回の繰り返しが実行されてしまうので、50 行の加算を実行して値に変化がなかったら止めることにしよう。

```

100 LET n=1E14
110 LET s=0
120 LET b=1
130 FOR k=1 TO n
140   LET s1=s+b
150   IF s1=s THEN EXIT FOR
160   LET s=s1
170   LET b=b*(n-k)/n/(k+1)
180   PRINT s
190 NEXT k
200 END

```

補足 足して変化しなくなったらそこで止めるやり方は、厳密には正しくない。正確な結果を得るためには、無視した項の和がどれくらいになるかを見積もることが必要になる。

補足2

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

で $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

練習 18 補足 2 で得られた式を用いて e の近似値を求めよ。

1.7.2 数値積分

数値積分の必要性

代数関数（多項式や分数式で表される関数）、指数関数・対数関数・三角関数・逆三角関数の四則・べき根およびそれらの合成であるような 1 変数関数を初等関数という。初等関数の導関数は初等関数であるが、初等関数の原始関数は初等関数とは限らない。だから、定積分を原始関数を用いて計算する方法は必ずしも有効ではない。そのため、定積分の数値計算は必須である。

数値積分

1 変数関数 $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の近似を考える。

区間 $[a, b]$ を n 等分し、分点を $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ とする。

すなわち、 $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$)。

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は $\sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k-1})$ あるいは $\sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$ で $n \rightarrow \infty$

としたときの極限で定義されることが多い。

この値を計算して近似値とすることもできるけれども、区間 $[x_{k-1}, x_k]$ における関数値を区間の中点 $\frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ における関数値 $f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)$ で代表させて

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

を求めるか、あるいは、区間 $[x_{k-1}, x_k]$ における関数値を区間の両端における関数の値の平均 $\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$ で近似して

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

を計算するほうが誤差が少なくできるように思える。

台形公式と中点公式

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を次の和で近似する手法を、それぞれ、台形公式、中点公式という。
(台形...trapezoid)

$$\text{台形公式 } T = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$\text{中点公式 } M = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$\text{ただし、} x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

例 19 $\int_0^\pi \sin x dx$ の近似計算

次のプログラムで台形公式、中点公式をまとめて計算できる。

```
DEF f(x)=SIN(x)
LET a=0
LET b=PI
LET n=10000
LET T=0
LET M=0
FOR k=1 TO n
  LET x0=a+(b-a)*(k-1)/n
  LET x1=a+(b-a)*k/n
```

```

LET T=T+(f(x0)+f(x1))/2*(x1-x0)
LET M=M+f((x0+x1)/2)*(x1-x0)
NEXT k
PRINT T,M
END

```

$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$ なので、計算結果と真の値との差を計算できる。

n	$T - 2$	$M - 2$
100	-0.00016449611256	0.000082249071
1000	-0.00000164493443	0.0000008224673
10000	-0.00000001644956	0.0000000082249
100000	-0.00000000016436	0.00000000008314

この計算結果を見ると、次の 2 点に気づく。

分点の個数 n が 10 倍になると、誤差は $\frac{1}{10}$ になる。

台形公式と中点公式では誤差の符号が反対で、その絶対値は 2 : 1 の比になっている。

シンプソンの公式

台形公式と中点公式に 1:2 の重みを付けて平均を取ったものをシンプソンの公式という。
すなわち、 $S = \frac{T + 2M}{3}$

問 20 $\int_0^{\pi} \sin x dx$ をシンプソンの公式を用いて計算し、誤差を調べよ。特に、分点の個数 n を 10 倍したとき、誤差は何倍になるか。[ヒント] $n = 10, 100, 1000, 10000$ について計算してみる。

シンプソンの公式は、被積分関数を、各小区間で両端点と中点で一致する 2 次関数（または 3 次関数）で近似したものである。

問 21 $f(x)$ を 3 次以下の多項式で定義される関数とするとき、等式

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3} \left\{ \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a) \right\} + \frac{2}{3} \left\{ f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b - a) \right\}$$

が成立することを示せ。

問 22 12 等分した円弧の長さを求めて円周率 π の値を求めよう。単位円を 12 等分した $y = \sqrt{1 - x^2}$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$) の弧の長さを求め、その値を 6 倍する。

[ヒント] $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ とおくと、 $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$

曲線 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) の長さの公式 $\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ を用いると、

$$\text{求める円弧の長さは } \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}} dx$$

この定積分を近似計算する。

1.8 透視投影・射影変換

立体図形を目で見たように描きたい。

空間座標 右手系と左手系

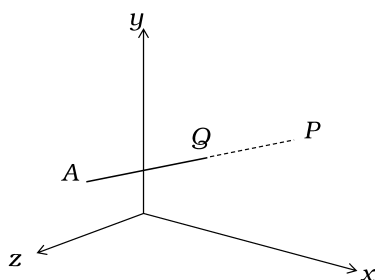


黒板やPCの画面に普通に x 軸と y 軸を描いたとき、 z 軸の正の向きは、
 右手系 手前向き 左手系 奥の方

数学では、通常、右手系を採用する。

以後、黒板、あるいはPC画面を xy 平面とし、手前向きに z 軸があるものとする。

透視投影



xy 平面の手前に視点 A を置き、 xy 平面の向こう側にある点 P を望む。

このとき、 AP と xy 平面の交点 Q を点 P の透視投影という。

例題 23 空間内の定点 $A(a, b, c)$ と動点 $P(x, y, z)$ を結ぶ直線と xy 平面との交点を $Q(x', y', 0)$ とする。 x', y' を x, y, z の式で表せ。ただし、 $c > 0$ とする。

解. $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP}$ とする。

$\overrightarrow{AQ} = (x' - a, y' - b, -c)$, $\overrightarrow{AP} = (x - a, y - b, z - c)$ より、

$$x' - a = k(x - a)$$

$$y' - b = k(y - b)$$

$$-c = k(z - c)$$

$$\therefore k = -\frac{c}{z - c}$$

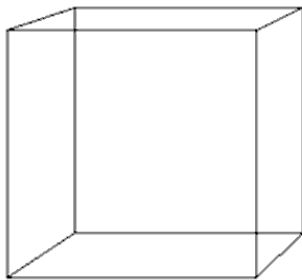
よって,

$$x' = a - \frac{c(x-a)}{z-c} = \frac{az-cx}{z-c}$$

$$y' = b - \frac{c(y-b)}{z-c} = \frac{bz-cy}{z-c} \quad \square$$

例 24 立方体の透視図

立方体 ABCD-EFGH の各頂点の座標を $A(-1, -1, 1)$, $B(1, -1, 1)$, $C(1, 1, 1)$, $D(-1, 1, 1)$, $E(-1, -1, -1)$, $F(1, -1, -1)$, $G(1, 1, -1)$, $H(-1, 1, -1)$ とする。この立方体を点 $A(a, b, c)$ を視点とする xy 平面上への射影で映す。



```

100 LET a=3
110 LET b=2
120 LET c=10
130 DEF xx(x,y,z)=(a*z-c*x)/(z-c)
140 DEF yy(x,y,z)=(b*z-c*y)/(z-c)
150 DATA -1,-1,1 ! A
160 READ x,y,z
170 LET ax=xx(x,y,z)
180 LET ay=yy(x,y,z)
190 DATA 1,-1,1 ! B
200 READ x,y,z
210 LET bx=xx(x,y,z)
220 LET by=yy(x,y,z)
230 DATA 1,1,1 ! C
240 READ x,y,z
250 LET cx=xx(x,y,z)
260 LET cy=yy(x,y,z)
270 DATA -1,1,1 ! D
280 READ x,y,z
290 LET dx=xx(x,y,z)
300 LET dy=yy(x,y,z)
310 DATA -1,-1,-1 ! E
320 READ x,y,z
330 LET ex=xx(x,y,z)

```

```

340 LET ey=yy(x,y,z)
350 DATA 1,-1,-1    ! F
360 READ x,y,z
370 LET fx=xx(x,y,z)
380 LET fy=yy(x,y,z)
390 DATA 1,1,-1    ! G
400 READ x,y,z
410 LET gx=xx(x,y,z)
420 LET gy=yy(x,y,z)
430 DATA -1,1,-1    ! H
440 READ x,y,z
450 LET hx=xx(x,y,z)
460 LET hy=yy(x,y,z)
470 SET WINDOW -2,2,-2,2
480 PLOT LINES: ax,ay; bx,by; cx,cy; dx,dy; ax,ay
490 PLOT LINES: ex,ey; fx,fy; gx,gy; hx,hy; ex,ey
500 PLOT LINES: ax,ay; ex,ey
510 PLOT LINES: bx,by; fx,fy
520 PLOT LINES: cx,cy; gx,gy
530 PLOT LINES: dx,dy; hx,hy
540 END

```

$x!, y!$ を関数 $xx(x,y,z)$, $yy(x,y,z)$ で求めている。

各頂点の座標を DATA 文で与え、READ 文で変数に代入している。

!以降、行末までは注釈。プログラムの実行に無関係。

2 データの数学と数学実験

2.0.1 DATA 文と READ 文

BASIC は、プログラム中にデータを書くことができる。

DATA 文

DATA 文には、コンマで区切ってデータを書く。

DATA 行を複数行書いてもよい。

例 1

```
DATA 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
```

例 2

```
DATA 1, 2, 3, 4, 5
```

```
DATA 6, 7, 8, 9, 10
```

例 1, 例 2 は同じ意味になる。DATA 行の末尾にはコンマを書かないことに注意。

DATA 文には、定数のみ書ける（引用符で括った文字列も可）。 10^6 や $\text{SQR}(2)$ のような数式は書けない。なお、 10^6 は定数ではないが、 $1\text{E}6$ のような E 表現の数値は定数なので、DATA 文に書ける。

READ 文

READ 文は、DATA 文に書かれたデータから順に数値を変数に代入する。

例 1

```
DATA 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
FOR i=1 TO 10
  READ x
  PRINT x
NEXT i
```

例 2

```
DATA 163.4, 81.2
DATA 155.4, 57.1
DATA 149.2, 48.0
FOR i=1 TO 3
  READ x, y
  PRINT x, y
NEXT i
```

DO~LOOP と READ IF MISSING

DO ~ LOOP に

READ IF MISSING THEN EXIT DO:変数, ..., 変数
を書くと、データがなくなったとき繰り返しを抜ける。

例

```
DATA 163.4, 81.2
DATA 155.4, 57.1
DATA 149.2, 48.0
LET N=0
DO
  READ IF MISSING THEN EXIT DO: x, y
  PRINT x, y
  LET N=N+1
LOOP
PRINT "件数", N
END
```

RESTORE 文

DATA 文のデータを、再度、頭から読みたいとき RESTORE 文を実行する。

例

```
DATA 163.4, 81.2
DATA 155.4, 57.1
DATA 149.2, 48.0
DO
  READ IF MISSING THEN EXIT DO: x, y
  PRINT x, y
LOOP
RESTORE
DO
  READ IF MISSING THEN EXIT DO: x, y
  PRINT x, y
LOOP
END
```

文字列データ

DATA 文に文字列データを書くこともできる。そのとき、文字列は引用符で括る。
BASIC では、文字列変数名の末尾に\$ を付加して数値変数名と区別する。

例

```
DATA "山田",80,90
READ s$,a,b
```

2.0.2 対数グラフ

対数グラフは、関数関係の発見に役立つことがある。

1 対の数値 x, y に対し、

通常のグラフ 点 (x, y) をプロット

片対数グラフ 点 $(x, \log_{10} y)$ をプロット

両対数グラフ 点 $(\log_{10} x, \log_{10} y)$ をプロット

片対数グラフ

ウィキペディアで、米価の変遷が公開されている。

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%B1%B3%E4%BE%A1%E3%81%AE%E5%A4%89%E9%81%B7>

```
130 DATA 1887, 0.05
```

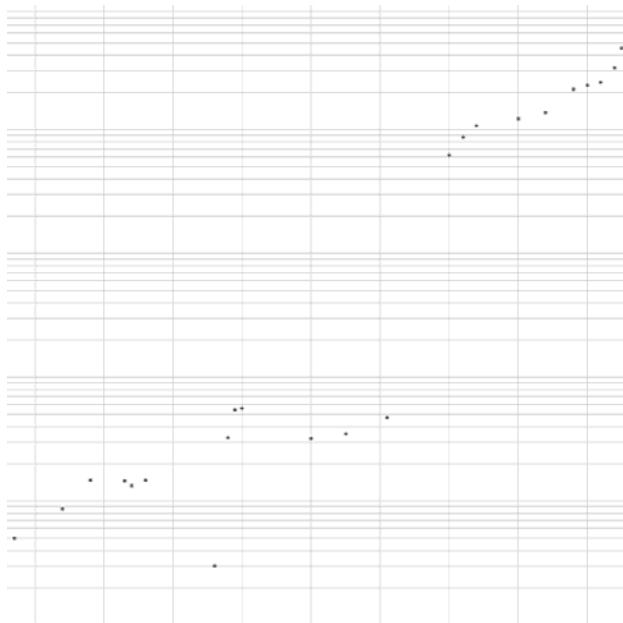
```
140 DATA 1894, 0.087
```

(中略)

```

340 DATA 1974, 318
350 DATA 1975, 450
360 SET WINDOW 1886,1976, LOG10(0.01), LOG10(1000)
370 SET LINE COLOR 15
380 FOR x=1890 TO 1970 STEP 10
390     PLOT LINES:x,-2; x,3
400 NEXT x
410 FOR n=-2 TO 2
420     FOR a=1 TO 9
430         LET y=a*10^n
440         PLOT LINES:1866,LOG10(y); 1976,LOG10(y)
450     NEXT a
460 NEXT n
470 DO
480     READ IF MISSING THEN EXIT DO: x,y
490     PLOT POINTS:x,LOG10(y)
500 LOOP
510 END

```



410～460 行で対数目盛の横線を描いている。

両対数グラフ

！ 両対数グラフ

！ 軌道半径，公転周期（地球を 1 とする）

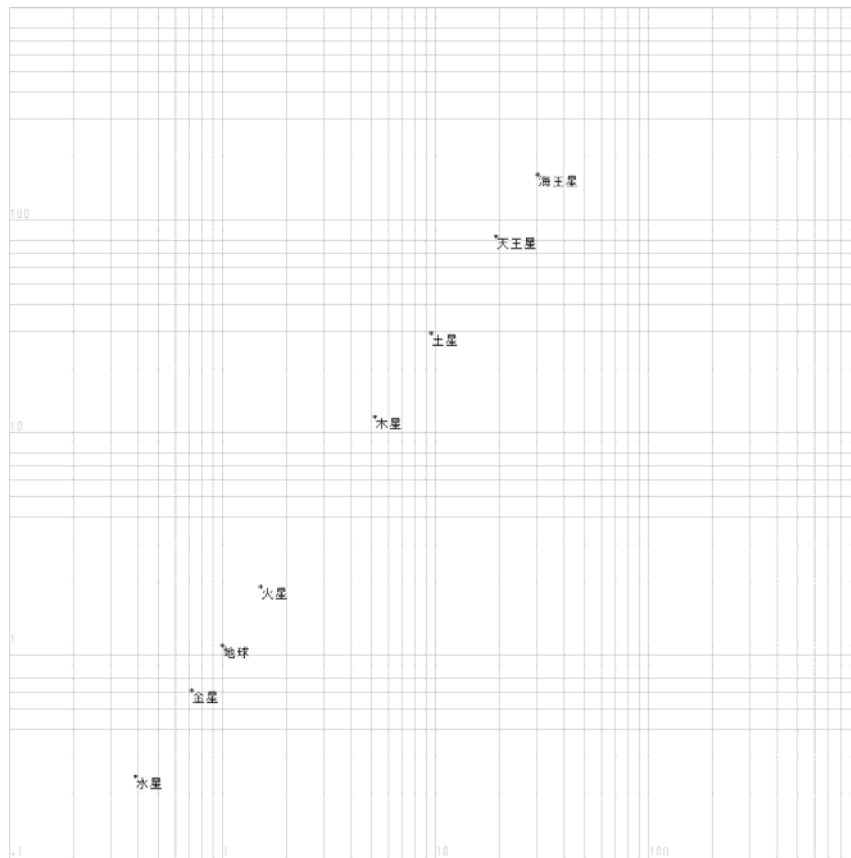
DATA 0.39, 0.241, "水星"

DATA 0.72, 0.615, "金星"

```

DATA 1 , 1 , "地球"
DATA 1.52, 1.88 , "火星"
DATA 5.20, 11.86 , "木星"
DATA 9.55, 29.46 , "土星"
DATA 19.2 , 84.01 , "天王星"
DATA 30.1 , 164.8 , "海王星"
SET WINDOW -1,3,-1,3
SET LINE COLOR 15
SET TEXT COLOR 15
FOR n=-1 TO 2
  FOR a=1 TO 9
    LET x=a*10^n
    PLOT LINES : LOG10(x),-1; LOG10(x),3
  NEXT a
  PLOT TEXT , AT n,-1: STR$(10^n)
NEXT n
FOR m=-1 TO 3
  FOR b=1 TO 9
    LET y=b*10^m
    PLOT LINES : -1,LOG10(y);3,LOG10(y)
  NEXT b
  PLOT TEXT , AT -1, m:STR$(10^m)
NEXT m
SET TEXT COLOR 1
SET TEXT JUSTIFY "left","top"
DO
  READ IF MISSING THEN EXIT DO: x,y,s$
  LET a=LOG10(x)
  LET b=LOG10(y)
  PLOT POINTS: a, b
  PLOT TEXT ,AT a,b: s$
LOOP
END

```



2.0.3 乱数を利用するシミュレーション

乱数

Full BASIC の RND 関数は 0 以上 1 未満の擬似乱数を生成する。

RANDOMIZE 文は、乱数列の始値を予期できないものとする。RANDOMIZE 文を実行しないと毎回同じ乱数列を生成する。なお、RANDOMIZE をプログラム中で何回も実行するのは、擬似乱数の正しい使い方ではない。

```
10 RANDOMIZE
20 FOR k=1 TO 20
30   PRINT RND
40 NEXT k
50 END
```

さいころの代用

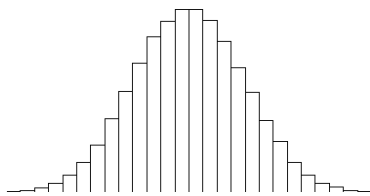
```
10 DEF spots=INT(1+RND*6)
20 RANDOMIZE
30 FOR k=1 TO 50
40   PRINT spots
50 NEXT k
60 END
```

5 個のさいころの目の数の和の分布

```

100 DEF spots=INT(1+RND*6)
110 DIM c(5 TO 30)
120 MAT c=ZER
130 LET N=100000
140 FOR k=1 TO N
150     LET s=spots + spots + spots + spots + spots
160     LET c(s)=c(s)+1
170 NEXT k
180 SET WINDOW 5-0.5,30+0.5, 0,0.2
190 FOR i=5 TO 30
200     LET d=c(i)/N    ! 相対度数
210     PLOT LINES:i-0.5,0; i-0.5,d; i+0.5,d; i+0.5,0
220 NEXT i
230 END

```



一様乱数 12 個の和の頻度分布の対数

組込関数 RND は、区間 $[0, 1)$ の一様乱数を与える。簡単な積分計算で、その期待値が $1/2$ 、分散が $1/12$ であることが示せる。そこで、RND 関数 12 個の和から 6 を引いた関数を考えれば、その期待値は 0 で分散は 1 となる。和が取り得る値の区間 $[-6, 6]$ を 0.1 刻みに区切って 10^6 個の値を発生させて分布を調べ、各階級に得られた頻度の対数を取る。

```

100 DEF s=RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND-6
110 DIM d(-60 TO 60)
120 MAT d=ZER
130 FOR t=1 TO 10^6
140     LET i=ROUND(s*10)
150     LET d(i)=d(i)+1
160 NEXT t
170 SET WINDOW -6.7,6.3,-0.2,6
180 DRAW grid
190 FOR i=-60 TO 60
200     IF d(i)>0 THEN PLOT POINTS:i/10,LOG10(d(i))

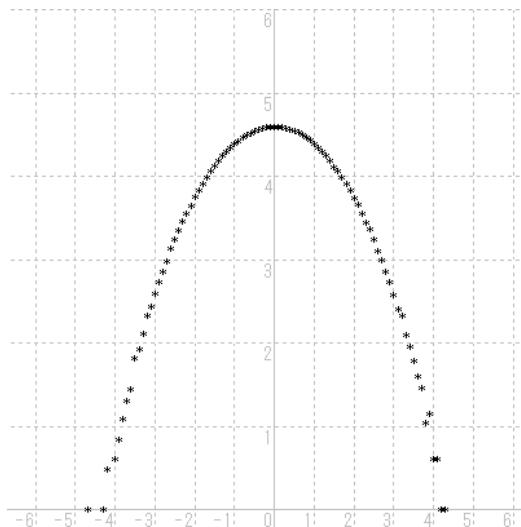
```



```

210 NEXT i
220 END

```

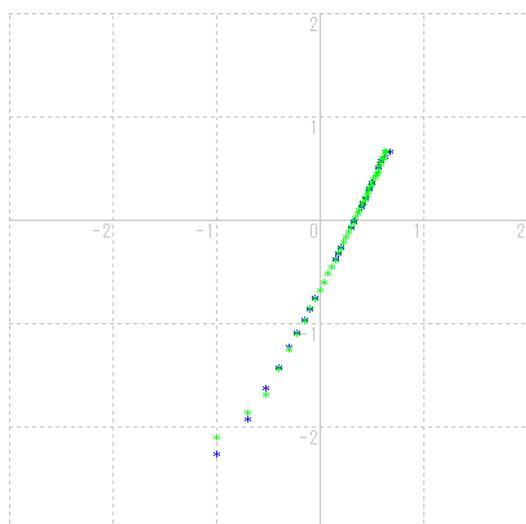


このグラフは、頂点が $(0, 4.6)$ の放物線のように見える。本当に2次関数なのだろうか。符号を反転させて4.6を加えた数値の両対数を取って確認してみよう。

```

100 DEF s=RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND+RND-6
110 DIM d(-60 TO 60)
120 MAT d=ZER
130 FOR t=1 TO 10^6
140     LET i=ROUND(s*10)
150     LET d(i)=d(i)+1
160 NEXT t
170 SET WINDOW -3,2,-3, 2
180 DRAW grid
190 FOR i=-60 TO 60
200     IF d(i)>0 THEN
210         LET y=4.6-LOG10(d(i))
220         LET x=i/10
230         IF y>0 THEN
240             IF x<0 THEN
250                 SET POINT COLOR 2
260                 PLOT POINTS:LOG10(-x),LOG10(y)
270             ELSEIF x>0 THEN
280                 SET POINT COLOR 3
290                 PLOT POINTS:LOG10(x),LOG10(y)
300             END IF
310         END IF
320     END IF
330 NEXT i
340 END

```



$x < 0$ のとき、 x は符号を反転して計算し、青の点で示している。緑の点は $x > 0$ に対応する。

この結果を見ると、符号を反転させて 4.6 を加えたものは、ほぼ 2 乗に比例しているといえそうである。

先ほどの放物線の方程式を $y = 4.6 - 0.226x^2$ と読み取ったとすると、 s の値を X で表すとき、

$$P(X \in [x - 0.05, x + 0.05]) \doteq \frac{10^{4.6 - 0.226x^2}}{10^6}$$

$$a^x = e^{x \log a} \text{ を用いて変形すると, } P(X \in [x - 0.05, x + 0.05]) \doteq 0.0393 \times e^{-0.52x^2}$$

$$\text{つまり, } P(X = x) \propto e^{-0.52x^2}$$

正規分布への道

ここでは乱数を用いた実験から正規分布を導いてみたが、大人数の人の身長データを入力し、同様の傾向が見られることを示して正規分布に繋げる指導法も考えられる。課題はその種のデータをどう手に入れるかである。

2.0.4 ★ テキストファイルを読む

とりあえず、データを手に入れたとして、それをどう読み込むかを学んでおこう。

Excel のデータなども、CSV 形式で保存すれば、BASIC で処理できる。

練習用テキストファイルの準備

Windows アクセサリの「メモ帳」を起動して、各行に 2 個の数値をコンマで区切って書く。行数は任意。ただし、空行を含まないこと。特に最初の行や最後尾に注意。書き込みが終わったら、適当な名前を付けて適宜のフォルダに保存。

プログラムでファイルを読む

Windows は、UI で見えるフォルダ名が実際のフォルダ名と一致しない。プログラムで

そのフォルダを指定してもファイル参照に失敗してしまう。FILE GETNAME 文は、十進 BASIC の独自拡張で、UI でファイルを指定すると、ファイルのパス名を取得できる。

ファイル使用は OPEN 文で始まり、CLOSE 文で終わる。OPEN 文で経路番号を指定し、ファイルの読み書きはその経路番号を指定して行う。経路番号は 1 以上の整数を用いる。

例

```
FILE GETNAME FName$
OPEN #1: NAME FName$,ACCESS INPUT
DO
    INPUT #1,IF MISSING THEN EXIT DO: x,y
    PRINT x,y
LOOP
CLOSE #1
END
```

なお、頻繁に使用するファイルは、

```
FILE GETNAME FName$
PRINT FName$
END
```

を実行してパス名を確認しておくと便利。

SET #n: POINTER BEGIN

データポインタを再び先頭に位置づける。ファイルを、再度、はじめから読みたいときに実行する。

例

```
LET FName$="C:\Users\          \sample1.txt"
OPEN #1: NAME FName$,ACCESS INPUT
DO
    INPUT #1,IF MISSING THEN EXIT DO: x,y
    PRINT x,y
LOOP
SET #1: POINTER BEGIN DO
    INPUT #1,IF MISSING THEN EXIT DO: x,y
    PRINT x,y
LOOP
CLOSE #1
END
```

うまく読み込むことができたなら、相関係数を計算したり、散布図を描いたりしてみよう。

CSV ファイルの取扱い方

Excel 等で書き出した CSV ファイルは, “... ,0,...”あるいは“... ,0”となるべきところが“... ,,...”あるいは, “... ,”のように 0 を null(何もない状態) に変えて記録されている。十進 BASIC だと, 内部形式ファイルとして開くとその種の CSV ファイルも読める。

```
OPEN #1:NAME "□□.CSV",RECTYPE INTERNAL,ACCESS INPUT
```

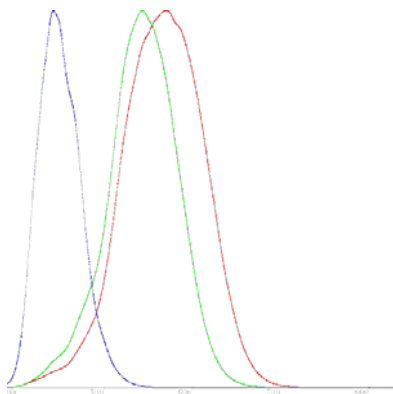
内部形式で開いたとき, INPUT# の代わりに READ # を使う。

注意 CSV ファイルを内部形式として読むのは Full BASIC 規格で保証された動作ではない。CSV ファイルを BASIC の規約に適合するものに書き換えて使うのが正攻法である。その処理は BASIC プログラムを書いて実行できるが, 本稿では省く。

2.0.5 ★ 色覚の数理

人の目の色覚細胞 (錐体 cone) には L,M,S の 3 種類がある。各単波長光に対する各錐体の感度特性を示す次図のようなグラフをよく見る。

横軸... 光の波長 青線...S 錐体 緑線...M 錐体 赤線...L 錐体



S 錐体, M 錐体のピークはそれぞれ青, 緑に対応するが, L 錐体もピークはほぼ緑の領域にある。なぜ, これで色を識別できるのだろうか。

英国 University College London (UCL) 附属 Institute of Ophthalmology は,

Colour & Vision Research laboratory and database (CVRL database)

<http://cvrl.ioo.ucl.ac.uk/index.htm>

において人の目の知覚に関する詳細なデータを公開している。LMS 感度特性の数値データも入手できる。CVRL database から, Cone fundamentals を選び, Stockman & Sharpe cone fundamentals から, Units が Energy(Linear), Stepsize が 0.1nm, Format が CSV であるものをダウンロードする。2-deg 版と 10-deg 版があるが, どちらでもよい。0 と書かずに null を用いる形式なので, 修正して Full BASIC の規約に合うように書き換えるか, 十進 BASIC の内部形式ファイルとして使う。各行は, 波長, L, M, S の 4 項目から構成されている。およそ, 次のようなプログラムで各項目を読むことができる。

```
LET fn$="C:\Users\_____\Downloads\linss2_10e_fine.csv"
OPEN #1: NAME fn$, ACCESS INPUT,RECTYPE INTERNAL
DO
READ #1,IF MISSING THEN EXIT DO: lambda, L, M, S
```

```

PRINT lambda, L, M, S
LOOP
CLOSE #1
END

```

λ は光の波長 (nm) で, L, M, S は各錐体の最も感度のよい波長に対する感度を 1 としたときの相対値である。波長を横軸にとってグラフにすると先に示した図のようになる。

明るさの違いを無視するとき, 色は, $L:M:S$ で認識されると考えられる。同じ比を, $L+M+S=1$ と仮定することで, そのうちの 2 数で色を表現できる。 $L+M+S=1$ としたときの L, M を, それぞれ, l, m で表す。すなわち, $l + m + s = 1$ 。

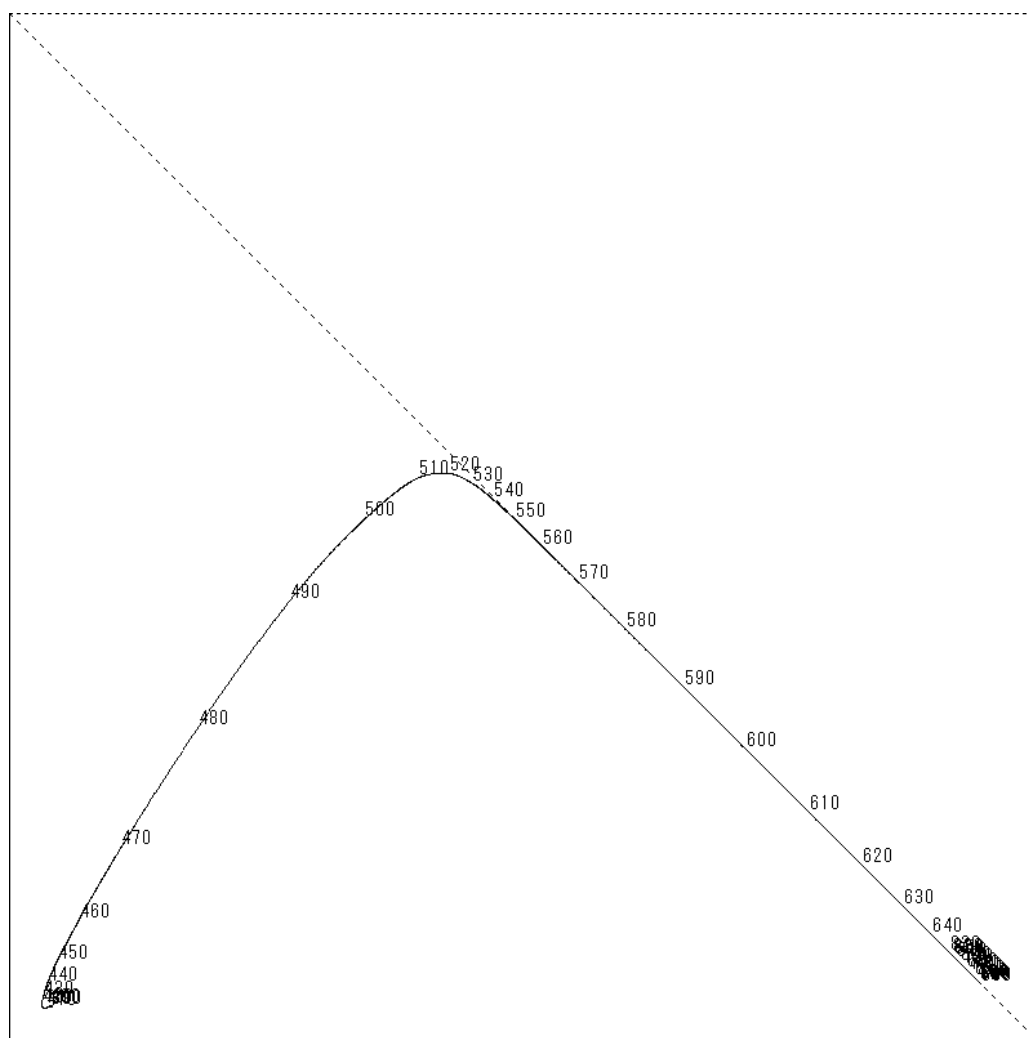
次の図は, 各単波長光に対する l, m を求めたものである。横軸が l , 縦軸が m 。点線 (破線) は $l + m = 1$, すなわち, $s = 0$ の直線。これより右上は存在しない。この線より左下, 原点に近づくに従って s の値が 1 に近づく。線上に書かれた数値は波長 (nm)。

```

100 SET WINDOW 0,1,0,1
110 SET LINE STYLE 3
120 PLOT LINES:1,0; 0,1
130 SET POINT STYLE 1
140 LET fn$="C:\Users\_____\Downloads\linss2_10e_fine.csv"
150 OPEN #1: NAME fn$ , ACCESS INPUT,RECTYPE INTERNAL
160 DO
170   READ #1,IF MISSING THEN EXIT DO:lambda, L,M,S
180   LET t=L+M+S
190   LET l=L/t
200   LET m=M/t
210   LET s=S/t
220   PLOT POINTS:l,m
230   IF FP(lambda/10)=0 THEN PLOT TEXT ,AT l,m :STR$(lambda)
240 LOOP
250 CLOSE #1
260 END

```

(補足説明) 230 行の $FP(x)$ は x の小数部分 (Fraction Part) を表す。



このグラフを見ると、青～緑の色は $s(=1-(l+m))$ で色相を認識し、緑～赤の領域では (ほぼ $s=0$ であって) $l:m$ の比によって色相を認識しているように思える。

以後、このグラフを (仮に) l - m 色相図と呼ぶことにする。

光の 3 原色

l - m 色相図には次の性質がある。

単波長光が作る曲線上の 2 点を結ぶ線分上の点に対応する色は、線分両端の単波長光の合成で表せる。

単波長光が作る曲線上の 3 点を頂点とする三角形の内部の点に対応する色は、頂点に選んだ単波長光の合成で表せる。

3 つの単波長光を上手にえらべば、その 3 色で大部分の色を再現できるのではないだろうか。

国際照明委員会 (CIE) は、1931 年、光の 3 原色を

$[R]: \lambda_R = 700.0 \text{ nm}$ $[G]: \lambda_G = 546.1 \text{ nm}$ $[B]: \lambda_B = 435.8 \text{ nm}$

と定めた。

l - m 色相図上に RGB3 原色の点を取るとき、RGB3 点からなる 3 角形の内側の色が RGB の合成で再現可能な色である。注目すべきは、500nm 近辺の色 (青緑) がその三角形の外

側になってしまうこと。つまり、RGB ではこの付近の単色光は正確に再現できない。

問 25 (1) R, G, B 各 3 原色に対する L, M, S 各錐体の感度特性を調べよ (CSV ファイルから読み取る)。

(2) (1) の結果は、次の値に近いものになる (選んだ database により異なる)。

	L	M	S
R(700.0nm)	0.00589749	0.000365317	0
G(546.1nm)	0.924341	0.993742	0.000285277
B(435.8nm)	0.00351131	0.00539344	0.919756

上の表の値で考えるとき、R, G, B 各三原色の強度を r, g, b で表し、L, M, S 各錐体の受ける刺激を l, m, s とすると、

$$\begin{pmatrix} l & m & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & g & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.00589749 & 0.000365317 & 0 \\ 0.924341 & 0.993742 & 0.000285277 \\ 0.00351131 & 0.00539344 & 0.919756 \end{pmatrix}.$$

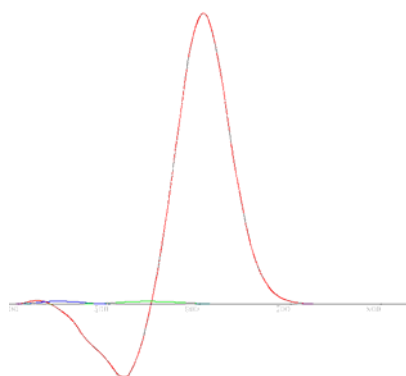
この式を満たすように $r : g : b$ を定めれば、 $l : m : s$ で認識される色が再現できる。

各単波長光に対し、RGB の合成でその色を再現するための $r : g : b$ を計算せよ。

[ヒント]

逆行列 $\begin{pmatrix} 0.00589749 & 0.000365317 & 0 \\ 0.924341 & 0.993742 & 0.000285277 \\ 0.00351131 & 0.00539344 & 0.919756 \end{pmatrix}^{-1}$ が次のプログラムで求まる。

```
DATA 5.89749E-03, 3.65317E-04, 0 ! 700 nm (Red)
DATA 9.24341E-01, 9.93742E-01, 2.85277E-03 ! 546.1nm (Green)
DATA 3.51131E-02, 5.39344E-02, 9.19756E-01 ! 435.8nm (Blue)
DIM a(3,3),z(3,3)
MAT READ a
MAT z=INV(a)
```



RGB 色空間

赤に対して 3 錐体は感度が悪いので、赤の強度を強くしないと色の再現ができない。色を表現するための手法として、白色を再現するための RGB 値を 1 として、それに対する相対値で色を指定する。つまり、 $R = G = B = 1$ が白、 $R = G = B = 0$ が黒。PC やデジタルカメラではこの方法で色を扱う。以後、この数値を R, G, B で書く。

白色光とは

大気による影響（吸収、散乱など）を無視すると、太陽光は、およそ 5800K の黒体放射で近似できる。

プランクの法則

温度 $T(K)$ の黒体が放射する光の強度の分布は、波長 $\lambda(m)$ の関数として

$$B(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \text{ で表される。ただし,}$$

$$h = 6.62606957 \times 10^{-34} \text{ Js (プランク定数),}$$

$$k = 1.3806488 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1} \text{ (ボルツマン定数),}$$

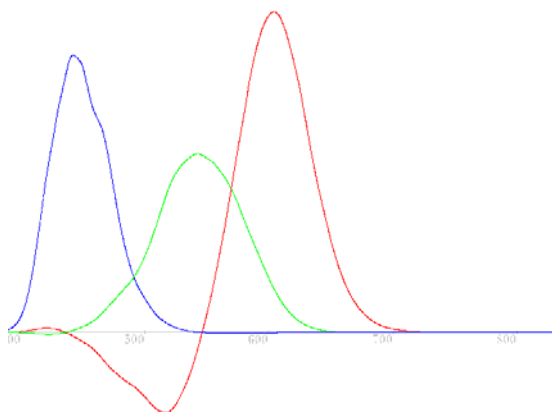
$$c = 299792458 \text{ m/s (光速)}$$

波長 λ の単位が m であることに注意。1nm=10⁻⁹m。

問 26 (1) 色温度 5800K の白色光 (= 5800K の黒体放射) に対する L,M,S 各錐体の刺激値 l, m, s の比 $l : m : s$ を求めよ。[ヒント] L,M,S 各錐体について、各波長に対する白色光の強度に錐体の感度を掛け、加算する。

(2) 色温度 5800K の白色光と同じ色に見える光を RGB で再現するとき、RGB 各色の強度の比 $r : g : b$ を求めよ。

(3) 各単波長光に対し、RGB の合成でその色を再現するための $R : G : B$ を計算せよ。[ヒント] 前問で求めた r, g, b を (2) で求めた値で割る。



(4) $R : G : B$ を $R + G + B = 1$ となるように変形すると、 R, G で色を特定できる。 $l-m$ 色相図にならい、横軸を R 、縦軸を M にとって平面上に各単波長光と同じ色となる R, G をプロットせよ。[ヒント] 上の図から読み取れるように、多くの波長域で $R < 0$ 。

参考 XYZ 表色系

R, G, B ですべての色を表そうと考えると、 R を負数にする必要が生じる。それを避けるため、工学の世界では、 R, G, B を線形変換した架空の色 X, Y, Z の混合で色を表す。詳細は ウィキペディア CIE1931 色空間 等を参照。

https://ja.wikipedia.org/wiki/CIE_1931_%E8%89%B2%E7%A9%BA%E9%96%93

3 BASIC プログラムの構造

3.1 手続き定義

3.1.1 関数定義

関数定義を利用すると、複雑な条件で定義された関数の記述もできる。

$$\text{例 } f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ (x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$$

```

100 FUNCTION f(x)
110   IF x<=1 THEN
120     LET f=0
130   ELSE
140     LET f=(x-1)^2
150   END IF
160 END FUNCTION
170 SET WINDOW -2,4,-1,5
180 DRAW grid
190 SET POINT STYLE 1
200 FOR x=-2 TO 4 STEP 0.01
210   PLOT POINTS: x,f(x)
220 NEXT x
230 END

```

関数定義は、FUNCTION 行で始まり、END FUNCTION 行で終わる。FUNCTION 行には、関数名と ひきすう 引数 を書く。関数値は関数名に対する LET 文で指定する。

DEF 文の場合と同様、関数の引数として書かれた変数は、プログラムの他の部分に書かれた同名の変数と別物である。たとえば、上の例で、100～150 行の x と 170 行以降に現れる x は異なる変数である。

一方、関数定義中に引数以外の変数があるとき、それは、プログラムの他の部分にある同名の変数と同一の変数である。

順列の数 ${}_nP_r$

$P(n,r)$ と書くと、順列の数 ${}_nP_r$ を計算してくれる関数 $P(n,r)$ を定義してみよう。

作例 1

```

10 FUNCTION P(n,r)
20   LET P=1
30   FOR k=0 TO r-1
40     LET P=P*(n-k)
50   NEXT k
60 END FUNCTION
70 INPUT n,r

```

```
80 PRINT P(n,r)
90 END
```

このプログラムを実行しようとするとき、翻訳時のエラーになって実行できない。なぜかというと、関数定義中の関数名は変数ではないから。計算に用いる変数を別に用意しなければならない。

作例 2

```
100 FUNCTION P(n,r)
110   LET v=1
120   FOR k=0 TO r-1
130     LET v=v*(n-k)
140   NEXT k
150   LET P=v
160 END FUNCTION
170 INPUT n,r
180 PRINT P(n,r)
190 END
```

このプログラムは正しく動作する。けれども、プログラムの他の部分で v や k を変数名として使っていると、関数 P を呼び出したとき、その値が書き換えられてしまう。異なる対象には異なる名前を与えることを徹底すればそのような問題は起こらないけれども、それは容易な仕事ではない。この問題を解決するのが、**外部関数定義**である。なお、これまで述べてきた関数定義は、外部関数定義と区別して**内部関数定義**と呼ばれる。

作例 3

```
10 DECLARE EXTERNAL FUNCTION P
20 INPUT n,r
30 PRINT P(n,r)
40 END
100 EXTERNAL FUNCTION P(n,r)
110 LET v=1
120 FOR k=0 TO r-1
130   LET v=v*(n-k)
140 NEXT k
150 LET P=v
160 END FUNCTION
```

外部関数定義は、END 行よりも後に書き、EXTERNAL FUNCTION で始まり、END FUNCTION で終わる。END 行より手前の部分を**主プログラム**という。外部関数定義や主プログラムをまとめて**プログラム単位**という。

外部関数を使うプログラム単位には、上の 10 行にあるような DECLARE 文を追加して、 P が関数名であることを明示する。ただし、十進 BASIC の現バージョンは、その関数名が

組込関数のいずれとも一致しない場合に DECLARE 文は省略できる。ただし、DECLARE 文を省いたとき、同名の組込関数があると、組込関数としての解釈が優先する。

実際に気軽に使えるのは、外部関数のほうである。文法上、大げさな記述が必要となってしまう欠点があるけれども、特に必要がないかぎり外部関数で書く方が、後々、プログラムを書き換えて使うとき楽である。内部関数が適するのは、主プログラム中の別の変数を参照したいときである。

外部関数を別の外部関数で使うこともできる。その場合は、その外部関数の定義部にも DECLARE 文が必要。

3.1.2 再帰

関数を定義するとき、自分自身を関数と使うことができる。このような関数の使い方を再帰という。たとえば、最大公約数を求める関数 GCD は、再帰を用いて書くと簡明に書ける。

```
FUNCTION GCD(a,b)
  IF b=0 THEN
    LET GCD=a
  ELSE
    LET GCD=GCD(b, MOD(a,b))
  END IF
END FUNCTION
INPUT a,b
PRINT GCD(a,b)
END
```

この例の場合、関数定義の内部で引数以外の変数を用いていないので、内部関数として定義しても支障は生じない。ただし、内部関数として定義すると、定義が書かれたプログラム単位以外では使えない。

練習 27 $n!$ は、 $0! = 1, n > 0$ のとき $n! = n \times (n-1)!$ で定義される。 $n!$ を計算する関数 FACT(n) を書け。入力是非負整数のみと仮定する。(階乗...factorial)

練習 28 順列の数 ${}_nP_r$ は、次の 2 通りの方法で計算できる。

$${}_nP_0 = 1, 0 < r \leq n \text{ のとき } {}_nP_r = {}_nP_{r-1} \times (n - r + 1)$$

$${}_nP_0 = 1, 0 < r \leq n \text{ のとき } {}_nP_r = n \times {}_{n-1}P_{r-1}$$

Note. 組合せの数 ${}_nC_r$ を計算するための次の関数定義 C(n, r) は正しいけれども、無駄な計算が多く、実行に時間がかかる。

```
FUNCTION C(n,r)
  IF r=0 OR r=n THEN
    LET C=1
  ELSE
```

```

    LET C=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)
  END IF
END FUNCTION

```

${}_nC_r$ を計算するのが目的であれば、違う種類の漸化式を探す。たとえば、

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{{}_nP_{r-1} \times (n-r+1)}{r \times (r-1)!} = {}_nC_{r-1} \times \frac{n-r+1}{r}$$

また、 $r > \frac{n}{2}$ のときは ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ を利用して計算すると無用な桁あふれを避けられる。

```

FUNCTION C(n,r)
  IF r=0 THEN
    LET C=1
  ELSEIF r<=n/2 THEN
    LET C=C(n,r-1)*(n-r+1)/r
  ELSE
    LET C=C(n,n-r)
  END IF
END FUNCTION

```

3.1.3 副プログラム

類似の処理をひとまとめに書きたいとき、あるいは、定型処理をパッケージにしておきたいとき、**副プログラム**を利用する。

副プログラムは、機能語 SUB に続けてその名称を書き、必要であれば、引数を () で括って書く。副プログラムは END SUB 行で終わる。

副プログラムを利用するときは、CALL 文にその副プログラムと引数を書く。CALL 文を実行することと呼び出すという。

関数定義の場合と同様、副プログラムには、内部副プログラムと外部副プログラムがある。

例 ヒストグラムを描く

配列にデータを入れて呼び出すと、平均と標準偏差を返す副プログラムを作ってみよう。名前は予約語以外であれば何でもよい。たとえば、stat と名付ける。

```
SUB stat(a(),m,s)
```

```
.....
```

```
END SUB
```

の形に定義する。a はデータの入った配列である。SUB 文に 1 次元配列を書くときは、それが 1 次元配列であることがわかるように () を後ろに付加して書く。m と s は平均と標準偏差を代入するための変数である。

副プログラム stat を実際に使うときは、

```
DIM a(100)
```

```
.....
```

```
CALL stat(a,m,s)
```

```
PRINT m,s
```

```
END
```

CALL 文に書くとき、配列に括弧を付けない。

関数定義と異なり、副プログラムには、変数を CALL 文の引数として書くと、その変数の値を副プログラムで変えることができるという特徴がある。なお、副プログラムの定義部に書く引数と、CALL 文に書くときの引数は異なる名前でもよい。書かれた順番に対応づけられる。

以下の副プログラムでは、配列の添字は 1 から始まっているものとする。1 次元配列の添字の上限は、UBOUND 関数で求められる。

```
100 SUB stat(a(),m,s)
110   LET n=UBOUND(a)
120   LET m=0
130   LET s=0
140   FOR i=1 TO n
150     LET m=m+a(i)
160     LET s=s+a(i)^2
170   NEXT i
180   LET m=m/n
190   LET s=s/n
200   LET s=SQR(s-m^2)
210 END SUB
220 DIM a(10)
230 DATA 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
240 MAT READ a
250 CALL stat(a,m,s)
260 PRINT m,s
270 END
```

副プログラム stat は、引数以外に n と i を使っている。主プログラムの別のところで n か i を使っていると干渉してしまう。

外部副プログラムとして定義しておけば、ライブラリとして使える。

```
100 DECLARE EXTERNAL SUB stat
110 DIM a(10)
120 DATA 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
130 MAT READ a
140 CALL stat(a,m,s)
150 PRINT m,s
160 END
1000 EXTERNAL SUB stat(a(),m,s)
1010 LET n=UBOUND(a)
1020 LET m=0
```

```

1030 LET s=0
1040 FOR i=1 TO n
1050     LET m=m+a(i)
1060     LET s=s+a(i)^2
1070 NEXT i
1080 LET m=m/n
1090 LET s=s/n
1100 LET s=SQR(s-m^2)
1110 END SUB

```

外部副プログラムを使うプログラム単位には、100 行のような DECLARE 文を書く。ただし、十進 BASIC の現バージョンには組込み副プログラムがないので、外部副プログラムに対する宣言文を省いても動作する。

同様の方法で、ヒストグラムを描く外部副プログラムなども作れる。分布を調べるために配列が必要になるが、外部副プログラム内に DIM 文で宣言する独立した配列を持つことができる。

例

```

100 DECLARE EXTERNAL SUB Histogram
110 DIM d(20)
120 DATA 1,1,3,4,4,4,4,8,9,10,3,3,3,3,5,6,6,6,6,6
130 MAT READ d
140 CALL Histogram(d,10)
150 END
2000 EXTERNAL SUB Histogram(a(),C) ! C クラス数 上限 100
2010 LET n=UBOUND(a)
2020 LET u=-MAXNUM ! 最大値
2030 LET v=MAXNUM ! 最小値
2040 FOR i=1 TO n
2050     IF a(i)>u THEN LET u=a(i)
2060     IF a(i)<v THEN LET v=a(i)
2070 NEXT i
2080 LET w=u-v
2090 DIM d(100)
2100 MAT d=ZER(C) ! d の添字の上限を C に変更
2110 FOR i=1 TO n
2120     LET ix=1+ROUND((a(i)-v)/w*(C-1))
2130     LET d(ix)=d(ix)+1
2140 NEXT i
2150 SET WINDOW 0.5, C+0.5, -n/40, n/2
2160 PLOT LINES:0.5,0; C+1.5,0
2170 SUB BOX(left,w, h)
2180     PLOT LINES:left,0; left,h; left+w,h; left+w,0

```

```

2190 END SUB
2200 FOR ix=1 TO C
2210     CALL BOX(ix-0.5,1,d(ix))
2220 NEXT ix
2230 END SUB

```

最小限の機能しか持たせていないので、各自、書き換えて使ってほしい。

練習 29 2つの変数 x, y について、その値の組を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_N, y_N)$ とする。 $s_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$ を x, y の共分散という。ただし、 $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$, $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k$, $s_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2}$, $s_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2}$ 上下限が一致する 2つの一次元配列 x, y を与えると、 $\bar{x}, \bar{y}, s_x, s_y, s_{xy}$ を計算する（外部）副プログラムを作れ。

3.1.4 絵定義

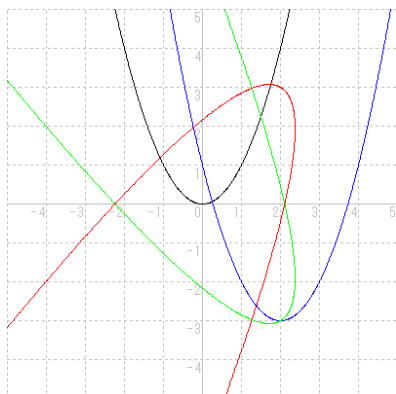
絵定義は、副プログラムとほぼ同じものであるが、描画命令（PLOT 文）を書いておくと、それを呼び出すときに、平行移動、拡大縮小、回転、アフィン変換や射影変換が実行される特徴がある。射影変換は 2 次元配列で指定する。

放物線 $y = x^2$ を描く絵定義を作る。絵定義は PICTURE 行で始まり END PICTURE 行で終わる。

```

100 OPTION ANGLE DEGREES
110 PICTURE Parabola
120     FOR x=-5 TO 5 STEP 0.01
130         PLOT LINES: x,x^2;
140     NEXT x
150 END PICTURE
160 SET WINDOW -5,5,-5,5
170 DRAW grid
180 DRAW Parabola
190 SET LINE COLOR 2
200 DRAW Parabola WITH SHIFT(2,-3)
210 SET LINE COLOR 3
220 DRAW Parabola WITH ROTATE(30)*SHIFT(2,-3)
230 SET LINE COLOR 4
240 DRAW Parabola WITH ROTATE(30)*SHIFT(2,-3)*SCALE(1,-1)
250 END

```



180 行にあるような形で DRAW Parabola を実行すると、通常の副プログラムと変わらない。

200 行, 220 行, 240 行のように, DRAW 文に変形項を書くことができる。

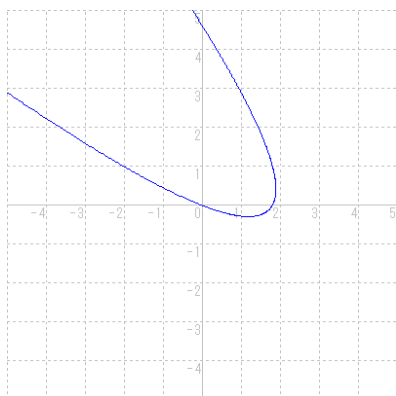
SHIFT(a, b) は, x 軸方向に a , y 軸方向に b の平行移動

ROTATE(a) は原点を中心とする角度 a の回転。100 行にあるように OPTION ANGLE DEGREES を宣言していると角度の単位は度。

SCALE(a, b) は, 原点を中心とする x 軸方向 a 倍, y 軸方向 b 倍の拡大。 a, b に負数を指定してもよい。

変換は*を用いて合成できる。変換の実行順は, 左から右 (書いてある順, 数学における関数の合成と逆)。

練習 30 Parabola を点 (1,2) を中心に 45° 回転して描く。



SHEAR

SHEAR(a) は, アフィン変換を考察するときの鍵となる変換で, $(x, y) \rightarrow (x + y \tan a, y)$ で定義されている。横にずらす変換で, ずらす量が y 座標に比例している。

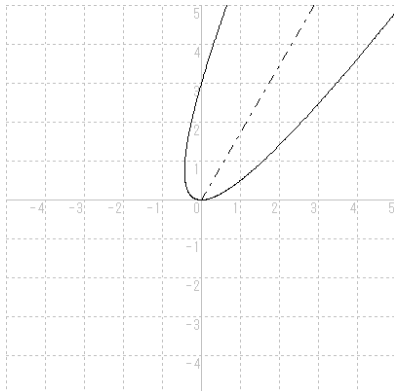
```
100 OPTION ANGLE DEGREES
110 PICTURE Parabola
120   FOR x=-5 TO 5 STEP 0.01
130     PLOT LINES: x,x^2;
140   NEXT x
150   PLOT LINES
```



```

160   SET LINE STYLE 4
170   PLOT LINES: 0,0; 0,10
180 END PICTURE
190 SET WINDOW -5,5,-5,5
200 DRAW grid
210 DRAW Parabola WITH SHEAR(30)
220 END

```



この例では、放物線の軸を一点鎖線で描いている。放物線は放物線に変換されるのに、軸は軸に移っていない。

射影変換

DRAW 文の変形項として 4 行 4 列の 2 次元配列 m を指定すると、次のような変換を行う。

A を DIM A(4,4) で宣言された 4 行 4 列の行列とすると、

DRAW a_pict WITH A

を実行すると、a_pict を描くとき、 x 座標、 y 座標をそれぞれ、

$$x' = \frac{A(1,1) * x + A(2,1) * y + A(4,1)}{A(1,4) * x + A(2,4) * y + A(4,4)}$$

$$y' = \frac{A(1,2) * x + A(2,2) * y + A(4,2)}{A(1,4) * x + A(2,4) * y + A(4,4)}$$

に変換する。

$A(i,j)$ を a_{ij} と書いて、行列 $A = (a_{ij})$ を用いて表すと

$$(x'', y'', z'', t) = (x, y, 0, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$x' = \frac{x''}{t}$$

$$y' = \frac{y''}{t}$$

である。通常の数学と行と列の関係が入れ替わっている。なので、変換の合成を行列の積で表すとき、行列は実行される順に書かれる。

例

$$x' = \frac{x}{1+2y}$$

$$y' = \frac{2y}{1+2y}$$

と表される射影変換

行列を用いて表すと

$$(x'', y'', z'', t) = (x, y, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

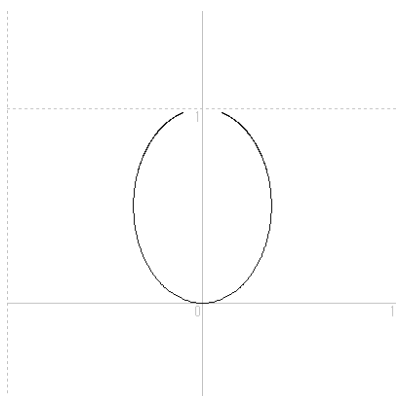
$$x' = \frac{x''}{t}$$

$$y' = \frac{y''}{t}$$

```

100 PICTURE Parabola
110   FOR x=-5 TO 5 STEP 0.01
120       PLOT LINES: x,x^2;
130   NEXT x
140 END PICTURE
150 DIM a(4,4)
160 DATA 1,0,0,0
170 DATA 0,2,0,2
180 DATA 0,0,0,0
190 DATA 0,0,0,1
200 MAT READ a
210 SET WINDOW -1,1,-0.5,1.5
220 DRAW grid
230 DRAW Parabola WITH a
240 END

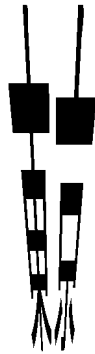
```



放物線が楕円に変換されているように見える。

錯覚アート

この技術を応用して、床面に描いた文字が立って見えるようにできる。



```

100 SET WINDOW -10,10,0,20
110 DIM m(4,4)
120 DATA 1.5, 0, 0, 0
130 DATA 0, 10, 0, -1
140 DATA 0, 0, 0, 0
150 DATA 0, 0, 0, 1.5
160 MAT READ m
170 DRAW pict1 WITH m
180 PICTURE pict1
190 SET TEXT HEIGHT 0.8
200 PLOT LETTERS ,AT -1,0:"東京"
210 END PICTURE
220 END

```

自己相似図形

相似縮小変換 f_1, f_2 に対して, $f_1(D) \cup f_2(D) = D$ となる図形 D を自己相似図形という。

D が有界であるものと仮定すれば, D を描く手続きを次のように作成することで, D を描くことができる。

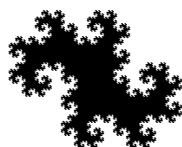
D を描く手続き

$f_1(D)$ を描く

$f_2(D)$ を描く

手続き終わり

f_1, f_2 が縮小写像であることから, この再帰手続きを繰り返すと, 描くべき図形の直径はディスプレイの解像度に比べて十分に小さくなる。そのとき, 問題の図形を1点で代替して描く。



例 ドラゴン集合

f_1 が原点を中心とする 45° の回転と $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍の縮小の合成写像, f_2 が点 $(1,0)$ を中心とする 45° の回転と $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍の縮小の合成写像であるとき, f_1, f_2 に対する自己相似図形は, 次のように求められる。

原点を中心とする角 α の回転を $\text{rotate}(\alpha)$,

原点を中心とする r 倍の拡大を $\text{scale}(r)$,

x 軸方向に a , y 軸方向に b の平行移動を $\text{shift}(a, b)$ で表し,

変換 T_1, T_2 の合成を $T_1 * T_2$ で表すと,

f_1, f_2 は,

$$f_1 = \text{rotate}\left(\frac{\pi}{4}\right) * \text{scale}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$f_2 = \text{shift}(1,0) * \text{rotate}\left(\frac{\pi}{4}\right) * \text{scale}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) * \text{shift}(1,0)$$

と表すことができる。

D を描く手続きのなかで $f_1(D)$ や $f_2(D)$ を描くのに, Full BASIC の図形変換機能を用いる。

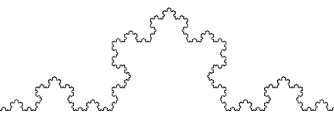
```

100 PICTURE D(n)
110 IF n=18 THEN
120     PLOT POINTS: 0,0
130 ELSE
140     DRAW D(n+1) WITH ROTATE(PI/4)*SCALE(1/sqr(2))
150     DRAW D(n+1) WITH SHIFT(-1,0)*ROTATE(PI/4)*SCALE(1/sqr(2))*SHIFT(1,0)
160 END IF
170 END PICTURE
180 SET WINDOW -1/2 , 3/2 , -1 , 1
190 SET POINT STYLE 1
210 DRAW D(0)
220 END

```

210 行は, 引数 n に 0 を代入して 100 行から始まる絵定義 (picture) D を呼び出す。100 行から始まる絵定義 D で, 引数 n は再帰の深さを制御するためのものである。140 行と 150 行で再帰的に D を呼び出すときに n を 1 加算している。 n の値が 110 行の if 文で指定している数値 18 になると再帰呼び出しを終了し, 変換された座標系の原点にマークを描く。

110 行で指定する定数は, f_1, f_2 の縮小率と描画領域の縦横方向のピクセル数とから定める。

この手法を用いることで, コッホ曲線  など, 多くの自己相似図形を描くことができる。

練習 31 二等辺三角形 ABC において, 底辺の長さが 6 で, 頂点 C から底辺 AB に下した

垂線の長さを $\sqrt{3}$ とする。頂点 A を不動点として、点 B を点 C に移し、点 C を線分 AB 上に移す相似変換を f_1 、頂点 B を不動点として、点 A を点 C に移し、点 C を線分 BA 上に移す相似変換を f_2 とする。このとき、 f_1, f_2 により定められる自己相似図形を描け。

3.1.5 モジュール

外部関数定義、外部副プログラムでは、実行を終えるとその内部で用いていた変数の値は失われてしまう。たとえば、関数が何回呼び出されたか知る手段がない。相対座標グラフィックスを実現するためには、現在座標が保存されなければならない。

モジュールは、外部関数定義や外部副プログラムに永続的な変数を提供する。

相対座標グラフィックス（タートル・グラフィックス）

LOGO のような相対座標グラフィックス。

```

1000 MODULE turtle
1010 MODULE OPTION ANGLE DEGREES
1020 PUBLIC SUB fd, rt, lt, pu, pd
1030 SHARE NUMERIC curX, curY, direction
1040 SHARE STRING pen$
1050 LET curX=0
1060 LET curY=0
1070 LET direction=90
1080 LET pen$="up"
1090 EXTERNAL SUB fd(r) ! Forward 前進
1100 LET x0=curX
1110 LET y0=curY
1120 LET curX=curX+r*COS(direction)
1130 LET curY=curY+r*SIN(direction)
1140 IF pen$="up" THEN PLOT LINES: x0,y0; curX, curY
1150 END SUB
1160 EXTERNAL SUB rt(t) ! Right Turn 右転
1170 LET direction=direction - t
1180 END SUB
1190 EXTERNAL SUB lt(t) ! Left Turn 左転
1200 LET direction=direction + t
1210 END SUB
1220 EXTERNAL SUB pu ! Pen Up
1230 LET pen$="up"
1240 END SUB
1250 EXTERNAL SUB pd ! Pen Down
1260 LET pen$="down"
1270 END SUB

```

1280 END MODULE

モジュールは、その名称を宣言する MODULE 行で始まり END MODULE 行で終わる。

モジュール内で PUBLIC 宣言された変数、手続きのみが外部から参照できる。

SHARE 宣言は、モジュール内で共通な変数、手続きを指定する。

PUBLIC, あるいは, SHARE 宣言された変数は、永続的に存在する。

1030 行で宣言されている変数 curX, curY, direction は、それぞれ、現在座標と向きを保持する。

モジュールは、主プログラム以降 (END 行の後) に書く。

MODULE turtle を利用するとき、主プログラムは次のように書く。

```
100 DECLARE EXTERNAL SUB turtle.fd, turtle.rt
110 SET WINDOW -2,2,-2,2
120 FOR i=1 TO 5
130   CALL fd(2)
140   CALL rt(144)
150   WAIT DELAY 0.2 ! 0.2 秒休む
160 NEXT i
170 END
```

100 行に示すような DECLARE EXTERNAL 文で、fd, rt がモジュール turtle で公開されている手続きであることを指示する。DECLARE EXTERNAL 文に“モジュール名. 手続き名”の形に書いておくことで、以後、130 行や 140 行のように“モジュール名.”を省いて書くことができる。

4 数学と社会

4.1 近似式

4.1.1 回帰直線

2 つの変数 x, y について、その値の組を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_N, y_N)$ とする。

$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$ を x, y の相関係数という。

一次関数 $y = ax + b$ で変数 x の値から y の値を推定したい。

$\sum_{k=1}^N \{y_k - (ax_k + b)\}^2$ が最小となるように a, b を定める。

$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2 = s_x^2 + \bar{x}^2, \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 = s_y^2 + \bar{y}^2, \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k y_k = s_{xy} + \bar{x}\bar{y} = r s_x s_y + \bar{x}\bar{y}$ に注意すると、

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{y_k - (ax_k + b)\}^2 = \{b - (\bar{y} - a\bar{x})\}^2 + s_x^2 \left(a - r \frac{s_y}{s_x}\right)^2 + s_y^2 (1 - r^2)$$

と変形できるので、

$a = r \frac{s_y}{s_x}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$ と定めると $\sum_{k=1}^N \{y_k - (ax_k + b)\}^2$ が最小になる。

y の x への回帰直線

直線 $y = r \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}) + \bar{y}$ を y の x への回帰直線という。

練習 32 2 つの変量 x, y の値の組 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_N, y_N)$ を与えると, x, y の散布図と, y の x への回帰直線を描くプログラムを作れ。変量 x, y の値の組の入力方法は, DATA 文, テキストファイル, いずれでもよい。

4.1.2 補間 多項式による近似

n 次関数は, 異なる $n+1$ 個の x に対する y の値で決定される。

$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ で $y_k = f(x_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) とする。

$P(x_k) = y_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) となる n 次多項式 $P(x)$ を求める。

$n = 1$ のとき。

$P(x) = A(x - x_1) + B(x - x_0)$ とおいて,

$$P(x_0) = y_0 \text{ より } A(x_0 - x_1) = y_0 \quad \therefore A = \frac{y_0}{x_0 - x_1}$$

$$P(x_1) = y_1 \text{ より } B(x_1 - x_0) = y_1 \quad \therefore B = \frac{y_1}{x_1 - x_0}$$

$$\text{すなわち, } P(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$n = 2$ のとき。

$P(x) = A(x - x_1)(x - x_2) + B(x - x_0)(x - x_2) + C(x - x_0)(x - x_1)$ とおいて,

$$P(x_0) = y_0 \text{ より } A(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = y_0 \quad \therefore A = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$P(x_1) = y_1 \text{ より } B(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) = y_1 \quad \therefore B = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$P(x_2) = y_2 \text{ より } C(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \quad \therefore C = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

すなわち,

$$P(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

同様にして, $n = 3$ のとき,

$$P(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

見かけは複雑な数式に見えるが, たとえば y_1 の乗数は

$$\frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \begin{cases} 0 & (x = x_0, x_2, x_3) \\ 1 & (x = x_1) \end{cases}$$

となっている。だから, 一般の n に対しても, 同様の手法によって,

$$P_k(x) = \begin{cases} 0 & (x = x_j \quad j \neq k) \\ 1 & (x = x_k) \end{cases}$$

となる n 次多項式 $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ を定義して,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n P_k(x)$$

とすればよい。

この多項式をラグランジュの補間多項式という (ラグランジュ補間公式ともいう)。

例 33 以下の数表をもとに正弦関数を多項式で近似してみる。

x	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

以下のプログラムでは，組込関数 SIN(x) を利用して上表の値をセットしている。

```

100 LET n=8
110 DIM x(0 TO n), y(0 TO n)
120 SET WINDOW -2,8,-5,5
130 DRAW grid
140 FOR k=0 TO n
150     LET x(k)=k*2*PI/n
160     LET y(k)=SIN(x(k))
170     PLOT POINTS : x(k),y(k)
180 NEXT k
190 FUNCTION P(k,xx)
200     LET w=1
210     FOR i=0 TO n
220         IF i<>k THEN LET w=w*(xx-x(i))/(x(k)-x(i))
230     NEXT i
240     LET P=w*y(k)
250 END FUNCTION
260 FUNCTION PP(xx)
270     LET v=0
280     FOR k=0 TO n
290         LET v=v+P(k,xx)
300     NEXT k
310     LET PP=v
320 END FUNCTION
330 SET LINE COLOR 3
340 FOR xx=-2 TO 8 STEP 0.01
350     PLOT LINES: xx,SIN(xx);
360 NEXT xx
370 PLOT LINES
380 SET LINE COLOR 4
390 FOR xx=-2 TO 8 STEP 0.01
400     PLOT LINES: xx,PP(xx);
410 NEXT xx
420 PLOT LINES
430 SET LINE COLOR 2
440 FOR xx=-2 TO 8 STEP 0.01
450     PLOT LINES: xx,(PP(xx)-SIN(xx))*1000 ;

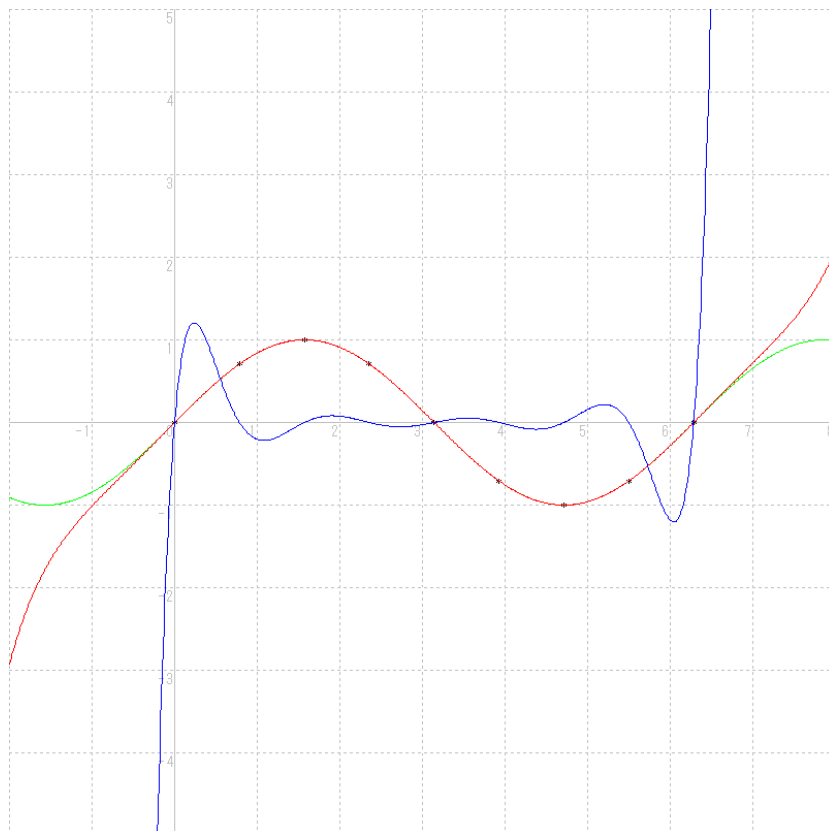
```



```

460 NEXT xx
470 PLOT LINES
480 END

```



黒点がはじめに与えた点。緑線は $y = \sin x$ のグラフ。赤線が補間式の計算結果。青線で補間式の誤差の 1000 倍を描いている。両端に近いところで誤差が大きいことが分かる。

問 34 区間の分割数を変えて調べてみよう。たとえば, $n = 16, 32, 64$ 。

チェビシェフ多項式の根で一致する多項式による近似

分点を等間隔に取らずに、両端で細かく分点を取ると誤差を減らせるかもしれない。その目的に即した手法がある。

チェビシェフ多項式は、 $\cos n\theta$ を $\cos \theta$ で表す多項式である。 $\cos \theta$ の変域 $-1 \leq x \leq 1$ でこの多項式が取る値は $-1 \leq y \leq 1$ である。なぜなら、 $-1 \leq \cos n\theta \leq 1$ だから。なので、チェビシェフ多項式の根で値が一致する多項式を用いて近似すると、誤差が均等に配分されて誤差の最大値を小さくできることが知られている。

チェビシェフ多項式の根は、 $\cos n\theta = 0$ になる θ に対応する $\cos \theta$ である。

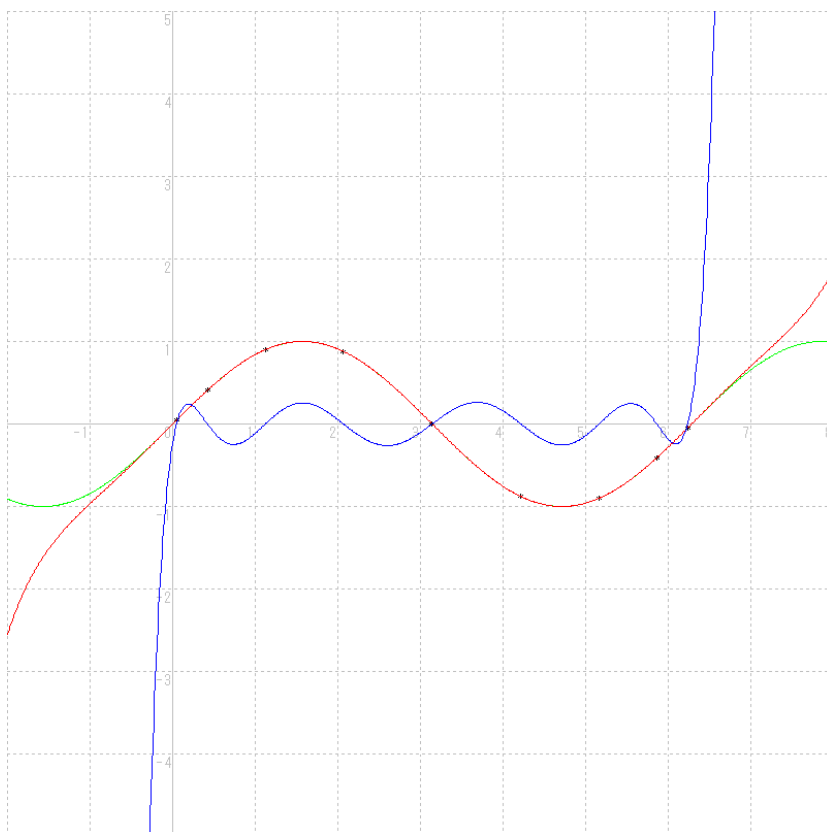
前例は 9 個の点で一致する多項式を用いて近似した。チェビシェフ多項式の根 9 個で一致する多項式で近似してみよう。

$$n = 9 \text{ のとき, } 9\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ より } \theta = \frac{\pi}{18} + \frac{k}{9}\pi \ (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{だから, チェビシェフ多項式の根は, } \cos \frac{2k+1}{18}\pi \ (k = 0, 1, 2, \dots, 8)$$

区間 $-1 \leq x \leq 1$ が区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ に対応するように、これらの根に 1 を加え、 π 倍した点で近似式を作る。

```
100 OPTION BASE 0
110 LET n=8
120 DIM x(n),y(n)
130 SET WINDOW -2,8,-5,5
140 DRAW grid
150 FOR k=0 TO n
160     LET x(k)=(COS(PI/18*(2*k+1))+1)*PI
170     LET y(k)=SIN(x(k))
180     PLOT POINTS : x(k),y(k)
190 NEXT k
200 FUNCTION P(k,xx)
210     LET w=1
220     FOR i=0 TO n
230         IF i<>k THEN LET w=w*(xx-x(i))/(x(k)-x(i))
240     NEXT i
250     LET P=w*y(k)
260 END FUNCTION
270 FUNCTION PP(xx)
280     LET v=0
290     FOR k=0 TO n
300         LET v=v+P(k,xx)
310     NEXT k
320     LET PP=v
330 END FUNCTION
340 SET LINE COLOR 3
350 FOR xx=-2 TO 8 STEP 0.01
360     PLOT LINES: xx,SIN(xx);
370 NEXT xx
380 PLOT LINES
390 SET LINE COLOR 4
400 FOR xx=-2 TO 8 STEP 0.01
410     PLOT LINES: xx,PP(xx);
420 NEXT xx
430 PLOT LINES
440 SET LINE COLOR 2
450 FOR xx=-2 TO 8 STEP 0.01
460     PLOT LINES: xx,(PP(xx)-SIN(xx))*1000;
470 NEXT xx
480 END
```



黒点がはじめに与えた点。緑線は $y = \sin x$ のグラフ。赤線が補間式の計算結果。青線で補間式の誤差の 1000 倍を描いている。前例に比べて誤差のピークが小さいことが分かる。

問 35 正弦関数 $\sin x$ の値を求めることが目的であれば、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲だけ正確に計算できれば事足りる。正弦関数の近似多項式を作ってみよう。

問 36 下表は、2015 年～2024 年の伊豆大島の最高気温である。

西暦年	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
最高気温 (°C)	33.3	32.7	33.0	33.9	32.4	35.9	32.4	32.1	33.7	34.2

過去 10 年で数値が一致する 9 次多項式で、2025 年の最高気温を予測すると、993°C となった。なぜ、こんな非常識な計算結果が得られるのだろうか。

[ヒント] 上のデータから得られる補間多項式のグラフを描くと、下のようになる。黒点が元のデータ、赤線が補間多項式の値。



一次関数で近似するのが不適切なデータをどんな関数で近似すればよいか、というのは、重要な研究テーマである。

★機械学習で教師データに対し正しく反応する人工知能システムを作っても、少しずれた類似データに対して異常な反応を示すものになってしまうことがある（過学習という）。上例は、単純ではあるが、その例になっている。

4.2 RSA 暗号

インターネットで用いられる公開鍵暗号の RSA 暗号は、整数論の応用である。

4.2.1 一次不定方程式 $ax + by = c$

ユークリッド互除法を適用して、解（の一つ）を求める。

$b = 0$ のとき、 a が c の約数であれば、 $x = c/a$, $y = 0$ は解、そうでないとき、解なし。

$b > 0$ のとき、 a を b で割った商を q , 余りを r とすると、

$(bq + r)x + by = c$, すなわち、 $b(qx + y) + rx = c$ 。

$u = qx + y$, $v = x$ とおくと、 $bu + rv = c$ 。

$bu + rv = c$ となる u, v が求まるとき、 $x = v$, $y = u - qx$ は解。

再帰処理を許すプログラム言語を用いれば、次のプログラムで一次不定方程式 $ax + by = c$ の解（の一つ）を求めることができる。

```

100 INPUT a,b,c
110 CALL solve(a,x,b,y,c)
120 PRINT x,y
130 END
1000 EXTERNAL SUB solve(a,x,b,y,c)
1010 IF b>0 THEN
1020   LET q=INT(a/b)
1030   LET r=MOD(a,b)
1040   CALL solve(b,u,r,v,c)
1050   LET x=v
1060   LET y=u-q*x
1070 ELSE
1080   IF MOD(c,a)=0 THEN
1090     LET x=c/a
1100     LET y=0
1110   ELSE
1120     PRINT "解なし"
1130     STOP
1140   END IF
1150 END IF
1160 END SUB

```

Note. Full BASIC では、副プログラム呼び出しに変数として書かれた引数は参照渡し（値ではなく、アドレスを渡す）。副プログラム実行中に変数の値を変えると引数として書かれた変数が書き換わる。他のプログラム言語で書くときは、 x, y が参照渡し（アドレス渡し）となるようにする。たとえば、C 言語であればポインタを使う。

Note2. 上のプログラムの 1020 行、1030 行に現れる変数 q, r には副プログラムの呼び出しごとに新たな変数が割り当てられる。もし、そうでないとすると、1040 行で自分自身を呼び出したときその値が変化してしまい、1060 行を実行したときの q は 1020 行で計算した q ではないことになる。これは、外部副プログラムの特徴で、上のプログラムを内部副プログラムに書き換えると正しく動作しない。

行列を用いて一次不定方程式を解く

$d = \text{GCD}(a, b)$ とおくと、一次不定方程式 $ax + by = d$ の問題を行列で表現し解くこともできる。

a を b で割った商を q 、余りを r とすると

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix}$$

$r \neq 0$ のとき、 b を r で割った商を q_1 、余りを r_1 とすると、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ r_1 \end{pmatrix}$$

$r_1 \neq 0$ のとき、 r を r_1 で割った商を q_2 、余りを r_2 とすると、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

以下、同様にして

$r_k \neq 0$ のとき、 r_{k-1} を r_k で割った商を q_{k+1} 、余りを r_{k+1} とすると、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_k \\ r_{k+1} \end{pmatrix}$$

$r_n \neq 0, r_{n+1} = 0$ となるまでこの計算（互除法の計算）を続けると $d = r_n$ なので

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、 $M = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおいて

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \text{ とすると、} \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} \text{ となるので、}$$

$$ax + by = d$$

だから、 M を計算し、 M^{-1} を求めれば、 $ax + by = d$ となる x, y, d が求まる。

問題 1 $M^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ とおくと、 x, y が整数になるのはなぜか？

[ヒント] $q, q_1, q_2, \dots$ は整数なので、 M の要素はすべて整数になる。

a, b を入力して $ax + by = d$ となる x, y, d （ただし $d = \text{GCD}(a, b)$ ）を求めるプログラム

```

100 DIM M(2,2),N(2,2)
110 INPUT a,b
120 LET aa=a
130 LET bb=b
140 MAT M=IDN          ! IDN は単位行列
150 DO UNTIL b=0
160   LET q=INT(a/b)
170   LET r=MOD(a,b)
180   LET N(1,1)=q
190   LET N(1,2)=1
200   LET N(2,1)=1
210   LET N(2,2)=0
220   MAT M=M*N        ! 行列の積
230   LET a=b
240   LET b=r
250 LOOP
260 MAT N=INV(M)       ! 逆行列
270 PRINT aa;"*";N(1,1);"+";bb;"*";N(1,2);"="; a
280 END

```

定理 37 正の整数 a, b に対し, $\text{GCD}(a, b) = 1$ であれば, 方程式 $ax + by = 1$ は整数解を持つ。

証明. 証明 $P(n)$ を「 a, b のうちの大きい方が n 以下であるとき方程式 $ax + by = 1$ は整数解を持つ」として, $P(n)$ に数学的帰納法を適用する。□

定理 38 a, b, c を整数とする。 ab が c の倍数で $\text{GCD}(b, c) = 1$ であれば, a は c の倍数である。

証明. $ab = cn$ (n は整数) とする。

前定理より $bx + cy = 1$ となる整数 x, y があるので, $abx + acy = a$

$\therefore a = cnx + acy = c(nx + cy)$ は c の倍数。□

定理 39 整数 a, b に対し, ab が素数 p の倍数であれば, a, b のうち少なくとも一方は p の倍数である。

証明. p は素数なので, $\text{GCD}(b, p) = 1$ または $\text{GCD}(b, p) = p$ 。

$\text{GCD}(b, p) = 1$ のとき, 前定理より a は p の倍数。□

定理 40 p, q を相異なる 2 つの素数とする。整数 a が p の倍数でも q の倍数でもあるとき, a は pq の倍数である。

証明. $a = pn$ (n は整数) とする。 pn は q の倍数で $\text{GCD}(p, q) = 1$ なので n は q の倍数。だから, $a = pn$ は pq の倍数。□

4.2.2 剰余系

a を k で割った余りを $a \bmod k$ で表し, $a \bmod k = b \bmod k$ であることを $a \equiv b \pmod{k}$ で表す。

定理 41 k を 1 より大きい整数とする。 $a \equiv b \pmod{k} \Leftrightarrow a - b$ は k の倍数

証明. $\Rightarrow$ は明らか。 $\Leftarrow$ を示す。

$a = q_1k + r_1, b = q_2k + r_2, q_1, q_2$ は整数, $0 \leq r_1 < k, 0 \leq r_2 < k$ とすると,
 $a - b = (q_1 - q_2)k + (r_1 - r_2)$ で, $-k < r_1 - r_2 < k$ なので,
 $a - b$ が k の倍数であることから $r_1 - r_2 = 0$ 。 $\square$

合同式の計算公式

$$a \equiv b \pmod{k} \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{k}$$

$c \neq 0$ のとき, $a \equiv b \pmod{k} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{k}$ (逆は成立しない。逆が成立する場合を考えてみる。)

観察 42 $k = 2, 3, 4, \dots, 16$ について, $(a \times b) \bmod k$ の表を作る。ただし, $a = 1, 2, \dots, k-1, b = 1, 2, \dots, k-1$ 。この表を利用して $ax \equiv 1 \pmod{k}$ となる整数 x を求める。

定理 43 a, k が互いに素であるとき, 方程式 $ax \equiv 1 \pmod{k}$ は整数解を持つ。

問題 2 a, k を入力すると, $ax \equiv 1 \pmod{k}$ となる x (のうちの一つ) を出力するプログラムを作れ。

ヒント不定方程式 $ax + ky = 1$ の解を求める。

剰余系における乗算

$$ab \bmod k = (a \bmod k)(b \bmod k) \bmod k$$

注意 $\bmod$ は加減に優先し, 乗除は $\bmod$ に優先するものとして括弧を省いて書く。

4.2.3 フェルマーの小定理

観察 44 パスカルの三角形において, 素数 p の段は, 両端を除くとすべて p の倍数である。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
 \end{array}$$

問 45 それはなぜか。

観察 46 $k = 3, 4, 5, \dots$ に対し, $2^n \bmod k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を計算し, 規則性を調べてみよう。各 k に対し $2^n \bmod k = 2$ となる最小の自然数 n を求めよう (存在しないこともある)。

定理 47 2 より大きい素数 p に対し, $2^p \bmod p = 2$

証明. $2^p = (1 + 1)^p = 1 + {}_p C_1 + \dots + {}_p C_r + \dots + {}_p C_{p-1} + 1$

$r = 1, 2, \dots, p-1$ に対し,

${}_p C_r = \frac{p!}{(p-r)!r!}$ より $p! = {}_p C_r (p-r)!r!$ となり,

$p!$ は p の倍数で, $(p-r)!r!$ は p と互いに素なので,

${}_p C_r$ は p の倍数。

$\therefore 2^p \bmod p = 1 + 1 = 2 \quad \square$

観察 48 $k = 4, 5, 6, \dots$ に対し, $3^n \bmod k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を計算し, 規則性を調べる。各 k に対し $3^n \bmod k = 3$ となる最小の自然数 n を求める。

定理 49 3 より大きい素数 p に対し, $3^p \bmod p = 3$

証明. $3^p = (2 + 1)^p = 2^p + {}_p C_1 2^{p-1} + \dots + {}_p C_r 2^{p-r} + \dots + {}_p C_{p-1} 2 + 1$

前定理より, $2^p \bmod p = 2$ なので, 前定理の証明と同様にして $3^p \bmod p = 2 + 1 = 3 \quad \square$

定理 50 a を正の整数とする。 a より大きい素数 p に対し,

(1) $a^p \equiv a \pmod{p}$

(2) $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (フェルマーの小定理)

証明. (1) は, 前定理と同様 (数学的帰納法による)。

(2) は, a, p が互いに素であることからいえる。 $\square$

問題 3 $a = 2$ とする。 $a^n \bmod k = \{a(a^{n-1} \bmod k)\} \bmod k$ を利用して計算することで, $a^{k-1} \bmod k = 1$ となる a より大きい自然数 k を探せ。さらに, a の値を変えて同様の探査を行え。

★ 上の問題は k が素数であるための必要条件。 $2 \leq a < k$ であるすべての整数 a に対し $a^{k-1} \bmod k = 1$ となる合成数 k の存在が知られている。たとえば, $k = 561, 1105, \dots$ (カーマイケル数と呼ばれている)。

4.2.4 RSA 暗号による通信の原理

受信者は, 公開鍵 k, m を公開する。

送信者は, 平文 (plain text) P に対し, $C = P^k \bmod m$ によって暗号文 (cipher text) C を作成し, 受信者に送る。ただし, $P < m$ とする。

受信者は, 秘密鍵 u を用いて $C^u \bmod m$ を計算して, 平文 P を得る。

公開鍵と秘密鍵の条件

- (1) 指定範囲内の任意の P に対し $P^{ku} \equiv P \pmod{m}$ (復号できること)
- (2) k, m から u を容易には推測できないこと。 (暗号の安全性)

公開鍵と秘密鍵をどう作るか。

異なる素数 2 個 p, q を用意し, $m = pq$ とする。

$(p-1)(q-1)$ と互いに素な正の整数を選び, 公開鍵 k とする。

$ku \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ となる正の整数 u を秘密鍵とする。

復号できる理由

概要 $P^{ku} \equiv P \pmod{p}$ と $P^{ku} \equiv P \pmod{q}$ を示して, $P^{ku} \equiv P \pmod{m}$ を導く。

$ku \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ だから, 正の整数 v を用いて

$$ku = (p-1)(q-1)v + 1$$

と書ける。

$P^{ku} \equiv P \pmod{p}$ となる理由を示す。

(i) P が p の倍数であるとき, $P^{ku} \equiv P \pmod{p}$ となるのは明らか。

(ii) P が p の倍数でないとき。

フェルマーの小定理から, $P^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

両辺を $(q-1)v$ 乗し, さらに P を乗じると,

$$P^{(p-1)(q-1)v+1} \equiv P \pmod{p}$$

$ku = (p-1)(q-1)v + 1$ なので,

$$P^{ku} \equiv P \pmod{p}$$

同様に $P^{ku} \equiv P \pmod{q}$ もいえる。

$P^{ku} \equiv P \pmod{p}$ と $P^{ku} \equiv P \pmod{q}$ から, $P^{ku} - P$ は p の倍数であり, q の倍数でもある。

p, q は異なる素数なので, $P^{ku} - P$ は $m = pq$ の倍数 (定理 40 より)。

すなわち, $P^{ku} \equiv P \pmod{m}$

4.2.5 文章の数値化

インターネットでは, バイト (= 8 ビット) を単位として通信する。

英数字と, !%&"',?+*{}() などの記号は, バイトの範囲で符号化できる (7 ビット ASCII)。

平文の数値化

平文がバイト列 abcde... で表されるとき,

$$P = a + b \times 256 + c \times 256^2 + d \times 256^3 + e \times 256^4 + \dots$$

とする。

暗号の破り方と対策

1. 受信した C と一致するまで, $P = 1, 2, 3, 4, \dots$ に対し $P^k \bmod m$ を計算する。

対策 P が小さい数のときは, 公開鍵 k, m から簡単に解読されてしまうので, 短い文のときにはダミーを追加して長くする。

2. m を素因数分解して p, q を求める。 $(p-1)(q-1)$ が分かれば秘密鍵 u は簡単に求まる。

対策 p, q を大きい素数に選ぶ。

秘密鍵の安全性

p, q が分かれば秘密鍵 u は簡単に求まるけれど、 m を素因数分解して p, q を求めるのに時間がかかるので、秘密鍵 u を求めるのは容易ではない。

4.2.6 手計算での演習

準備

平文の範囲を 1~128 とする。

10 より大きい異なる素数 2 個を選び、 p, q とする。たとえば、 $p = 17, q = 13$ 。

$m = pq$ とし、 $(p-1)(q-1)$ と互いに素な正の整数 k を選び、 k と m を公開する。

$m = 221, (p-1)(q-1) = 16 \times 12 = 192, k = 11$ 。

$ku \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ となる正の整数 u を求める。

一次不定方程式 $ku - (p-1)(q-1)v = 1$ の解 u, v を求め、 u が負の数だったら正の数になるまで $(p-1)(q-1)$ を加えればよい。

$11u - 192v = 1$ の解を求めると、 $u = 35, v = 2$

u を秘密鍵として所持する。 $u = 35$

公開鍵 $k = 11, m = 221$, 秘密鍵 $u = 35$ 。

暗号文の作成

送信者は、送りたい数 P に対し、 $C = P^k \bmod m$ を計算して C を受信者に送る。

暗号文の復号

受信者は、受け取った C に対し、 $C^u \bmod m$ を計算する。

暗号破り

次のいずれか（または両方）を試す。

(1) $P = 1, 2, 3$, に対し、 $C = P^k \bmod m$ を計算し、傍受した C と一致するまで繰り返す。

(2) m を $m = pq$ の形に素因数分解し、秘密鍵 u を計算する。

4.2.7 RSA 暗号による通信の実践

十進 BASIC の 2 進モード（他の多くの言語で倍精度数）での計算を想定する。

平文を ASCII 4 文字、すなわち、 $256^3 \leq P < 256^4$ とする。

準備（受信者）

$256^4 = 2^{32} < pq < 2^{52}$ となる異なる素数 p, q を選び、 $m = pq$ とする。

素数は、エラトステネスの篩で、1000000 以下の素数のリストを作っておけば、その中から選べるだろう。

次に、 $(p-1)(q-1)$ と互いに素な正の整数 k を選ぶ。適宜の素数を選んで $p-1$, $q-1$ いずれの約数でもないことを確認すればいい。

この k, m を公開する。

秘密鍵 u を求めておく。一次不定方程式 $ku - (p-1)(q-1)v = 1$ の解 u, v を求め、 u を $(p-1)(q-1)$ で割った余りを改めて u とおく。

暗号文の作成（送信者）

ASCII 4 文字を入力し、数値化する。

```
INPUT s$
```

```
LET P=ORD(s$(1:1)) + ORD(s$(2:2))*256
```

```
LET P=P + ORD(s$(3:3))*256^2+ ORD(s$(4:4))*256^3
```

とすればよい。

$C = P^k \bmod m$ を計算して C を受信者に送る。

```
LET C=MOD(P^k,m)
```

としたのでは、 P^k の計算で必要な精度が確保できない。 P を 1 に k 回かける計算に分解し、各回の計算ごとに m で割った余りに置き換える。たとえば、

```
LET C=1
```

```
FOR j=1 TO k
```

```
    LET C=MOD(C*P,m)
```

```
NEXT j
```

ただし、 k が大きな数のとき、この方法では時間がかかる。整数 k を 2 進法で表す手法を応用して、

$P^2 \bmod m, P^4 \bmod m, P^8 \bmod m, P^{16} \bmod m, \dots$

を順に計算しながら、必要な部分だけ取り出して掛け算する方法を用いる。

たとえば、 $27 = 1 + 2 + 8 + 16$ なので、 $P^{27} \equiv PP^2P^8P^{16} \pmod{m}$ 。

暗号文の復号

受信者は、受け取った C に対し、上述と同様の方法で $C^u \bmod m$ を計算し、

```
LET s$=CHR$(MOD(C,256))& CHR$(INT(MOD(C,256^2)/256))
```

```
LET s$=s$& CHR$(INT(MOD(C,256^3)/256^2))& CHR$(INT(C/256^4)/256^3)
```

```
PRINT s$
```

のようにして、文字列に変換し表示する。

暗号破り

次のいずれか（または両方）を試す。

(1) $P = 1, 2, 3$ に対し、 $C = P^k \bmod m$ を計算し、傍受した C と一致するまで繰り返す。

(2) m を $m = pq$ の形に素因数分解し、秘密鍵 u を計算して暗号を解読する。

問 51 (1), (2) のうち, より効率的に実行できるのはどちらか。[ヒント] 素因数のうちの小さい方は $\sqrt{m}$ より小さい。

4.3 グラフ

4.3.1 無向グラフ

無向グラフ

頂点と呼ばれる点と, 異なる頂点間を結ぶ線で形成される図形を**無向グラフ**と呼ぶ。

無向グラフでは, 頂点の実際の位置の違いや, 線の形状の違いを問わない。どの頂点とどの頂点が線で結ばれるかのみを問う。

頂点と頂点を結ぶ線を**辺**と呼ぶ。

以後, 無向グラフのみを扱う。

頂点の次数

グラフの頂点 P に対し, P を含む辺の本数を P の**次数**といい, $\deg(P)$ で表す。

補題 52 グラフにおいて, 頂点の次数の和は偶数 (辺の数の 2 倍) である。

次数が偶数である点を偶点, 次数が奇数である点を奇点という。

補題 53 グラフにおいて, 奇点の個数は偶数個である。

グラフの連結成分

辺をたどって頂点 P から頂点 Q へ行くことができるとき, $P \sim Q$ と書くことにする。

$P \sim Q$ であるような点 Q と, それらを端点にもつ辺とからなるグラフを P の**連結成分**という。

P の連結成分を G_P で表す。

異なる連結成分は頂点も辺も共有しない。すなわち, 2 つの頂点 P, Q に対し, $G_P = G_Q$ または $G_P \cap G_Q = \emptyset$ 。

4.3.2 グラフを行列で表す (隣接行列)

グラフの隣接行列

グラフの頂点を $v_1, v_2, \dots, v_n$ とする。

$n \times n$ の正方行列 $M = (m_{ij})$ において,

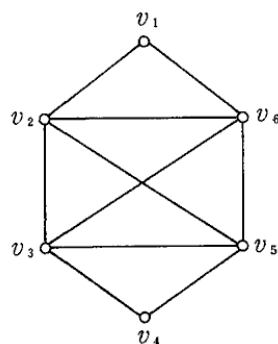
頂点 v_i と v_j を結ぶ辺が存在しないとき, $m_{ij} = 0$

頂点 v_i と v_j を結ぶ辺が存在するとき, $m_{ij} = 1$

とする。

無向グラフのとき, (i, j) 成分と (j, i) 成分は一致する。すなわち, $m_{ij} = m_{ji}$ 。

また, 辺は異なる頂点間を結ぶものとしたので, $i = j$ のとき $m_{ij} = 0$ である。



練習 54 図のグラフの隣接行列 M と M^2 を求めよ。

なお、 $n \times n$ 正方行列 $M = (m_{ij})$ において、 M^2 の (i, j) 成分は $\sum_{k=1}^n m_{ik}m_{kj}$ で定義される。

隣接行列の積

隣接行列の積 M^2 の (i, j) 成分 $\sum_{k=1}^n m_{ik}m_{kj}$ の意味を考えよう。

$m_{ik}m_{kj} = 1$ となるのは、 v_i と v_k を結ぶ辺と v_k と v_j を結ぶ辺がともに存在するときである。

M^2 の (i, j) 成分の意味は、 v_i と v_j を結ぶちょうど 2 個の辺の連鎖の本数である。

練習 55 練習 54 において、 M^3, M^4 を求め、その意味を考えよ。また、 M^3 において対角成分はすべて 0 である。その理由を説明せよ。

4.3.3 一筆書き

閉じた一筆書き

ある頂点から出発してすべての辺をちょうど 1 回通ってはじめての点に戻る一筆書きを閉じた一筆書きという。

便宜上、1 点のみからなる (辺を持たない) グラフは閉じた一筆書きを持つものと約束する。

開いた一筆書き

ある頂点から出発し、すべての辺をちょうど 1 回通って別の頂点に至る一筆書きを開いた一筆書きと呼ぶ。

2 つの定理

定理 1 連結グラフ G が閉じた一筆書きをもつ必要十分条件は、そのグラフが奇点を持たないことである。このとき、任意の点から始まる一筆書きが存在する。

定理 2 連結グラフ G が開いた一筆書きをもつ必要十分条件は、そのグラフがちょうど 2 個の奇点を持つことである。このとき、一筆書きは奇点と奇点を結ぶ。

2 つの定理の証明

2 つの定理をまとめて証明する。必要性は明らかなので、十分性を示す。

辺の本数に関する数学的帰納法（累積帰納法）を用いて証明する。すなわち、いま考えているグラフよりも本数の少ないグラフに対して2つの定理がどちらも成立していると仮定する。

（1）奇点を持たないとき

1点のみの場合は明らか。

そうでないとき、注目している点を端点とする辺の1つを取り除く。このとき、2個の奇点ができる。これら2点が異なる連結成分に分かれることはない。なぜなら、奇数個の奇点をもつグラフは存在しないから。したがって、これら2点を結ぶ開いた一筆書きが存在する。取り除いた辺とこの一筆書きを接続したものが求める一筆書きである。

（2-1）隣接する2個の奇点 A, B を持つとき

A, B を結ぶ辺を取り除くと、偶点のみのグラフになる。 A を含む連結成分を G_A , B を含む連結成分を G_B とする。

$G_A = G_B$ のとき、 A で始まる閉じた一筆書きに辺 AB を追加する。

$G_A \neq G_B$ のとき、 A で始まる閉じた一筆書きに、辺 AB と、 B で始まる閉じた一筆書きを追加する。

（2-2）隣接しない2個の奇点 A, B を持つとき

A, B を結ぶ辺がないとき、 A とつながった辺をひとつ取り除く。取り除かれた辺のもう一方の端を C とする。 A を含む連結成分を G_A , C を含む連結成分を G_C とする。

i) $G_A = G_C$ のとき

B, C はどちらも奇点だから、 G_C は C から B に至る開いた一筆書きを持つ。取り除いた辺 AC にこの C から B に至る一筆書きを接続したものが求める一筆書きである。

ii) $G_A \neq G_C$ のとき

1. B, C はどちらも奇点だから、 B は G_C の頂点である。なぜなら、そうでないとする
と、奇数個の奇点をもつグラフが存在することになるから。だから、 G_C は C から
 B に至る開いた一筆書きを持つ。 G_A は奇点を持たないから、 A を始点とする閉じ
た一筆書きを持つ。 A を始点とする閉じた一筆書きに、取り除いた辺、および C か
ら B に至る一筆書きを接続したものが求める一筆書きである。

4.3.4 一筆書きを解くプログラム

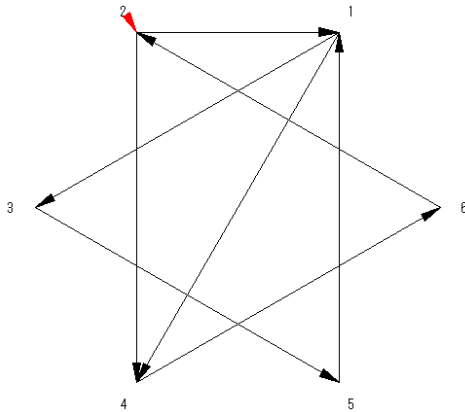
連結な無向グラフを入力すると、それを一筆書きするプログラムを作る。

最初に頂点の数を入力（2以上25以下）。頂点は1からその数までの数で識別する。

次に、辺を端点の数字をコンマで区切って入力する。ひとつの辺を入力するごとにEnterキーを押す。

最後に 0,0 を入力

奇点が4個以上ある場合や非連結の場合は、辺を追加入力することができるものとする。



全体の構造

頂点の個数 N_MAX と隣接行列 m を大域変数として使うためにモジュールを利用する。モジュールの名前は予約語でなければ何でもよい。ここでは `GRAPH` とした。

```

3000 MODULE GRAPH
3010 SHARE NUMERIC m(25,25) ! 隣接行列
3020 SHARE NUMERIC N_Max    ! 頂点の個数
3030 PUBLIC SUB  Input_Vertices
3040 PUBLIC SUB  Draw_Start, Build_Circuit, Build_Tail
3050 PUBLIC FUNCTION Ix_OddPoint
3060 SHARE SUB Add, Del
3070 SHARE SUB Draw_Name, Draw_Path
3080 SHARE FUNCTION Test_Connected, N_OddPoints
3090 SHARE FUNCTION degree, Ix_Any_Vertex
.....
4800 END MODULE

```

頂点の個数の入力

キーボードから頂点の個数を入力して、隣接行列 m の大きさを定める。

```

DO
    INPUT PROMPT "頂点の数 (2 以上 25 以下)": N_Max
LOOP UNTIL N_Max >= 2 AND N_Max <= 25
MAT m = ZER(N_Max, N_Max)
MAT ZER 文で、配列の大きさを  $N\_Max \times N\_Max$  に変更して零行列を代入している。

```

辺の入力

```

INPUT i, j
で辺が指定されたら,

```

```
LET m(i,j)=1
```

```
LET m(j,i)=1
```

を実行して、隣接行列 m の (i,j) 成分と (j,i) 成分を 1 にする。

0,0 が入力されたら辺の入力を終えるが、先に進むためには、グラフが連結であることと、奇点の個数が 2 以下であることを確認しておかないといけない。

連結性の判定

隣接行列の n 乗 M^n の (i,j) 成分は、点 v_i と点 v_j を結ぶ辺の連鎖のうち本数がちょうど $n-1$ のものの数を表す。点 v_i と点 v_j を結ぶ辺の連鎖の有無を調べるためには、 $M + M^2 + \dots + M^n$ の (i,j) 成分を調べればよい。

BASIC の行列演算で行列のべき乗を直接計算することはできないので、正方行列 m の k 乗を求めたいときは、 m と同じサイズの単位行列に m を k 回かけて求める。

配列 m と数値変数 N_Max を SHARE 宣言した module GRAPH 内で定義される次の外部関数 Test_Connected はグラフ全体が連結かどうかを判定する。 q で $M, M^2, \dots, M^n$ を計算し、 p にそれらの和 $M + M^2 + \dots + M^n$ を求めている。

```
3570 EXTERNAL FUNCTION Test_Connected
3580      ! 点 1 の連結成分が全体と一致すれば 0, そうでないなら 1
3590      DIM p(25,25),q(25,25)
3600      MAT p=ZER(N_Max,N_Max)
3610      MAT q=IDN(N_Max)
3620      FOR i=1 TO N_Max
3630          MAT q=q*m
3640          MAT p=p+q
3650      NEXT i
3660      LET t=0
3670      FOR i=2 TO N_Max
3680          IF p(1,i)=0 THEN
3690              LET t=1
3700          END IF
3710      NEXT i
3720      LET Test_Connected=t
3730 END FUNCTION
```

頂点の次数

module GRAPH 内で定義される外部関数 degree(n) は、 n 番目の点の次数（接続する辺の本数）を返す。

```
4150 EXTERNAL FUNCTION degree(n)
4160      LET t=0
4170      FOR i=1 TO N_Max
4180          IF m(n,i)=1 THEN LET t=t+1
4190      NEXT i
```



```

4200    LET degree=t
4210 END FUNCTION

```

奇点の検出

module GRAPH 内で定義される外部関数 $Ix_OddPoint(k)$ は, k 番目以降の最初の奇点の番号を返す。存在しなければ 0。

```

4310 EXTERNAL FUNCTION Ix_OddPoint(k)
4320    FOR i=k TO N_Max
4330        IF MOD(degree(i),2)=1 THEN
4340            LET Ix_OddPoint=i
4350            EXIT FUNCTION
4360        END IF
4370    NEXT i
4380    LET Ix_OddPoint=0
4390 END FUNCTION

```

奇点の個数

外部関数 $N_OddPoints$ は奇点の個数を返す。

```

4230 EXTERNAL FUNCTION N_OddPoints
4240    LET t=0
4250    FOR i=1 TO N_Max
4260        IF MOD(degree(i),2)=1 THEN LET t=t+1
4270    NEXT i
4280    LET N_OddPoints=t
4290 END FUNCTION

```

辺の入力

module GRAPH 内で定義される外部副プログラム $Input_Vertices$ で, 頂点の個数と, 辺を入力する。

頂点の個数を入力すると, 画面上に 1 から指定個数の点を数字で描画する (3180 行～3210 行)。

```

3110 EXTERNAL SUB Input_Vertices
3120    DO
3130        INPUT PROMPT "頂点の数 (2 以上 25 以下)": N_Max
3140        LOOP UNTIL N_Max>=2 AND N_Max<=25
3150        MAT m=ZER(N_Max,N_Max)
3160        !
3170        !
3180        SET TEXT JUSTIFY "CENTER","HALF"
3190        FOR i=1 TO N_MAX

```

```

3200      CALL Draw_Name(i)
3210  NEXT i
3220  !
3230  SET LINE COLOR 7
3240  DO
3250      INPUT a,b
3260      IF a>0 AND b>0 THEN
3270          IF a<>b THEN
3280              CALL Add(a,b)
3290              CALL Draw_Path(a,b)
3300          ELSE
3310              PAUSE "異なる 2 点を結ぶ辺のみ入力できます"
3320          END IF
3330      ELSE
3340          LET N_Odd=N_OddPoints
3350          IF N_Odd>2 THEN
3360              PAUSE "奇点が" & STR$(N_Odd) &"個ある"
3370          ELSEIF Test_Connected=1 THEN
3380              PAUSE "非連結"
3390          ELSE
3400              EXIT DO
3410          END IF
3420      END IF
3430  LOOP
3440  SET LINE COLOR 1
3450 END SUB

```

3200 行から呼ばれる副プログラム Draw_Name は次のように定義されている。

```

4510 EXTERNAL SUB Draw_Name(a)
4520  OPTION ANGLE DEGREES
4530  LET t=a*360/N_Max
4540  LET x2=1.12*COS(t)
4550  LET y2=1.12*SIN(t)
4560  PLOT TEXT ,AT x2,y2: STR$(a)
4570 END SUB

```

4540 行と 4550 行の定数 1.12 は、単位円のちょっと外側に数字を書くことを意図している。

3280 行で呼び出される副プログラム add(i,j) は、隣接行列に辺を追加する。

```

3470 EXTERNAL SUB Add(a,b)
3480  LET m(a,b)=1
3490  LET m(b,a)=1

```

```
3500 END SUB
```

3290 行で呼び出される副プログラム Draw_Pass は、画面上に辺を描く。

```
4600 EXTERNAL SUB Draw_Path(a1,a2)
4610   OPTION ANGLE DEGREES
4620   LET t1=a1*360/N_Max
4630   LET t2=a2*360/N_Max
4640   PLOT LINES: COS(t1),SIN(t1) ; COS(t2),SIN(t2)
4650 END SUB
```

3310 行, 3360 行, 3380 行の PAUSE 文は, 指定された文字列を表示してエンターキーが押されるのを待つ。PAUSE は十進 BASIC 独自命令なので, 純粋な Full BASIC で実行する場合は, LINE INPUT PROMPT など で代用する。

主プログラム

主プログラムは

```
1100 DECLARE EXTERNAL SUB GRAPH.Input_Vertices, GRAPH.Draw_Start
1110 DECLARE EXTERNAL SUB GRAPH.Build_Circuit, GRAPH.Build_Tail
1120 DECLARE EXTERNAL FUNCTION GRAPH.Ix_OddPoint
1130 !
1140 SET WINDOW -1.2,1.2,-1.2,1.2
1150 CALL Input_Vertices
1160 !
1170 LET a=Ix_OddPoint(1)
1180 IF a=0 THEN ! 偶点のみ
1190   CALL Draw_Start(1)
1200   CALL Build_Circuit(1)
1210 ELSE ! 奇点あり
1220   CALL Draw_Start(a)
1230   LET b=Ix_OddPoint(a+1)
1240   CALL Build_Tail(a,b)
1250 END IF
1260 END
```

となっている。1170～1250 行がアルゴリズムの本体である。

奇点がないときは, 1 番の点から始まる閉じた一筆書きを描く。

奇点があるときは, その一方からもう一方に向けて開いた一筆書きを描く。

1130 行と 1220 行の副プログラム Draw_Start(k) は, k 番の位置に開始マークを描くために使われる。

```
4410 EXTERNAL SUB Draw_Start(a)
4420   OPTION ANGLE DEGREES
```

```

4430    LET t=a*360/N_Max
4440    LET x2=COS(t)
4450    LET y2=SIN(t)
4460    SET AREA COLOR 4
4470    DRAW ArrowHead WITH ROTATE(ANGLE(-x2,-y2))*SHIFT(x2,y2)
4480    SET AREA COLOR 1
4490 END SUB

```

4470 行で呼ばれる絵定義 ArrowHead は、矢印の頭部を描く。

```

2000 EXTERNAL PICTURE ArrowHead
2010 PLOT AREA : 0,0; -0.1,0.02; -0.1,-0.02
2020 END PICTURE

```

進行方向の矢印を描く

```

4670 EXTERNAL SUB Draw_Arrow(a1,a2)
4680    OPTION ANGLE DEGREES
4690    PRINT a1;"->";a2
4700    LET t1=a1*360/N_Max
4710    LET t2=a2*360/N_Max
4720    LET x1=COS(t1)
4730    LET y1=SIN(t1)
4740    LET x2=COS(t2)
4750    LET y2=SIN(t2)
4760    PLOT LINES: x1,y1 ; x2,y2
4770    DRAW arrowhead WITH ROTATE(ANGLE(x2-x1,y2-y1))*SHIFT(x2,y2)
4780 END SUB

```

隣接行列から辺を削除する副プログラム Del

```

3520 EXTERNAL SUB Del(a,b)
3530    LET m(a,b)=0
3540    LET m(b,a)=0
3541    PRINT a;b;"除去"
3542    MAT PRINT m;
3550 END SUB

```

閉じた一筆書きを描く副プログラム SUB build_circuit

```
3910 EXTERNAL SUB build_circuit(a)
3920    ! m は奇点を持たないものとする
3930    ! a から始まり a で終わる回路を描く
3940    LET b=Ix_Any_Vertex(a)
3950    IF b>0 THEN
3960        CALL Draw_Arrow(a,b)
3970        CALL Del(a,b)
3980        CALL Build_Trail(b,a)
3990    END IF
4000 END SUB
```

開いた一筆書きを描く副プログラム Build_Trail

```
3750 EXTERNAL SUB Build_Trail(a,b)
3760    ! a,b が奇点であるとき, a から b に至る小道を作図
3770    IF m(a,b)=1 THEN
3780        CALL del(a,b)
3790        CALL Build_Circuit(a)
3800        CALL Draw_Arrow(a,b)
3810        CALL Build_Circuit(b)
3820    ELSE
3830        LET c=Ix_Any_Vertex
3840        CALL del(b,c)
3850        CALL Build_Trail(a,c)
3860        CALL Draw_Arrow(c,b)
3870        CALL Build_Circuit(b)
3880    END IF
3890 END SUB
```

3830 行の Ix_Any_Vertex(b) で, b 番目の点と辺を共有する頂点を求め, 次の 2840 行でその辺を隣接行列から削除している。

```
4020 EXTERNAL FUNCTION Ix_Any_Vertex(a)
4030    ! a と辺を共有する頂点のうち最小番号のもの
4040    ! 存在しなければ 0
4050    LET t=0
4060    FOR i=1 TO N_Max
4070        IF m(a,i)=1 THEN
4080            LET t=i
4090        EXIT FOR
4100    END IF
4110    NEXT i
```

```
4120     LET Ix_Any_Vertex=t
```

```
4130 END FUNCTION
```

【参考文献】 やさしいグラフ論 [改訂版] 田沢新成／白倉暉弘／田村三郎著 現代数学社 ISBN:978-4-7687-0147-8

集合と論理

2024.11.25 白石和夫

1 集合・論理を学ぶ意義

1.1 なぜ集合・論理を学ぶのか？

数学を使う力

数式の変形を含めて、計算はコンピュータの助けを借りることが可能な時代となった。けれども、数学の論理構造を理解し、論理的な推論能力をコンピュータが身に付けるのはまだ先のことであろう。

数学は、現実事象を抽象することで、広範な応用が可能な理論体系を実現している。それを学ぶときは、現実事象と照らし合わせてその正しさや有用性を知ることが大切であるが、出来上がった数学は、現実事象から切り離されて成立しているから、その数学を作るときに前提としていた現実事象とかけ離れた事象に対しても適用可能となる。それを支えるのが、論理に基いて建設されるという枠組みである。

数学的問題解決の特徴は、与えられた問題を別の同値な問題に置き換えることである。対偶を考えることもその一つである。また、問題を同種のより規模の小さい問題に置き換える思考法が再帰である。そればかりでなく、異種の問題に置き換える手法が数学の世界にはたくさん集積している。この宝を有効に活用するためには、問題を論理的に表現して捉える力、集合や写像などの概念を通して数学的構造を捉える力が不可欠である。

論理的表現とは

数学を創造的思考の道具として使うためには、自立思考が欠かせない。自分の考えが正しいことを自身で判断できなければ、通説に挑戦し、伝統の殻を破ることなどできない。

数学は論理的な思考力を鍛えるのに適した教科だと思われる。他教科に比べて相対的にはそうであるかもしれない。しかし、より人工的な言語であるプログラミング言語にその地位を譲るべき時代が到来しようとしている。

けれども、数学を学ぶ上で、その論理構造を明確に把握できるようにしておくことは不可欠である。数学の論理的な枠組みを明確に記述するために必要なことを学んでいこう。

1.2 集合・論理の学習について

現実の数学学習では、問題の論理構造を無視したパターン学習が常態化して来ている。その主因がマークシートによる学力テストであることは議論の余地はないであろうけれども、実際に生徒たちが取っている戦略は、推論による解決をあきらめ、機械学習に依存することで成功をおさめた人工知能 (AI) 開発の現状と似ている。

数学教育自体が学習者のそのような傾向に合わせ、問題の論理構造に目を向けさせない方向に動いてきた。それが、少ない労力で（見かけ上かもしれないけれど）数学の成績を向上させる手法として最善だったことは否めない。

しかし、今後、求められることは、学んだ数学を非定型な問題の解決に活かすことである。習ったことを確実に実行する学習ではなく、未知の領域への適用を前提とする学習に転換していかなければならない。そのためには、数学の論理構造を明確に意識させる学習指導が欠かせない。そして、自力で考えようとする学習者を支援することに重点が置かれなければならない。

1.3 軌跡の問題

例題 1 座標平面上で、点 P が円 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ の周上を動くとき、原点 O と P を結ぶ線分 OP の中点 Q の軌跡を求めよ。

解. Q の座標を $Q(x, y)$ とする。

このとき、円 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ があって、 Q は線分 OP の中点になっている。

点 $P(x_0, y_0)$ は円 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ 上の点だから、 $(x_0-4)^2 + (y_0-2)^2 = 4$

Q は線分 OP の中点だから、 $x = \frac{x_0}{2}, y = \frac{y_0}{2}$

$x_0 = 2x, y_0 = 2y$ だから $(x_0-4)^2 + (y_0-2)^2 = 4$ より $(2x-4)^2 + (2y-2)^2 = 4$
すなわち、 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

だから、点 Q は、円 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 上にある。

逆に、点 $Q(x, y)$ が円 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 上にあるとき、

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 、すなわち、 $(2x-4)^2 + (2y-2)^2 = 4$ なので、

点 $P(2x, 2y)$ は円 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ 上の点である。

だから、このとき、 Q は線分 OP の中点となっている。

したがって、求める軌跡は、円 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 。□

軌跡の問題を苦手とする高校生は多い。逆の論証を怠りがちというのも重要な論点けれども、それ以前の問題として、点 Q の座標として置いた x, y と、円の方程式に現れる x, y とが混同されやすいことが、問題を難しくしている。

解答のキーポイントは、「円 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 」の「円」を欠落させないことである。「円 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ 」は、方程式 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ を満たす点 (x, y) の集合、すなわち、集合 $\{(x, y) | (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4\}$ のことである。 $\{(x, y) | (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4\}$ において、 x, y の有効範囲は $\{ \}$ の内側に限定される。 $\{ \}$ の外側にある x, y と $\{ \}$ の内側の x, y は別物である。だから、点 Q の座標を (x, y) と置いても、円の方程式に現れる x, y とは別物である。

集合であれば、 $\{(x_0, y_0) | (x_0-4)^2 + (y_0-2)^2 = 4\}$ のように他の文字に置き換えて書くこともできる。しかし、円～の形で図形を記述するとき、～の部分には x, y で記述した方程式を書かなくてはならない。この制約のもとで正しく書くのはエキスパートでなければ難しい仕事だともいえるだろう。

また、もう一点、存在命題が隠れていることにも注意が必要であろう。

練習 2 座標平面上で、点 P が放物線 $y = x^2 - 1$ 上を動くとき、原点 O と P を結ぶ線分 OP の中点 Q の軌跡を求めよ。

2 条件命題と真理集合

2.1 条件命題と真理集合

命題, 条件命題, 真理集合

判断を述べる文を**命題** (proposition) という。文には, 等式や不等式のように数学記号で書かれたものも含まれる。

命題には, 変数を含み, その変数に値を代入することができるものがある。そのような命題を特に**条件命題**, **述語** (predicate) などという。

例 「 $2x+3=4$ 」, 「 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ 」, 「 n は素数である」

上の例の x や n のように自由に値を代入することのできる変数を**自由変数**という。

「 $\int_1^a (x+2)dx = 4$ 」の x のように命題の内容を記述するために用いられて自由に値を代入することのできない変数を**束縛変数**という。この文が含む自由変数は a である。

問 3 次の文が含む変数のうち, 自由変数はどれか。

(1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は実数解を持つ。

(2) $\sum_{k=1}^n (2k+1) = 20$

答 (1) a, b, c (2) n

自由変数 x を含む条件命題を $P(x)$, $Q(x)$ などの記号で表す。このとき, x に a を代入してできる命題を $P(a)$ で表す。

自由変数 x, y を含む条件命題を $P(x, y)$ のように表す。このとき, x に定数 a を代入してできる命題 $P(a, y)$ は y のみを自由変数として含む条件命題である。

自由変数を含む命題を**開いた文**と呼ぶ。それに対し, 自由変数を含まない命題を**閉じた文**と呼ぶ。自由変数のすべてに値を代入して得られる命題は閉じた文になる。閉じた文は, 真偽を考える対象となる。

注意 4 閉じた文のみを**命題**と呼び, 条件命題を命題に含めない流儀もある。高校の教科書はその流儀に従っていることが多い。

注意 5 「 $2+3$ 」とか, 「 $2x+3$ 」のように数学文の構成要素ではあるけれどもその一部に過ぎないものは命題ではない。命題は, 数学文の文法上の‘文’である。少し詳しく述べると, 自由変数として用いる文字の使用を許して, 数学における文法に従って‘文’として構成されたものが命題である。等式や不等式もここでいう‘文’に含まれる。

条件命題 $P(x)$ に対し, 集合 $\{x|P(x)\}$ をその**真理集合**という。真理集合の要素全体を条件命題の**外延**という。

例 6 条件命題 「 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 」の真理集合は $\{1, 2\}$ で, 外延は 1 と 2 である。

上の例のように, 条件命題が方程式 (あるいは不等式) であるとき, その真理集合は**解集合**と呼ばれ, 外延は解のすべてのことである。

複数の自由変数を含む条件命題に対しても, たとえば, $P(x, y)$ に対して $\{(x, y)|P(x, y)\}$ をその真理集合という。

条件命題に含まれる自由変数の変域を**対象領域**という。条件命題 $P(x)$ に含まれる自由変数 x の対象領域が集合 U であるとき、 $P(x)$ の真理集合を $\{x \in U | P(x)\}$ のように書く。また、真理集合からみたとき、対象領域 U を**全体集合**という。

数の集合

自然数 (Natural Number) 全体の集合を $\mathbb{N}$, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$, 実数 (Real Number) 全体の集合を $\mathbb{R}$, 複素数 (Complex Number) 全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。 $\mathbb{Z}$ は Zahlen (ドイツ語で数) に由来する。正の実数全体を $\mathbb{R}^+$ で表す。すなわち、 $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

例 7 (1) 対象領域が実数全体であるとき、方程式 $x^2 + 1 = 0$ の真理集合 $\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\}$ は $\emptyset$ (空集合) である。

(2) 対象領域が複素数全体であるとき、方程式 $x^2 + 1 = 0$ の真理集合 $\{x \in \mathbb{C} | x^2 + 1 = 0\}$ は $\{i, -i\}$ (i は虚数単位) である。

十分条件, 必要条件, 同値

$P(x)$, $Q(x)$ を条件命題とする。

$P(x)$ を満たす x は必ず $Q(x)$ を満たすことを、 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ と書いて、 $P(x)$ は $Q(x)$ であるための**十分条件**である、あるいは、 $Q(x)$ は $P(x)$ であるための**必要条件**であるなどという。また、 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ を順序を入れ替えて $Q(x) \Leftarrow P(x)$ と書く。

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ は、 $\{x | P(x)\} \subset \{x | Q(x)\}$ を意味する。

$P(x)$ が $Q(x)$ であるための必要条件でも十分条件でもあるとき、 $P(x)$ は $Q(x)$ であるための**必要十分条件**であるといって、 $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ と書く。このとき、 $P(x)$ と $Q(x)$ は**同値**である、あるいは、 $P(x)$ は $Q(x)$ と**同値**であるという。

問 8 2円の交点は高々2個しかないから次の解答には誤りがある。同値変形の視点で誤りをたただせ。

2円 $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$ の交点を求めよ。

交点を (x, y) とすると、

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{より} \quad 8x + 4y = 40$$

$$\text{すなわち,} \quad y = -2x + 10$$

$$\textcircled{1} \text{に代入して} \quad x^2 + (-2x + 10)^2 = 25$$

$$x = 3 \text{ または } x = 5$$

$$x = 3 \text{ のとき, } \textcircled{2} \text{より} \quad 9 + y^2 - 24 - 4y + 15 = 0$$

$$y = 0 \text{ または } y = 4$$

$$\text{すなわち,} \quad (x, y) = (3, 0), (3, 4)$$

$$x = 5 \text{ のとき, } \textcircled{2} \text{より} \quad 25 + y^2 - 40 - 4y + 15 = 0$$

$$y = 0 \text{ または } y = 4$$

$$\text{すなわち,} \quad (x, y) = (5, 0), (5, 4)$$

答 交点は、 $(3, 0), (3, 4), (5, 0), (5, 4)$

Note. このような問題に対し、図を書いてみるという指導が徹底されるかもしれない。けれども、その手法は類題にしか有効でない。数学を学ぶ目的は、図に書けないような問題でも論理で解決できることにある。

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ の証明

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ を証明するためには、対象領域の任意の要素を x として、 $P(x)$ を仮定すると $Q(x)$ が成立することを示せばよい。

例題 9 対象領域を $\mathbb{Z}$ とするとき、次を示せ。

(1) n は偶数 $\Rightarrow n^2$ は偶数

(2) n は奇数 $\Rightarrow n^2$ は奇数

証明. (1) n を偶数とすると、 $n = 2k$ となる整数 k が存在する。

$n^2 = 4k^2$ となり、 k^2 は整数なので、 n^2 は偶数。

(2) n を奇数とすると、 $n = 2k + 1$ となる整数 k が存在する。

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ となり、 $2k^2 + 2k$ は整数なので、 n^2 は奇数 $\square$

転換法

例題 10 対象領域を $\mathbb{Z}$ とするとき、次を示せ。

(1) n は偶数 $\Leftrightarrow n^2$ は偶数

(2) n は奇数 $\Leftrightarrow n^2$ は奇数

証明. (1) n^2 は偶数 $\Rightarrow n$ は偶数と (2) n^2 は奇数 $\Rightarrow n$ は奇数 を示せばよい。

(1) n^2 は偶数であるとする。

このとき、 n が奇数であるとする、例題 9(2) より n^2 は奇数となり n^2 が偶数であることに反する。

だから、 n は奇数ではない。奇数でない整数は偶数しかないから、 n は偶数である。

(2) n^2 は奇数であるとする。

このとき、 n が偶数であるとする、例題 9(1) より n^2 は偶数となり n^2 が奇数であることに反する。

だから、 n は偶数ではない。偶数でない整数は奇数しかないから、 n は奇数である。 $\square$

上の証明では、整数は偶数か奇数のいずれかであって、しかも、偶数でも奇数でもある整数はないことが使われている。

一般に、

$$P_1(x) \Rightarrow Q_1(x)$$

$$P_2(x) \Rightarrow Q_2(x)$$

が成立しているとき、

i) どの x に対しても、 $P_1(x)$ と $P_2(x)$ のうちどちらか少なくとも一方が成立する

ii) どの x に対しても、 $Q_1(x)$ と $Q_2(x)$ の双方が成立することはない

であれば、

$$P_1(x) \Leftrightarrow Q_1(x)$$

$$P_2(x) \Leftrightarrow Q_2(x)$$

がいえる。この証明法は**転換法**と呼ばれる。

練習 11 実数係数の 2 次方程式に対し次のことが知られている。

- (1) $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の個数は 2 個
 (2) $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の個数は 1 個
 (3) $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の個数は 0 個
 上の (1)~(3) から、実数係数の 2 次方程式に対し次の (1)'~(3)' を導け。
 (1)' $b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の個数は 2 個
 (2)' $b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow$ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の個数は 1 個
 (3)' $b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow$ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の個数は 0 個

対偶

条件命題 $P(x)$ の否定を $\neg P(x)$ で表す。

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ に対して、 $\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$ を ^{たいぐう}**対偶** という。

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ が成立しているとき、 $\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$ も成立する。それは次のようにして分かる。

x が $\neg Q(x)$ を満たすとき、 $P(x)$ であるとする $Q(x)$ となり $\neg Q(x)$ に反するから、 $\neg P(x)$ が成立する。

この証明では、次の 2 つの原理が使われている。ただし、 p は命題を表す。

- i) p かつ $\neg p$ から矛盾が生じる
 ii) p から矛盾が生じるとき、 $\neg p$ が成立する

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ を証明する代わりに対偶 $\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$ を証明することがある。その根拠は、対偶の対偶は元に戻ることにある。その際、次の原理が用いられている。

- iii) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ (二重否定の法則)

練習 12 a, b の変域を $\mathbb{R}$ とするとき、 $a > 0$ かつ $b > 0 \Leftrightarrow a + b > 0$ かつ $ab > 0$
 [ヒント] $ab > 0$ のとき、 a, b は同符号。

練習 13 a, b の変域を $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ とするとき、 $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$
 [ヒント] $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

練習 14 a, b の変域を $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ とするとき、 $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$ [ヒント] 対偶

2.2 全称命題と存在命題

全称命題

条件命題には真理集合が対象領域と一致するものがある。たとえば、

- (1) x の変域を $\mathbb{R}$ とするとき、「 $x^2 \geq 0$ 」
 (2) x の変域を $\mathbb{C}$ とするとき、「 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ 」

それぞれ、真理集合は、

- (1) $\{x \in \mathbb{R} | x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$ (2) $\{x \in \mathbb{C} | (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\} = \mathbb{C}$

となっている。

$P(x)$ を自由変数 x を含む条件命題とする。すべての x に対して $P(x)$ が成立することを $\forall xP(x)$ で表す。

$\forall xP(x)$ が真であるとき、 $P(x)$ の x に対象領域の任意の要素 a を代入してできる $P(a)$ は真である。

逆に、対象領域の任意の要素 x に対して $P(x)$ が成立するとき、 $\forall xP(x)$ は真である。

$\forall xP(x)$ は命題であるが、 x を自由変数として含まない。 $\forall xP(x)$ における変数 x は**束縛変数**と呼ばれる。束縛変数は、文の内部で使われる変数である。

対象領域が U であることを示す必要がある場合は、 $\forall x \in U[P(x)]$ のように書く。たとえば、(1) $\forall x \in \mathbb{R}[x^2 \geq 0]$ (2) $\forall x \in \mathbb{C}[(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1]$

論理記号 $\forall$ は**全称記号**と呼ばれる。英語の All あるいは Any の頭文字 A を逆さにしたもののである。

自由変数 x, y を含む条件命題 $P(x, y)$ に対し $\forall x[\forall yP(x, y)]$ を $\forall x\forall yP(x, y)$ と書く。順序を入れ替えた $\forall y\forall xP(x, y)$ と実質的な意味の違いは生じない。

数学における定理や公式の多くは任意の数について成り立つことを主張している。その場合、全称記号を省いて書かれるのが普通。たとえば、正弦の加法定理は、ていねいに書くと $\forall \alpha \forall \beta [\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta]$ である。

束縛変数は、他の文字に変えても意味は変わらない。すなわち、 $P(x)$ が変数 y を含まなければ、 $\forall yP(y)$ は $\forall xP(x)$ と同じ内容を表す。

複数の自由変数を含む条件命題のうちの一部の変数のみを束縛して新たな条件命題を作ることができる。

たとえば、3 個の自由変数を含む条件命題「 $x^2 + bx + c > 0$ 」のうち x を束縛して作られる「 $\forall x \in \mathbb{R}[x^2 + bx + c > 0]$ 」は、 b, c を自由変数として含む条件命題である。そして、 b, c の変域を実数全体とすると、

$$\forall x \in \mathbb{R}[x^2 + bx + c > 0] \Leftrightarrow b^2 - 4c < 0$$

例 15 a, b, c の変域を実数全体とすると、 $\forall x \in \mathbb{R}[ax^2 + bx + c = 0] \Leftrightarrow a = b = c = 0$

証明. $\Leftarrow$ は明らか。 $\Rightarrow$ を示す。

$\forall x \in \mathbb{R}[ax^2 + bx + c = 0]$ が成立すると仮定する。

$x = 0$ を代入して $c = 0$

$x = 1$ を代入して $a + b + c = 0$

$x = -1$ を代入して $a - b + c = 0$

よって、 $a = b = c = 0$ □

存在命題 $P(x)$ を自由変数 x を含む条件命題とする。 $P(x)$ を満たす x が存在することを $\exists xP(x)$ で表す。対象領域が U であることを示す必要がある場合は、 $\exists x \in U[P(x)]$ のように書く。たとえば、(1) $\exists x \in \mathbb{R}[x^2 \leq 0]$ (2) $\exists x \in \mathbb{C}[x^2 + 1 = 0]$

論理記号 $\exists$ は**存在記号**と呼ばれる。英語の Exist の頭文字 E を逆さにしたもののである。

$\exists xP(x)$ は、日本語で「ある x に対して $P(x)$ 」と読まれることがある。

$\exists xP(x)$ は、 $P(x)$ の真理集合が空でないこと、すなわち、 $\{x|P(x)\} \neq \emptyset$ を意味する。

$\exists xP(x)$ における変数 x は束縛変数である。

例 16 b, c の変域を実数とすると、 $\exists x \in \mathbb{R}[x^2 + bx + c = 0] \Leftrightarrow b^2 - 4c \geq 0$
 $\exists x \in \mathbb{R}[x^2 + bx + c = 0]$ において、 x は束縛変数であり、 $\exists x \in \mathbb{R}[x^2 + bx + c = 0]$ は、 b, c に関する条件である。

数学では多くの概念（述語）が存在命題の形で定義される。

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ は左辺を右辺で定義することを表す。

例 17 n は偶数 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}[n = 2k]$

a は b の約数 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}[ak = b]$

例 18 P, A, B を平面上の点を表す変数とする。
 点 P が直線 AB 上にある $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}[\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}]$

練習 19 n を整数とする。 $n^2 - 1$ が 3 の倍数でないならば、 n は 3 の倍数である。

練習 20 x, y の連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 1 \end{cases}$$

が、ただ 1 組の解を持つための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であることを示せ。

$\forall x \exists y P(x, y)$ と $\exists y \forall x P(x, y)$

$\forall x[\exists y P(x, y)]$, $\exists y[\forall x P(x, y)]$ は $[]$ を省いて $\forall x \exists y P(x, y)$, $\exists y \forall x P(x, y)$ のように書かれることが多い。けれども、 $\forall x$ と $\exists y$ の順番を入れ替えると意味が変わることに注意。

悪文

(a) 任意の a に対し $ae = a$ となる e が存在する。

(b) 任意の a に対し $ax = e$ となる x が存在する。

(a), (b) どちらも述べたい内容をあらかじめ知っている人にはいいたいことを伝えることができるけれど、そうでなければ正しく意味を伝えることができない悪文である。

(a) は、乗法に関する単位元 $e = 1$ の存在を述べ、(b) は a の逆元 $x = a^{-1}$ の存在を主張している。日本語としては、どちらも「任意の a に対し $\triangle$ となる $\diamond$ が存在する」という同じ構造をしているが、異なる読み方（解釈）が必要になる。

(a) は「(任意の a に対し $ae = a$) となる e が存在する」の意味で、

「任意の a に対し ($ae = a$ となる e が存在する)」と解釈すると誤読である。

一方、(b) を「(任意の a に対し $ax = e$) となる x が存在する」と解釈すると $e = 0, x = 0$ を想起させる文になるが、それは誤読で、「任意の a に対し ($ax = e$ となる x が存在する)」と読むのが正しい。

論理記号を用いて書くと (a), (b) は、それぞれ、 $\exists e[\forall a[ae = a]]$, $\forall a[\exists x[ax = e]]$ となる。そう書けば、それぞれ、「 $\forall a[ae = a]$ となる e がある」、「任意の a に対し $\exists x[ax = e]$ 」を意味するから誤解は生じない。

日本語で書くときは、(b) の型の論理のときには、

(b') 任意の a に対し、 $ax = e$ となる x が存在する。

のように読点を入れて書く約束にすれば、多少は誤読されるおそれが少なくなるかもしれない。

問 21 次の (1)～(3) は異なる解釈で異なる答が出る。可能な解釈とそれに対応する答を述べよ。また、どう解釈するのが出題者の意図か、また、それを誤解なく伝えるにはどう書くのがよいか。

- (1) 「すべての自然数 x に対して $x < y$ を満たす自然数 y が存在する」は真か偽か。
 (2) $x > 0, y > 0$ を満たすすべての x, y について $x + ay \geq 0$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。
 (3) 2 項演算 $\oplus$ を $a \oplus b = a + b - ab$ と定める。 $(x \oplus e) = x$ となるような e の値を求めよ。

「恒等式」と「方程式」

「恒等式」

恒等式とは、任意の数を代入しても成立する等式のことである。代数的な変形で示せる等式が恒等式になるのは当然だけれども、重要な論点は、その逆もいえるかである。例 15 と同様な議論が通用する場合には、それは正しい。

「方程式」

「方程式は特定の条件を満たすときにのみ成り立つ等式」であって、恒等式は方程式ではないとされることがある。恒等式を方程式から除外するのは、正方形を長方形の定義から除外しようとするのと同様に非生産的である。また、恒等式が全称命題であることの対比として、方程式は存在命題だといわれることもあるが、そう定義してしまうと、解を持たない方程式は方程式ではないことになる。

本稿では、変数を含んで書かれた等式を方程式と呼ぶ立場を採用している。要するに、方程式とは、等式の形に書かれた条件命題である。方程式は解集合を考える対象である。解集合がどうなるか調べてみないと方程式と呼んでいいかどうか分からないような定義は採用したくない。

3 集合と写像

3.1 集合

集合

集合は、何かの集まりを一くくりにして、一つの対象としたものである。何かを入れた箱や袋を想定すればよい。

集合を構成する個々の‘何か’を**要素**という。

$a_1, a_2, \dots, a_n$ を要素として持つ集合を $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ で表す。これを集合の**外延的記法**という。外延的記法では、要素をコンマで区切り、全体を中括弧 $\{ \}$ で括る。

集合において、要素の順序は考えない。たとえば、 $\{1, 2, 4, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 。

書かれた要素の中に重複があっても、集合としては重複を無視して考える。たとえば、 $\{1, 2, 5, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}$

集合は、それ自体が 1 個の対象であり、それを構成する要素と区別される。たとえば、集合 $\{1, 2, 3\}$ と「3 つの数 $1, 2, 3$ 」は別物である。つまり、集合 $\{1, 2, 3\}$ は数ではない。

x が集合 S の要素であることを $x \in S$ で表し、 x は S に**属する**という。

条件命題 $P(x)$ に対し, $P(x)$ を満たす x の全体からなる集合を $\{x|P(x)\}$ で表す。これを集合の**内包的記法**という。

x の変域が U であるとき, それを明示するために $\{x \in U|P(x)\}$ と書くこともある。

注意 22 集合の内包的記法において, 縦棒の右に書くのは条件命題。コンマで区切って書かれた条件は同時に成り立つものとして扱うので, 不等式 $(x-2)(x-3) > 0$ の解集合を $\{x|x < 2, 3 < x\}$ と書いてはいけな。 $\{x|x < 2, 3 < x\}$ は $\{x|x < 2 \text{ かつ } 3 < x\} (= \emptyset)$ を意味する。

例 23 方程式 $(x-2)(x-3) = 0$ の解集合を外延的記法で書くと $\{2, 3\}$, 内包的記法で書くと $\{x|x = 2 \text{ または } x = 3\}$ 。すなわち,

$$\{x|(x-2)(x-3) = 0\} = \{2, 3\} = \{x|x = 2 \text{ または } x = 3\}$$

注意 24 方程式 $(x-2)(x-3) = 0$ の解は $x = 2, 3$ で, 解集合は $\{2, 3\}$ だけれども, $x = \{2, 3\}$ ではない。なお, 「 $x = \pm 2$ 」が「 $x = 2$ または $x = -2$ 」を意味するのと同様, 「 $x = 2, 3$ 」は, 「 $x = 2$ または $x = 3$ 」を意味している。

集合の内包的記法において, 次が成立する。

$$a \in \{x|P(x)\} \Leftrightarrow P(a)$$

たとえば, $A = \{x|x^2 = 2\}$ のとき, $a \in A$ であれば $a^2 = 2$ であり, $a^2 = 2$ であれば $a \in A$ である。

集合の包含関係

集合 A のいずれの要素も集合 B の要素であるとき, A は B の**部分集合**である, A は B に含まれる, B は A を**含む**などといい, $A \subset B$ で表す。

$A = \{x|P(x)\}, B = \{x|Q(x)\}$ のとき, $A \subset B$ は $P(x) \Rightarrow Q(x)$ を意味する。

集合は要素を含むか含まないかの関係にのみ注目した概念なので, $A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき $A = B$ である。すなわち,

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \text{ かつ } (B \subset A)$$

$A = \{x|P(x)\}, B = \{x|Q(x)\}$ のとき, $A = B$ は $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ を意味する。

空集合

要素を一つも持たない集合を^{くう}**空集合**といい, $\emptyset$ で表す。外延的記法で $\emptyset = \{\}$ 。

共通部分と和集合

集合 A, B のどちらにも属する要素全体の集合を A, B の**共通部分**(intersection) といい $A \cap B$ で表す。すなわち,

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x|x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

集合 A, B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を A, B の**合併集合**(union), または**和集合**といい $A \cup B$ で表す。すなわち,

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x|x \in A \text{ または } x \in B\}$$

補集合

全体集合 U の部分集合 A に対し、 U の要素で A に属さないものの全体の集合を A の補集合といい、 $\overline{A}$ で表す。

すなわち、 $A \subset U$ に対し、 $\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in U \text{ かつ } x \notin A\}$ 。

ただし、 $x \notin A$ は $x \in A$ の否定を表す。

A の補集合を A^c で表すこともある (complement)。 $\overline{A}$ を補集合と異なる意味に用いることがある。その場合、補集合を表すのに A^c を用いる。

集合の直積 $A \times B$

要素 a と要素 b を順序を考えに入れて組にしたものを順序対^{つい}といい、記号で (a, b) で表す。座標幾何における点の座標やベクトルは順序対である。微分積分学で用いる区間 (a, b) は順序対ではない。

2つの順序対 (a, b) , (c, d) が等しいのは、 $a = c$ かつ $b = d$ のときである。

2つの集合 A, B に対して、 A の要素と B の要素から作られる順序対全体の集合 $\{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ を A と B の直積といい、 $A \times B$ で表す。すなわち、

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

例 25 $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}$ のとき、
 $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

注意 26 内包的記法においてコンマで区切って条件命題を並べて書いたとき、コンマは「かつ」を意味する。すなわち、 $\{(x, y) | x \in A, y \in B\} = \{(x, y) | x \in A \text{ かつ } y \in B\}$

A, B が $\mathbb{R}$ の部分集合であるとき、 $A \times B$ は xy 平面の部分集合として図示できる。特に、 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は xy 平面全体である。 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ で表す。

Note. 直積は順序対の集合なので、積の交換法則 $A \times B = B \times A$ は成立しない。

3.2 等号**等しいとは**

問 27 $x = 2$ のとき、 $x^2 + 3x + 1 = 2^2 + 3 \times 2 + 1$ となる理由を中学校1年で学ぶ等式の性質を用いて説明しなさい。

しかし、中学校1年で学ぶ等式の性質だけでは数学は成り立たない。

問 28 $x = \pi$ のとき $\sin x = \sin \pi$ となるのはなぜか。

等号は数学の対象として同一であることを示すために用いられる。等しいものは等しいもので置き換えてよいと約束しておかないと数学は成立しない。たとえば、関数 f に対し、 $x = y$ であれば $f(x) = f(y)$ となるのは等号の基本性質と考える。

一意性と存在の一意性

$P(x)$ を変数 x を含む条件命題とする。 $P(x)$ を満たす x の個数が 0 個または 1 個であることを「 $P(x)$ を満たす x が高々 1 つ」という。たとえば、平面幾何で、「異なる 2 直線の共有点は高々 1 つ」というとき、2 直線は共有点を持たないこともある。そして、このとき、 x は $P(x)$ に対し一意であるという。

$P(x)$ を満たす x が存在し、しかもそれが一意であるとき、「 $P(x)$ となる x がただ一つ存在する」、あるいは、「 $P(x)$ となる x が一意的に存在する」などといい、 $\exists! P(x)$ で表す。

存在が一意であるとき、それを関数記号で表すことができる。たとえば、正の数 x の平方根を $\sqrt{x}$ で表す。

存在が一意でないとき、それを関数記号を用いて表すことは（普通は）しない。

たとえば、虚数 $a + bi$ の 2 つの平方根を $\pm\sqrt{a+bi}$ で表すが、単独の $\sqrt{a+bi}$ は意味を持たない。

3.3 写像

関数とは？

1 次関数や 2 次関数など、式で書ける関数だけ扱っているうちは、関数とは何かを深く考えなくて済む。けれど、数学で扱う「関数」は、具体的な計算手順がわからなくても、さらに、数式や言葉で表現することが難しくても、とにかく、 x に対応する y がちょうど 1 つ定まるものでありさえすればよい。その対応のことを関数と呼ぶのだけれど、「対応の規則」などと、別の曖昧模糊な言葉でしか説明できないのがもどかしい。

$y = f(x)$ となる (x, y) の全体の集合を関数のグラフという。逆に、関数のグラフのことを関数と呼んでしまえば、「対応の規則」とは何かなど面倒なことに時間を割く必要がなくなる。グラフが与えられたとき、それが「関数のグラフ」と呼べるにはどういう条件を課せばよいかを考えておけばよい。そして、関数のグラフは直積集合の部分集合だから、関数をモノとして扱うことができる利点もある。

関数はブラックボックスだと説明されることが多い。値をどのようにして求めたかを問わず、結果が同じであれば同じ関数とみるのがブラックボックスという視点である。関数をグラフで定義することで、その視点を正確に表現できる。

「写像」や「変換」は、関数とほぼ同じものである。使われる場面によって関数と呼んだり、変換と呼んだりする。そして、「写像」という広い枠組みを用意することで、数列や、加減乗除などの 2 項演算も同じ枠組みのなかで扱うことが可能になる。

写像や関数には定義域という面倒な概念がある。定義域の概念を少し緩めて「始集合」をもとに定義を始める。それは広義の写像と呼ぶべきものであるが、近年は「部分写像」と呼ばれている。

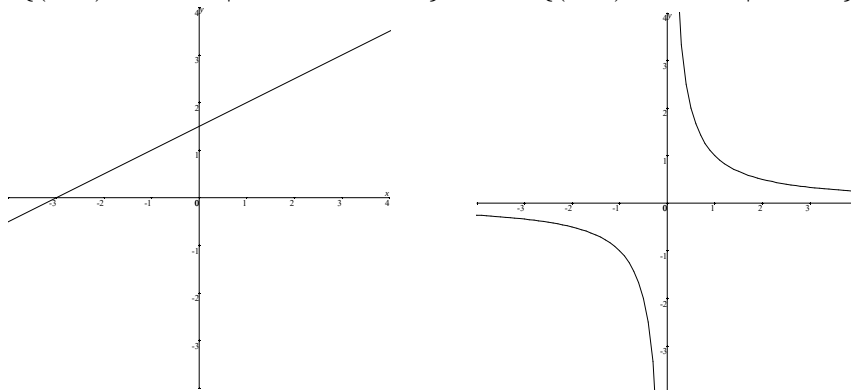
写像 (Mapping) と関数 (Function)

X, Y を集合とする。 $X \times Y$ の部分集合 f が定められ、 X のいずれの要素 x に対しても、 $(x, y) \in f$ となる Y の要素 y が高々 1 つしか存在しないとき、 f は X から Y への部分写像であるという。このとき、 X を始集合、 Y を終集合という。

部分写像を定義する文は、先に述べた悪文と同じ構造をしている。明確に書くと、

f が X から Y への部分写像 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in X[(x, y) \in f \text{ となる } y \in Y \text{ は一意}]$

例 29 $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x - 2y + 3 = 0\}$ $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | xy = 1\}$



f, g は, どちらも $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への部分写像。

Note. “部分写像”は, partial mapping の訳。出来損ない写像, 作りかけ写像というほどの意味で, 写像の一部分という意味ではない。また, 始集合, 終集合は, **始域**, **終域**とも呼ばれる。

f が X から Y への部分写像であることを

$$f: X \longrightarrow Y$$

あるいは

$$X \xrightarrow{f} Y$$

で表す。

部分写像 $f: X \longrightarrow Y$ において $(x, y) \in f$ であることを

$$f: X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto y$$

あるいは,

$$x \xrightarrow{f} y$$

で表し, x に y が対応するという。

X の要素 x に対応する Y の要素 y が存在するとき, それを $f(x)$ で表す。部分写像 f が関数と呼ばれるとき, $f(x)$ を x における f の ^{あた}値 と呼ぶ。

対応する Y の要素が存在する X の要素全体の集合を f の**定義域**という。すなわち,

$$f \text{ の定義域} = \{x \in X | \exists y \in Y[(x, y) \in f]\}.$$

また, 対応する X の要素が存在するような Y の要素全体の集合を f の**値域**という。すなわち, $f \text{ の値域} = \{y \in Y | \exists x \in X[(x, y) \in f]\}.$

定義域が始集合と一致する部分写像を**写像**と呼ぶ。写像となる条件を改めて記すと,

$$f \subset X \times Y \text{ のとき, } f \text{ が関数 } X \longrightarrow Y \iff \forall x \in X[\exists! y \in Y[(x, y) \in f]].$$

関数は, 部分写像と同義であることが多いが, 写像を意味することもあり, 本あるいは著者によって定義に微妙な差がある。また, 数列は, 記法が関数と異なるが, 写像 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ である。加減乗除などの2項演算は, 部分写像 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, あるいは, $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ である。座標平面上の変換(拡大・縮小, 平行移動など)は, 写像 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ である。

写像の相等

写像 $f: X \rightarrow Y$ は直積集合 $X \times Y$ の部分集合であるものとした。なので、 $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$ に対し、 $f = g$ は直積 $X \times Y$ の部分集合として等しいこと、すなわち、グラフが一致することを意味する。このとき、 $f(x) = g(x)$ となるのは当然だけれど、逆も成立する。つまり、普通の意味で関数として等しいとは $\forall x[x \in X \rightarrow f(x) = g(x)]$ のことであるが、そのとき、 f と g のグラフは一致している。

練習 30 同じ定義域を持つ 2 つの写像 $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$ に対し、

$$\forall x[x \in X \rightarrow f(x) = g(x)] \Rightarrow f = g$$

[ヒント] $(x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in g$ を示せばよい。 $(x, y) \in f$ は $y = f(x)$ を意味する。

写像の合成

写像 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ に対して、 f と g の合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ を

$$x \xrightarrow{g \circ f} g(f(x))$$

で定義する。すなわち、 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 。

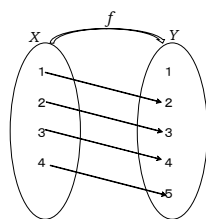
f と g の合成を $g \circ f$ と逆順に書くことに注意（日本語の言語感覚と合わない）。

写像の合成において、結合法則が成立する。すなわち、 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$ とするとき、 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ 。

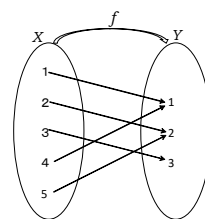
練習 31 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$ であるとき、 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ を求めよ。

問 32 1 次関数と 1 次関数の合成は何次関数か。2 次関数と 2 次関数の合成は何次関数か。一般に、 m 次関数と n 次関数の合成は何次関数か。ただし、 m, n は正の整数。

単射と全射



単射



全射

以後、 $f: X \rightarrow Y$ と書いたとき、写像概念に、始集合 X と終集合 Y が含まれるものとする。（写像 $f \subset X \times Y$ の始集合 X は f の定義域だから自動的に決まるが、 Y は f からは定まらない。）

部分写像 $f: X \rightarrow Y$ が**単射**であるとは、いずれの $y \in Y$ に対しても、 $y = f(x)$ となる $x \in X$ が（もし存在すれば）一意に定まることである。言い換えると、 $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ となること、あるいは、 $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ となることである。

なお、単射であるための条件は、「一対一」とも呼ばれる。

例 33 $f(x) = x^3$ で定められる関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は単射である。

$g(x) = x^2$ で定められる関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は単射ではない。

写像 $f: X \rightarrow Y$ が**全射**であるとは、 f の値域が終集合 Y と一致すること。すなわち、いずれの $y \in Y$ に対しても、 $y = f(x)$ となる $x \in X$ が (少なくとも 1 つ) 存在すること。正確に述べると、 $f: X \rightarrow Y$ が**全射** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall y \in Y [\exists x \in X [y = f(x)]]$ 。

例 34 $f(x) = x^3$ で定められる関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は全射である。

$g(x) = x^2$ で定められる関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は全射ではない。

全射であり単射でもある写像を**全単射**という。全射、単射の定義を合わせて書くと、

$$f: X \rightarrow Y \text{ が全単射 } \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall y \in Y [\exists! x \in X [y = f(x)]]$$

なお、単射は、始集合、終集合をそれぞれ定義域、値域に置き換えると全単射になる。全単射のことを「一対一対応」ともいう。

例 35 $f(x) = x^3$ で定められる関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は全単射である。

$y = f(x)$ が $(x, y) \in f$ を意味することを用いて全単射の定義を書き換えると、

$$f: X \rightarrow Y \text{ が全単射 } \iff \forall y \in Y [\exists! x \in X [(x, y) \in f]]$$

である。 $x \in X$ と $y \in Y$ を入れ換えたら、 f が写像であることの定義と同じ形をしていることに気づかないだろうか。

逆写像 (inverse mapping)

$f: X \rightarrow Y$ に対し、次式で $f^{-1} \subset Y \times X$ を定める。

$$f^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in f\}$$

要するに、 f^{-1} は、直積 $Y \times X$ の中で、直積 $X \times Y$ の部分集合 f と同じ関係を表す部分集合である。

練習 36 $f: X \rightarrow Y$ が全単射であるとき、 f^{-1} は写像 $Y \rightarrow X$ である。すなわち、 $\forall y \in Y \exists! x \in X [(y, x) \in f^{-1}]$

練習 37 f^{-1} が写像 $Y \rightarrow X$ であるとき、 $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

練習 38 $f: X \rightarrow Y$ が全単射であるとき、 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ は全単射である。

練習 39 写像 $f: X \rightarrow Y$ において、 f^{-1} が写像 $Y \rightarrow X$ であれば $f: X \rightarrow Y$ は全単射である。

f^{-1} が写像 $Y \rightarrow X$ であるとき、 f^{-1} を $f: X \rightarrow Y$ の**逆写像**という。 $(f^{-1}$ は f インバースと読む)。

写像 $f: X \rightarrow Y$ が逆写像を持つための必要十分条件は、 $f: X \rightarrow Y$ が全単射であることである。

注意 40 f^{-1} を $x \mapsto f(x)^{-1}$ で定められる関数と混同しないこと。混同を避けるために f の逆写像を $f^{\leftarrow}$ と書く流儀もある。

恒等写像

X 上の恒等写像(identity mapping) $\text{id}_X : X \longrightarrow X$ を $x \mapsto x$ で定義する。

練習 41 $f : X \longrightarrow Y$ が全単射であるとき, $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$, $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ 。

練習 42 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ とする。 $g \circ f = \text{id}_X$, $f \circ g = \text{id}_Y$ ならば f は全単射で, $g = f^{-1}$ 。 [ヒント] id_X , id_Y は全単射。

例 43 平面上で直線 l に関する線対称移動を σ_l で表す。 $\sigma_l \circ \sigma_l = \text{id}$ なので, $\sigma_l^{-1} = \sigma_l$ 。
(σ は小文字のシグマ)

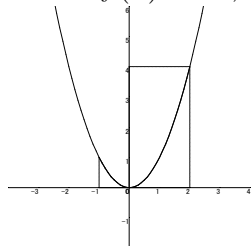
写像による集合の像

$f : X \longrightarrow Y$ を写像, $A \subset X$ とする。 $x \in A$ に対する $f(x)$ 全体の集合を f による A の像(image) といい, $f(A)$ で表す。すなわち, $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ 。

(補足) f による X の像 $f(X)$ は f の値域。

例 44 $f(x) = x^2, A = \{-1, 0, 1, 2\}$ のとき,
 $f(A) = \{f(-1), f(0), f(1), f(2)\} = \{1, 0, 1, 4\} = \{0, 1, 4\}$

例 45 $f(x) = x^2, A = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 2\}$ のとき, $f(A) = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y < 4\}$



A が有限集合であれば $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ という定義は使いやすいが, A が無限集合だと逆に難しい。

$y \in f(A) \Leftrightarrow P(y)$ となる条件命題 $P(y)$ を求め, $f(A) = \{y | P(y)\}$ の形に書き換えたい。

$y \in f(A)$ とすると, A の要素 x を用いて $y = f(x)$ と書けるのだから,

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A [y = f(x)]$$

すなわち,

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y | \exists x \in A [y = f(x)]\}$$

練習 46 写像 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を $(x, y) \mapsto (2x, y)$ で定義するとき, 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の f による像を求めよ。

練習 47 座標平面上で, 点 P が放物線 $y = x^2 - 1$ 上を動くとき, 原点 O と P を結ぶ線分 OP の中点 Q の軌跡を求めよ。

練習 48 写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を $t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$ で定義するとき, f の値域は $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x > -1\}$ であることを示せ。

[ヒント] $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x > -1\}$ の点に対し対応する t の存在を示すことが要点。

3.4 集合を考える利点と限界

条件命題があったとき、その外延全体を考察の対象とするのが集合の考えである。

たとえば、ユークリッド互除法の問題を考えてみよう。整数 a, b の最大公約数を $\text{GCD}(a, b)$ で表す。 a を b で割った余りを r とするとき、 $\text{GCD}(a, b) = \text{GCD}(b, r)$ となるのだけれども、それは、 a, b の公約数全体の集合と b, r の公約数全体の集合が一致することを示すことで証明できる。公約数全体を考えることで、物事が考えやすくなる。

練習 49 整数 a を正の整数 b で割った商を q 、余りを r とすると、

q は整数で、 $a = bq + r, 0 \leq r < b$ 。

- (1) a, b の公約数全体の集合と b, r の公約数全体の集合が一致することを示せ。（ヒント） a, b の公約数が r の約数であること、また、 b, r の公約数が a の約数であることを示す。
- (2) $\text{GCD}(a, b) = \text{GCD}(b, r)$ であることを示せ。
- (3) $a > 0$ のとき、 $\text{GCD}(a, 0) = a$ であることを示せ。(Note. 0 の約数はすべての整数)

集合の利便性を支えるのは、条件命題 $P(x)$ に対し、 $P(a) \Leftrightarrow a \in \{x | P(x)\}$ という原理である。しかし、一方で、この原理を野放図に適用すると不都合なことも起こる。

S を集合を表す変数として $A = \{S | \neg(S \in S)\}$ とおく。普通の集合で $S \in S$ は成立しないから、普通の集合は A の要素になっている。 A 自身はどうか、すなわち、 $A \in A$ であろうか、それとも $\neg(A \in A)$ だろうか。

$A \in A$ だとすると、 $A \in \{S | \neg(S \in S)\}$ なので $\neg(A \in A)$ となって矛盾。

$\neg(A \in A)$ だとすると、 $A \in \{S | \neg(S \in S)\}$ でないので、 $\neg\neg(A \in A)$ 。これも矛盾。なので、 $A \in A$ 、 $\neg(A \in A)$ のどちらでもないことになる。

つまり、 $\neg(A \in A)$ かつ $\neg\neg(A \in A)$ 。これは矛盾。

これは、**ラッセルのパラドックス**と呼ばれる。 A 自身を $S \notin S$ という条件命題の対象とする自己言及がパラドックスを導く要因になっている。現代数学では、新規の集合を作ることによって一定の制限を加えることで自己言及の発生を抑制している。

4 論理

ラッセルのパラドックスは、仮定から矛盾が導かれると仮定が否定されるという論理に基づいて最終的に矛盾を導いている。この章では、数学で用いられる論理について、少し、くわしく調べていきたい。

4.1 序論

命題論理の記号

「ならば」、「かつ」、「または」、「でない」で表現可能な論理のことを**命題論理**という。命題論理では、以下の記号を用いる。命題を p, q などの文字で表す。

$p \rightarrow q$	p ならば q
$p \wedge q$	p かつ q
$p \vee q$	p または q
$\neg p$	p でない
$\perp$	矛盾

「 p でない」を $\bar{p}$ で表すこともある。

結合の優先順位は、 $\neg$ は $\wedge, \vee$ より優先する。たとえば、 $\neg p \vee q$ は $(\neg p) \vee q$ を意味する。

さらに、 $\rightarrow$ より $\wedge, \vee$ が優先する。たとえば、 $p \rightarrow q \wedge r$ は $p \rightarrow (q \wedge r)$ を意味する。

$\wedge$ と $\vee$ の間の優先順位は定めない。だから、 $p \vee q \wedge r$ のような書き方はできない。必ず、 $(p \vee q) \wedge r$ または $p \vee (q \wedge r)$ のように括弧を用いて意味不明にならないように書く。

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ を $p \rightleftharpoons q$ で表す。 $\rightleftharpoons$ の結合優先順位は、 $\rightarrow$ より低いものとする。

必要条件と十分条件

$P(x) \Rightarrow Q(x), P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ は、条件命題 $P(x), Q(x)$ に関する記述である。別のいい方をすると、 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ や $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ は、 $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$ で表される論理を外から見た記述である。その意味で、 $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ はメタ論理の記号といわれる。

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ は、 $P(x)$ を成立させるどの x に対しても $Q(x)$ が成立することを意味するから、同じ意味のことを表す命題は、 $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ である。

$P(x) \rightarrow Q(x)$ は、 x を自由変数として含む条件命題であり、 x に自由に値を代入してよい。それによって真になったり偽になったりする。 x を任意の要素として $P(x) \rightarrow Q(x)$ を示したとき、 $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ が成立する。一方、「 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 」において、 x は自由変数ではない。

全称記号を伴わない $P(x) \rightarrow Q(x)$ には違和感があるかもしれない。けれど、数学的帰納法における $\forall n[P(n) \rightarrow P(n+1)]$ は、 $P(1) \rightarrow P(2), P(2) \rightarrow P(3), P(3) \rightarrow P(4), \dots$ を意味する。数学的帰納法は、 $P(1)$ を出発点に、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対する個々の $P(k) \rightarrow P(k+1)$ を、順次、重ねて適用することで $P(n)$ という結論を得る論法である。

この章の主要な目標「 $p \rightarrow q$ 」の真偽 についてざっくりと

「 $p \rightarrow q$ 」は、結論 q が真であれば、 p の真偽と関係なく真。この原理を用いると、「 $p \rightarrow q$ 」は、仮定 p が偽であれば、 q の真偽に関係なく真だといえる。なぜかという、 p が偽のとき、対偶「 q でないならば p でない」が真だから。

この事実に基づいて、「 $p \rightarrow q$ 」の真偽表を作ると、

p	q	$p \rightarrow q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

となつて、「 $p \rightarrow q$ 」が偽となるのは、 p が真で q が偽の場合だけだとわかる。

問 50 何枚かのカードがあつて、片面には整数が、もう一方の面には英字またはカタカナが書かれている。「英字の裏は偶数」という性質が成り立っているか調べるとき、裏返してみる必要がないのはどのカードか。[ヒント] たとえば、

A

5

イ

6

＜補説＞ 数学文の読み方 ～文章の構造～

コンピュータのプログラム言語のような人工言語と異なり、数学文は自然言語で書かれるのが普通で、文章の構造を読み取るのに、阿吽の呼吸を理解する必要がある。たとえば、「 p とする」で書き出したとき、仮定 p の有効範囲を明示しないのが普通の書き方で、 $\neg p$ (p でない) という結論が得られたとき、あるいは、 $p \rightarrow q$ (p ならば q) の形の結論が得られると、 p という仮定が消滅するのがほぼ暗黙の約束になっている。それでも、仮定に基づく議論のなかに場合分けがあると、仮定 p の有効範囲は伸びるので、上記に当てはまらない場合もある。ただし、必ず入れ子構造にはなっているはずなので、入れ子を意識すると読みやすくなる。

4.2 $p \rightarrow q$

$p \rightarrow q$

$p \rightarrow q$ は、 p と仮定したとき q が結論として得られることを意味する。

p と仮定して議論を進め、 q という結論を得たとき、 $p \rightarrow q$ が導かれる。 $p \rightarrow q$ が導かれたときは、 p を議論の仮定から外してよい。なぜかという、 p という仮定を「 $p \rightarrow$ 」の部分に埋め込んでしまったのだから。また、 $p \rightarrow q$ をそのように導くことから、 p と $p \rightarrow q$ が真であるときに q という結論を得る論法は正しい。

p と仮定して q という結論を得るときには p が真であるかどうかを問わない。また、その結論を得るために p と仮定することが必須であるかも問わない。だから、 q が真であれば、 p の真偽によらず、 $p \rightarrow q$ は真である。

注意 「 p ならば q 」と「 p なので、 q 」は意味が異なる。混同しないように。

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$ と $p \wedge q \rightarrow r$

フェルマーの小定理

「 p が素数であるとき、正の整数 a が p と互いに素であれば、 $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$ 」
は、 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ の形をしている。しかし、これは

「正の整数 a, p に対し、 p が素数で a が p と互いに素であれば、 $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$ 」
のように $p \wedge q \rightarrow r$ の形に言い換えることができる。

一般に、 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ と $p \wedge q \rightarrow r$ は同じ意味である。それを確認しよう。

まず、 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ のとき、 $p \wedge q \rightarrow r$ となることを示す。

そこで、 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ と仮定し、次いで、 $p \wedge q$ と仮定すると、

p なので、 $q \rightarrow r$ であり、 q でもあるので、 r と結論できる。

だから、 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ と仮定したとき、 $p \wedge q \rightarrow r$ が成立する。

次に、 $p \wedge q \rightarrow r$ のとき、 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ となることを示す。

まず、 $p \wedge q \rightarrow r$ と仮定する。

次いで、 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ を導くために、 p と仮定する。

ここで、 $q \rightarrow r$ を導くために、さらに q と仮定する。

すると、 $p \wedge q$ が成立するので、 r が導かれる。

$\therefore q \rightarrow r$

p と仮定して $q \rightarrow r$ が導かれたので、 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

だから、 $p \wedge q \rightarrow r$ のとき、 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ となる。

4.3 背理法 否定と矛盾の論理

矛盾

$p \wedge \neg p$ を**矛盾**という。矛盾は起こらないという原理を**矛盾律**という。

ある命題の成立を仮定して、(別の命題についての) 矛盾が導かれるとき、その命題自身も成立しない。

この原理を利用して、否定形の命題が証明される。実際に定理自身が「～でない」のように書かれることは少ないけれども、「無理数」は有理数の否定であるし、「無限」は有限の否定である。逆に、否定形の命題を証明するのにそれ以外の手法は存在しないといってもよい。否定命題があったら、その証明のどこかに矛盾を利用した証明が使われているはずである。

$\sqrt{2}$ は無理数

$\sqrt{2}$ を分数 $\frac{a}{b}$ で表したい。整数 a, b をどのように選べばよいか考えてみよう。

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ より $a = b\sqrt{2}$ なので両辺を平方して $a^2 = 2b^2$

2 乗して偶数になる数は偶数しかないので a は偶数。

そこで、 $a = 2k$ (k は整数) とすると、 $b^2 = 2k^2$ となるから、 b も偶数である。

つまり、 $\sqrt{2}$ を分数で表すためには、分母、分子ともに偶数としなければならない。

$\sqrt{2}$ を分数で表すことができたとしたら、その分数は既約分数に直すことができない特異な分数だということになる。

既約分数に直すことができない分数は存在するのだろうか。2 数の公約数は有限個しかないから、2 数の最大公約数は確定する。分母、分子をそれらの最大公約数で割れば既約分数になる。だから、既約分数に直すことができない分数は存在しない。

結局、 $\sqrt{2}$ を分数で表すことは不可能だと結論できる。

背理法とは？

背理法は、結論を否定して矛盾を導く証明法だと説明されることが多い。けれども、実際に背理法と呼ばれる証明には 2 パターンがある。

(1) $\neg p$ を示すために $\neg\neg p$ と仮定する。二重否定の法則を用いて $\neg\neg p$ から p が得られるので、 p と仮定して矛盾を導いて $\neg p$ と結論する。

(2) p を示すために $\neg p$ と仮定する。 $\neg p$ から矛盾が導かれると $\neg\neg p$ が結論できるから、二重否定の法則を用いて p と結論する。

(2) では二重否定の法則が本質的であるけれども、(1) のパターンの場合、 $\neg\neg p$ と仮定する必要はなく、 p と仮定するだけで $\neg p$ が得られる。

$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明は (1) のパターンである。形式的には無理数であることを否定して証明を始めるけれども、「無理数でない」と仮定する代わりに、有理数であるという肯定形の仮定から始めれば二重否定の法則を用いずに証明が終わる。

次の定理の証明も、「無数に存在する」ことを「有限でない」と解釈すれば、(1) の型の推論である。

例 51 素数は無数に存在する。

証明. 素数の全体が $p_1, p_2, \dots, p_n$ の n 個であるとする、 $p = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ はどの p_k よりも大きい素数であるから、素数の総数が n 個であることに矛盾する。□

まとめ 52 背理法

背理法の本質は $(p \rightarrow \text{人}) \rightarrow \neg p$ の型の推論である。(人 は矛盾を表す)

$\neg p$ 型の命題を示すときは、 p から矛盾を導くのが常套手段。事実上、それが否定の定義なのだから当然。

p を示すために $\neg p$ から矛盾を導く手法が有効なこともある。その場合、あわせて、二重否定の法則が用いられる。

練習 53 $\neg p \rightarrow (p \rightarrow \text{人})$, すなわち, $\neg p \rightleftharpoons (p \rightarrow \text{人})$ であることを示せ。(二重否定の法則を用いずに示せる)

Note. $(p \rightarrow \text{人}) \rightarrow \neg p$ 型の論理を背理法に含めず、 $\neg p$ から矛盾を導いて p を示す論理のみを背理法ということがある。ただし、そう限定すると、高校数学に現れる「背理法」の大部分は背理法に擬態した似非背理法ということになる。

練習 54 m, n が奇数であれば、2 次方程式 $x^2 + mx + n = 0$ は整数の解を持たない。
[ヒント] 解があるとして、解が偶数のときと奇数のときとに場合分けする。

練習 55 整数 a, b, c が $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすとき、 a, b, c のうち少なくとも一つは偶数である。

部屋割り論法 (鳩ノ巣原理)

練習 56 n 部屋しかないホテルに $n + 1$ 人の人が泊まると、少なくとも 1 室は 2 人以上の客がいる。(各部屋 1 人以下と仮定して矛盾を導く。この論法は、部屋割り論法、ディリクレの引き出し論法、鳩ノ巣原理などと呼ばれる。英語の pigeonhole には、整理棚の小区画という意味がある。ディリクレは 19 世紀ドイツの数学者。)

練習 57 $\frac{1}{7}$ を小数で表すと循環小数になる。(割り切れないとき、7 で割った余りは最大 6 通り)。一般に、有理数を小数で表すと、循環小数 (整数, 有限小数を含む) になる。だから、無理数を小数で表すと循環しない無限小数になる。

$p \rightarrow q$ の対偶

$p \rightarrow q$ に対して、 $\neg q \rightarrow \neg p$ を ^{たいぐう}対偶 という。

$p \rightarrow q$ が真であるとき、対偶 $\neg q \rightarrow \neg p$ も真である。

なぜなら、 $p \rightarrow q$ と仮定し、さらに、 $\neg q$ と仮定するとき、

p だとすると、 $p \rightarrow q$ から q となって $\neg q$ に反するので、 $\neg p$ 。

対偶 $\neg q \rightarrow \neg p$ が真であるとき、その対偶 $\neg \neg p \rightarrow \neg \neg q$ も真である。

ここで、二重否定の法則を適用すれば、

対偶 $\neg q \rightarrow \neg p$ が真であるとき、もとの命題 $p \rightarrow q$ も真。

という結論も得られる。

$\neg p$

$\neg p$ は真である。なぜなら、 $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$ において、 p が $\neg p$ の場合だから。

一方、 $p \rightarrow q$ において、結論 q が真であれば、 $p \rightarrow q$ は真である。

したがって、 $\neg p$ の対偶 $\neg p \rightarrow \neg p$ は真であり、もとの命題 $\neg p \rightarrow p$ も真である。

すなわち、 $p \rightarrow q$ において、仮定 p が偽であれば $p \rightarrow q$ は真。

まとめ 58 $p \rightarrow q$ の真偽

q が真であれば、 p の真偽によらず、 $p \rightarrow q$ は真。

p が偽であれば、 q の真偽によらず、 $p \rightarrow q$ は真。

例題 59 A を集合とすると、 $\emptyset \subset A$

証明. $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ を示せばよい。

$x \in \emptyset$ と仮定すると、空集合の定義から $x \notin \emptyset$ なので、矛盾。 $\therefore x \in A$ □

$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg p$

$\neg p$ を次のようにして示すこともできる。

$\neg p$ は成立する。

なぜなら、 $\neg p$ の仮定の下、 p と仮定すると、 $\neg p$ が成立するので、 $\neg p$ 。

$\neg p$ に上述を適用して、 $\neg p \rightarrow \neg \neg p$ 。二重否定の法則を適用すれば、 $\neg p \rightarrow p$ 。

$p \wedge \neg p \rightarrow \neg p$ と $\neg p \rightarrow p$ 、 $\neg p \rightarrow p$ を合わせ、 $p \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg p$ と書ける。

$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg p$ は、矛盾とは何であるかを端的に表している。

Note. 正確には、 $\neg p$ は、あまたある矛盾のうちの一つを表す。そのうちのどれを $\neg p$ に割り当てても、結局、同じだといえる。

4.4 古典論理

変数を含まない命題は真か偽のいずれかであるという考え方を採用する論理を**古典論理**という。数学では、通常、古典論理が用いられる。古典論理の特徴を把握しておきたい。

二重否定の法則と排中律

$\neg \neg p \rightarrow p$ を二重否定の法則という。二重否定の法則も古典論理の特徴である。

$p \vee \neg p$ を**排中律**という。古典論理は、排中律を公理として採用する論理である。

$\wedge, \vee, \neg$ の真偽表

古典論理では、 $\wedge, \vee, \neg$ によって表された論理式の真偽を真偽表を書いて確かめることができる。真 (true) を T、偽 (false) を F で表す。

$a \wedge b, a \vee b, \neg a$ の真偽値は次の表で与えられる。

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

a	$\neg a$
T	F
F	T

(注意)

真偽いずれかが成立することを前提にしないと、すべての場合を尽くしたことになる。

$a \rightarrow b$ の真偽表

$a \rightarrow b$ の真偽表を作っておこう。

a が偽であれば、 b の真偽によらず、 $a \rightarrow b$ は真であり、 b が真であれば、 a の真偽によらず、 $a \rightarrow b$ は真であることがわかっている。さらに、 a が真で b が偽であれば $a \rightarrow b$ が偽であることは、ほぼ、自明。なぜなら、 a が真で b が偽のとき、 $a \rightarrow b$ が真であると仮定すると、 a と $a \rightarrow b$ が真なので、 b となって、 b が偽であることと矛盾するから。だから、 $a \rightarrow b$ の真偽を次の 4 パターンにまとめることができる。

a	b	$a \rightarrow b$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

古典論理では命題は真か偽に確定すると考えるので、この 4 パターンですべてを尽くしている。

4.5 「または」と場合分け

$p \wedge q$ の使い方は単純で、 p と q が真のとき $p \wedge q$ は真で、逆に $p \wedge q$ が真であれば、 p も q も真。

$p \vee q$ の使い方はどうだろうか。 $p \vee q$ はどういう場合に真となり、逆に、 $p \vee q$ が真だったら何を結論していいのだろうか。

$p \vee q$ が真となる場合は、簡単で、 p が真であれば $p \vee q$ は真であり、 q が真であれば $p \vee q$ は真である。

逆に、 $p \vee q$ が真のとき得られる結論は何だろうか。実は、 $p \vee q$ は場合分けの推論で意味を持つ。 $p \vee q$ が真のとき、 p, q のうちどちらかは真なので、 p のとき r となり、 q のときも r となれば、 p, q の仮定なしに r が成立する。

このことを形式的に、

$$\frac{p \vee q \quad p \rightarrow r \quad q \rightarrow r}{r}$$

で表す。この図式は、横線の上に書かれた命題がすべて真であれば、横線の下に書かれた命題を結論してよいことを表す。ただし、 $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow r$ と書いても実質的な意味は変わらない。

この推論が正しいことは、次のような真偽表を作ってみれば確認できる。なお、ここでいう「正しい推論」とは、前提がすべて真であれば、結論は必ず真となることである。

p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F
F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T

この推論規則は、 $\frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$ の拡張になっている。そして、 $\wedge, \vee, \neg$ で記述される論理と $\rightarrow$ で記述される論理を橋渡しする要 (かなめ) となる推論規則である。

Note. 「 p または q 」を p, q どちらか一方のみが成立する意味で使うことがある。その場合、「 p が真であれば『 p または q 』は真であり、 q が真であれば『 p または q 』は真である」という論法は誤りになるので、一方のみに限定する「または」は、論理を表現するための基本言語とするのにふさわしくない (扱いにくい)。

例題 60 $(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

証明. i) $(p \vee q) \rightarrow r$ から $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ が導かれること
 $(p \vee q) \rightarrow r$ とする。

$p \rightarrow r$ を示したいので p とする。

$p \vee q$ が成立するから、 $(p \vee q) \rightarrow r$ より r がいえる。

$\therefore p \rightarrow r$

$q \rightarrow r$ も同様に示せる。

ii) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ から $(p \vee q) \rightarrow r$ が導かれること
 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ とする。

$(p \vee q) \rightarrow r$ を示したいので、 $p \vee q$ とする。

$p \rightarrow r$ と $q \rightarrow r$ がどちらも成立しているので、 r がいえる。 $\square$

練習 61 $\neg p \vee p \rightarrow p$ [ヒント] $\neg p \rightarrow p$ も $p \rightarrow p$ も正しい。

$p \rightarrow r$, $q \rightarrow s$ が正しいとき、 $p \rightarrow r \vee s$, $q \rightarrow r \vee s$ も正しいから、次の形の推論もよく用いられる。

$$\frac{p \vee q \quad p \rightarrow r \quad q \rightarrow s}{r \vee s}$$

例題 62 $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg) \rightarrow q$

場合分けをして矛盾がでてきたら、以後、その場合は無視してよい。この推論形式は日常によく用いられる。 $(p \rightarrow \neg) \Leftrightarrow \neg p$ なので、 $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$ と書いても意味は同じ。

証明. $p \vee q$ と仮定し、さらに $p \rightarrow \neg$ と仮定する。

$p \vee q$, $p \rightarrow \neg$, $q \rightarrow q$ なので、 $\neg p \vee q$ 。練習 61 より、 q $\square$

例題 63 ド・モルガンの法則 $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

証明. i) $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \wedge q)$ と仮定する。排中律より $p \vee \neg p$ なので場合分けする。

p のとき, q と仮定すると $p \wedge q$ となって仮定に反するから, $\neg q$

$\neg p$ のとき, 明らかに, $\neg p$ 。

ii) $\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$

$\neg p \vee \neg q$ と仮定する。

$\neg p$ のとき, $p \wedge q$ と仮定すると, p なので $\neg p$ に反する。 $\therefore \neg(p \wedge q)$

$\neg q$ のときも, 同様に, $\neg(p \wedge q)$ 。 $\square$

練習 64 $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

4.6 古典論理の特徴～排中律と二重否定の法則からの帰結～

$p \rightarrow q$ の真偽表をみると, $p \rightarrow q$ の真偽は $\neg p \vee q$ の真偽と一致する。それはなぜなのだろうか。また, それによって何が得られるのだろうか。

$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow p \vee q$

$p \vee q$ を証明したいとき, $\neg p \rightarrow q$ を示せばよい。

なぜかという, $\neg p \rightarrow q$ を示しておく, と,

p が真のときは, 当然, p , p が偽のときは, $\neg p \rightarrow q$ から q

となって, p の真偽によらず, $p \vee q$ がいえる。

Note. p が真の場合と p が偽の場合だけ考えればよいというのが排中律。

例題 65 $x, y \in \mathbb{C}$ のとき, $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

証明. $x \neq 0$ のとき, $\frac{1}{x}$ を $xy = 0$ の両辺にかけて, $y = 0$ $\square$

練習 66 x に関する方程式 $ax^2 + bx + 1 = 0$ が実数解を持つとき, $a = 0$ または $4a \leq b^2$ 。
ただし, a, b は実数とする。

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

(1) $p \rightarrow q$ から $\neg p \vee q$ を導く。

$p \rightarrow q$ と仮定する。 $\neg p \vee q$ を示す代わりに $\neg \neg p \rightarrow q$ を示せばよい。

$\neg \neg p$ と仮定すると, 二重否定の法則から p が導かれるので, $p \rightarrow q$ より q がいえる。

(2) $\neg p \vee q$ から $p \rightarrow q$ を導く。

$\neg p \vee q$ と仮定する。

p と仮定すると, $\neg p$ のとき $p \wedge \neg p$ となり矛盾するので, 例題 62 より, q 。

すなわち, $p \rightarrow q$ が成立する。

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ から $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$ となるが、ド・モルガンの法則を用いると、 $\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ なので、 $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$ がいえる。

$(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$ は当然だけれど、その逆も正しいと考えるのが古典論理。

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \text{ と } p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

「... のとき ... ならば ...」のように、 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ なのか、 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ なのか判断に苦しむ日本語に出会うことがある。けれど、 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ と $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ とはまったく意味が異なる。 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ は $p \wedge q \rightarrow r$ と同じ意味である。一方、 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ は、 $(\neg p \vee q) \rightarrow r$ と同じ意味だから、 $(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ を意味する。

問 67 「 p が素数であるとき、正の整数 a が p と互いに素であれば、 $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$ 」という文を、「『 p が素数であるとき、正の整数 a が p と互いに素』であれば、 $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$ 」と解釈すると、どういう意味になるか。

まとめ 古典論理

$p \rightarrow q$ は真偽値で意味を定められた論理ではないけれども、排中律と二重否定の法則を用いて $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ と書き換えることができる。また、 $p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$ でもある。

4.7 論理の代数化

論理に関する基本法則

二重否定の法則	$\neg\neg a \Leftrightarrow a$	
交換法則	$a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$	$a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$
結合法則	$(a \wedge b) \wedge c \Leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$	$(a \vee b) \vee c \Leftrightarrow a \vee (b \vee c)$
吸収法則	$a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$	$a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$
分配法則	$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
ド・モルガンの法則	$\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$

たとえば、吸収法則 $a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$ は次のように確かめられる。

i) $a \vee (a \wedge b) \rightarrow a$ を示す。

$a \vee (a \wedge b)$ とする。 a のとき a となるのは自明で、 $a \wedge b$ のとき a となるのも明らか。

ii) $a \rightarrow a \vee (a \wedge b)$ は明らか。

練習 68 吸収法則 $a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$ を確かめよ。

2つの論理式の真偽値を計算することでも上記諸法則が確かめられる。

例 吸収法則 $a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$ を確かめてみる。

a	b	$a \wedge b$	$a \vee (a \wedge b)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

a の列と $a \vee (a \wedge b)$ の列の真偽値を比較すると一致している。

なお、3変数以下のときは、真偽表の代わりにベン図を書くほうが楽で、実質、同じ。

注意 $a \vee (a \wedge b)$ などの論理式を真偽値についての関数とみなせば、 $a \vee (a \wedge b)$ と a は関数として同一である。けれど、普通の数学では、論理式は、関数ではなく文である。だから、 $a \vee (a \wedge b) = a$ と書かずに、 $a \vee (a \wedge b) \rightleftharpoons a$ と書く。ただし、論理式を関数として扱う数学もある。そこでは、等号を用いて書かれる。

練習 69 連立方程式 $\begin{cases} xy = 0 \\ yz = 0 \end{cases}$ の解は $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ または $y = 0$ であることを示せ。

[ヒント] 分配法則

論理の代数化

古典論理では、 $p \rightarrow q \rightleftharpoons \neg p \vee q$ によって、命題論理の論理式から $\rightarrow$ を除去し $\wedge, \vee, \neg$ のみで記述するように変形できる。だから、古典論理では、命題論理は代数的に扱える。

例 $(p \rightarrow q) \rightarrow p \rightleftharpoons \neg(\neg p \vee q) \vee p \rightleftharpoons (p \wedge \neg q) \vee p \rightleftharpoons p$

ド・モルガンの法則と吸収法則を用いた。答合わせに、真偽表を書いてみるとよい。

参考 命題論理の代数化の結果、作られた数学（ブール代数と呼ばれる）は、コンピュータなどのデジタル機器の回路設計に応用されている。

4.8 述語論理

$\forall$ や $\exists$ を含む命題を対象とする論理を**述語論理**という（述語とは条件命題のこと）。ここでは、古典論理を前提として述語論理を扱う。

述語論理は無数の可能性を扱うので、古典論理の範疇にある述語論理であっても、真偽表を書いて推論の正しさを検証する手法が使えない。数学では述語論理が不可欠だから、命題論理を学ぶときにも推論規則を主体に学んでおくことが望ましいといえる。

$\forall xP(x)$ の証明

x の変域が有限集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ であれば、 $\forall xP(x)$ は、 $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$ を意味するから、端から順に、 $P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)$ を証明していけばよい。けれど、対象領域が無数集合のときにはその手法は使えない。そこで、 x が対象領域のどの要素だったとしても通用する論法で $P(x)$ を導くことで、 $\forall xP(x)$ の証明とする。すなわち、 $\forall xP(x)$ を示すには、 x を任意の要素として $P(x)$ を示せばよい。ただし、証明中、他の箇所では x が別の意味で使われていたら任意性が保証できない。他で使われていない変数 z に対し $P(z)$ を導いたとき $\forall xP(x)$ が結論できる。

$\forall xP(x)$ を導く正しい推論の型を推論図の形に書くと

$$\frac{P(z)}{\forall xP(x)}$$

である。ただし、 z は、他で用いられていない変数。

推論図は、横線の上に書かれた前提から横線の下に書かれる結論が得られることを示す。

$\exists xP(x)$ の証明

対象領域が有限集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ であれば, $\exists xP(x)$ は, $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$ を意味するから, $P(a_k)$ のうちのどれかを示せばよい。この論理は, 対象領域が無限集合であっても同じである。すなわち, $\exists xP(x)$ を示すには, 具体的に $P(t)$ となる t を挙げればよい。

例 $\exists x[x^3 = -8]$

証明. $(-2)^3 = -8$ より $\exists x[x^3 = -8]$ □

この型の推論を推論図で書くと,

$$\frac{P(t)}{\exists xP(x)}$$

である。 $\forall xP(x)$ の証明と同じ形をしているが, t は変数である必要はなく, 数式など, 対象領域のいずれかの要素であればよい。

この論法による証明を**構成的証明**という。一方, $\neg \exists xP(x)$ から矛盾を導いて二重否定の法則により成立を示すこともある。その種の証明を**非構成的証明**という。

 $\forall xP(x)$ を用いる推論

$\forall xP(x)$ を用いる証明の形式は単純で, t を任意の要素として, $\forall xP(x)$ から $P(t)$ を結論してよい。

推論図の形に書くと, t を対象領域の任意の要素とすると,

$$\frac{\forall xP(x)}{P(t)}$$

たとえば, $\forall x[x^2 > 0]$ が真だったら, x に 0 を代入して $0 > 0$ と結論してよい (推論としては正しい)。

練習 70 (1) 対象領域が空集合でなければ $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$ が成立する。

(2) 対象領域が空集合のとき $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$ は偽である。

注意 71 $\forall x \in S[P(x)]$ から $\exists x \in S[P(x)]$ を導く推論を行いがちなので注意。この推論が正しいのは $S \neq \emptyset$ のときにかぎり, $S = \emptyset$ のときには誤った結論を導く。たとえば, 次の論理には不備がある。

$2 < x < 3$ のとき $x^2 - 5x + 6 < 0$ なので, $\exists x[x^2 - 5x + 6 < 0]$

この論理が正しいければ, 次の論理も正しい。

$2 < x < 2$ のとき $x^2 - 4x + 4 < 0$ なので, $\exists x[x^2 - 4x + 4 < 0]$

 $\exists xP(x)$ を用いる推論

関数 f が区間 $[a, b]$ で単調増加であるとは,

区間 $[a, b]$ 内の任意の 2 数 x_1, x_2 に対し, $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ となることである。

平均値の定理

関数 f が区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で微分可能であるとき,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(t) \text{ となる } t \text{ が区間 } (a, b) \text{ に存在する。}$$

を用いると,

関数 f が区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で $f'(x) > 0$ ならば, f は区間 $[a, b]$ で単調増加することが示せる。

証明. 区間 $[a, b]$ 内の任意の 2 数 x_1, x_2 に対し, $x_1 < x_2$ とする。

平均値の定理から, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(t)$ となる t が区間 (x_1, x_2) に存在する。

このとき, $f'(t) > 0$ だから, $x_1 < x_2$ より $f(x_1) < f(x_2)$ 。□

この証明では, $f'(t) > 0$ から結論を導いているけれども, この t は結論には現れない。

一般に, $\exists x P(x)$ を前提とする次の推論は正しい推論形式である。ただし, Q は x を含まない命題。

$$\frac{\exists x P(x) \quad \forall x [P(x) \rightarrow Q]}{Q}$$

これは, $\vee$ の推論規則

$$\frac{p \vee q \quad p \rightarrow r \quad q \rightarrow r}{r}$$

の拡張である。

練習 72 n が合成数であれば, $\sqrt{n}$ が整数であるか, または, $(n-1)!$ が n で割り切れるかのいずれかである。 [ヒント] n は合成数なので, $n = ab$ となる 1 より大きい整数 a, b がある。排中律 $a = b \vee a \neq b$ を用いて分類する。

4.9 $\neg \forall x P(x)$ と $\neg \exists x P(x)$

対象領域が有限集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ であれば,

$$\forall x P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n),$$

$$\exists x P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n) \quad \text{なので,}$$

ド・モルガンの法則から

$$\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \neg P(a_1) \vee \neg P(a_2) \vee \dots \vee \neg P(a_n),$$

$$\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \neg P(a_1) \wedge \neg P(a_2) \wedge \dots \wedge \neg P(a_n) \quad \text{となって,}$$

$$\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x), \quad \neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x) \quad \text{がいえる。}$$

しかし, 対象領域が無限集合の場合, 上述の論法が通用しない。

まず, 結論が否定形である 2 つを示す。 $\neg p$ を導くために p から矛盾を導く論法を使う。

命題 73 $\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x)$

証明. $\forall x \neg P(x)$ と仮定する。

$\exists x P(x)$ と仮定する。

$P(c)$ となる c がある。

$\forall x \neg P(x)$ より, $\neg P(c)$ 。これは矛盾。

よって, $\neg \exists x P(x)$ 。□

命題 74 $\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$

反例が見つければ $\forall x P(x)$ は偽だという意味だから、これは難しくない。

証明. $\exists x \neg P(x)$ という仮定のもとで、 $\forall x P(x)$ と仮定して矛盾を導く。

$\exists x \neg P(x)$ から、対象領域の要素 c で $\neg P(c)$ となるものがある。

$\forall x P(x)$ より $P(c)$ だから、矛盾。□

次に、否定形の仮定をもつ 2 つを示す。

命題 75 $\neg \exists x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$

否定形の仮定 $\neg \exists x P(x)$ を使うために、 $\exists x P(x)$ を導いて矛盾に導く。

証明. $\neg \exists x P(x)$ と仮定する。

$\forall x \neg P(x)$ を示すために、 a を任意の要素として $\neg P(a)$ を導く。

$P(a)$ と仮定すると、 $\exists x P(x)$ となるので $\neg \exists x P(x)$ に反する。 $\therefore \neg P(a)$

よって、 $\forall x \neg P(x)$ □

命題 76 $\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$

証明. 対偶 $\neg \exists x \neg P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ を示す。

直前に示した $\neg \exists x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$ の $P(x)$ の部分に $\neg P(x)$ を当てはめると

$\neg \exists x \neg P(x) \rightarrow \forall x \neg \neg P(x)$

二重否定の法則 $\neg \neg P(x) \Leftrightarrow P(x)$ を用いて、 $\neg \exists x \neg P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ が得られる。□

以上の結果をまとめると、ド・モルガンの法則を拡張する次の法則が得られる。

$$\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

例 77 $\neg \forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow \exists x \neg [P(x) \rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow \exists x [\neg P(x) \vee Q(x)]$

4.10 古典論理と直観主義論理

排中律

排中律は、変数を含まない命題の真偽は、真か偽のいずれかに確定するという主張である。排中律を利用すると、次のような証明が可能になる。存在するものを具体的に示さない証明なので、この種の証明を**非構成的証明**という。

例 78 a^b が有理数となるような無理数 a, b が存在する。

証明. $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ が有理数であれば、 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$ とおけばよい。

$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ が無理数であれば、 $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$ とおくと、

$$a^b = \{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\}^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \quad \square$$

古典論理と直観主義論理

二重否定の法則と排中律の使用を認める論理を**古典論理**という。

二重否定の法則を用いると、存在しないという仮定が否定されたとき、存在が導かれる。存在命題は、具体的に存在が示されたときにのみ証明されると考える立場だと、二重否定の法則は強すぎる。

$p \wedge \neg p \Rightarrow \text{人}$ は二重否定の法則から導かれるけれど逆はいえない。すなわち、 $p \wedge \neg p \Rightarrow \text{人}$ は二重否定の法則より弱い推論規則である。そして、 $p \wedge \neg p \Rightarrow \text{人}$ を前提とすると、排中律と二重否定の法則は一方を仮定すると他方が得られる関係にある（詳細は補説で述べる）。

$\vee$ の推論規則 $\frac{p \vee q \quad p \rightarrow r \quad q \rightarrow r}{r}$ と $p \wedge \neg p \Rightarrow \text{人}$ を許すが二重否定の法則や排中律を認めない論理を**直観主義論理**という。

参考文献 「記号論理入門」 前原昭二著，日本評論社 ISBN978-4-535-60144-4
排中律が直観主義論理で証明できないことの証明がある。

古典論理と直観主義論理の違い

直観主義論理では、 $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ は成立しない。なぜなら、 $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg p \vee q$ が正しければ、 $p \rightarrow p$ が真であることから $\neg p \vee p$ が導けるから。だから、直観主義論理では、 $\rightarrow$ を除去して命題論理を $\wedge, \vee, \neg$ のみで記述するようなことはできない。

古典論理には、ド・モルガンの法則のように、 $\wedge$ と $\vee$ を入れ換えても同様の法則が成立するという特徴（^{そうつい}双対性という）がある。しかし、直観主義論理では、ド・モルガンの法則の一部 $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$ が成立しない。

<補説>二重否定の法則と排中律の関係

直観主義論理のもとで排中律から二重否定の法則を導く

例題 62 は、 $\vee$ の推論規則 $\frac{p \vee q \quad p \rightarrow r \quad q \rightarrow r}{r}$ と $\text{人} \rightarrow p$ の型の論理で成立している。
 $p \vee \neg p$ と仮定する。

$\neg \neg p$ とすると $\neg p \rightarrow \text{人}$ なので例題 62 より p 。

すなわち、 $\neg \neg p \rightarrow p$

二重否定の法則から排中律を導く

$(p \rightarrow \text{人}) \rightarrow \neg p$ の型の論理を用いて、排中律の二重否定 $\neg \neg (p \vee \neg p)$ を示すことができる。かなり技巧的に見える証明だけれど、トリックの胆は、 p から $p \vee \neg p$ が導けること、そして、また、 $\neg p$ から $p \vee \neg p$ が導けることである。

$\neg (p \vee \neg p)$ と仮定して矛盾を導けば、 $\neg \neg (p \vee \neg p)$ が得られる。

この仮定のもとで $p \vee \neg p$ が成立することを示すと、矛盾が成立する。

$\neg p$ を示せば、 $p \vee \neg p$ はいえる。 $\neg p$ を示したいので、 p と仮定すると、

$p \vee \neg p$ となり、 $\neg (p \vee \neg p)$ に反するから、 $\neg p$ はいえる。

排中律の二重否定 $\neg \neg (p \vee \neg p)$ の成立が示せたので、

二重否定の法則を適用すれば、排中律 $p \vee \neg p$ が得られる。

4.11 論理演算を表す記号

論理を表す記号には、本稿で述べたもの以外にも様々な流儀がある。

論理学の世界では、「 p ならば q 」を「 $p \supset q$ 」で表すのが定番。このとき、 p, q の真理集合を、それぞれ、 P, Q とすると、 $P \subset Q$ なので、慣れるまでは頭が混乱する。

「かつ」を表す記号として「&」、「 $\cdot$ 」、「または」を表す記号として「 $\vee$ 」、「 $+$ 」もよく見かける。これらの記法が用いられる場合には、「かつ」が「または」よりも優先する約束をする場合も多いので、表記法の約束を注意深く読んでおく必要がある。

矛盾を $\perp$ と書くことも多い。 p の否定を $\sim p$ で表す文献もある。

$p \rightarrow q \rightarrow r$ のように $\rightarrow$ が続くとき、右から順に結合する約束をして、 $p \rightarrow q \rightarrow r$ は $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ を意味するものとすることもある。

5 数学的帰納法

5.1 数学的帰納法の原理

$P(n)$ を自然数 n に関する条件命題とする。

$$P(1) \wedge \forall n[P(n) \rightarrow P(n+1)] \rightarrow \forall nP(n)$$

を数学的帰納法の原理という。

$\forall n[P(n) \rightarrow P(n+1)]$ は $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ とも書けるから、数学的帰納法の原理を次のように言い換えることができる。

命題 79 数学的帰納法

次の [1], [2] が成立するとき、 $\forall nP(n)$ が成立する。

[1] $P(1)$

[2] $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

数学的帰納法が正しいことは、将棋倒しになぞらえて、次のように説明できる。

n を任意の自然数とすると、

$P(1)$ と [2] より得られる $P(1) \rightarrow P(2)$ とから $P(2)$

$P(2)$ と [2] より得られる $P(2) \rightarrow P(3)$ とから $P(3)$

$P(3)$ と [2] より得られる $P(3) \rightarrow P(4)$ とから $P(4)$

.....

$P(n-1)$ と [2] より得られる $P(n-1) \rightarrow P(n)$ とから $P(n)$

n として 100, 1000 など具体的な数を指定すれば、将棋倒しの部分を を用いずに書ける。しかし、 $\forall nP(n)$ の証明は、 n にどんな数が指定されてもよいように書かなければならない。だから、 n としてどの自然数が指定されるかわからないときは、将棋倒しの部分を無限個用意しておく必要がある。しかし、無限個の推論を含む証明は、証明として認められないであろう。すなわち、数学的帰納法の原理は自然数に関する基本的な仮定（公理）であって、将棋倒しの原理でそれ自身を証明することはできない。

Note1. [2] は、 $k = 1, 2, 3, \dots$ に対する $P(k) \rightarrow P(k+1)$ を一括して証明するステップである。だから、すべての自然数 k に対し通用する論法で、 $P(k)$ から $P(k+1)$ が導け

ることを示さなければならない。だから、「 k を任意の自然数とし、 $P(k)$ とすると、……」のように証明を書くことになる。ところが、これは、「 $P(k)$ が任意の自然数で成立する」と仮定したと誤解されやすい。

Note2. 将棋倒しと反対向きの考え方で数学的帰納法を説明することもできる。数学的帰納法は、自然数 n に関する命題 $P(n)$ の成立を $P(n-1)$ に転嫁する思考法である。 $P(n-1)$ の成立は $P(n-2)$ に帰着し、 $P(n-2)$ の成立は $P(n-3)$ に帰着し、……となって、最終的に $P(1)$ に行きつく。この考え方は**再帰**と呼ばれる。なお、一般に、再帰とは、より規模の小さい同種の問題に転嫁する考え方である。規模を小さくしていったとき自明な解に到達すれば、それで問題が解ける。ユークリッド互除法による最大公約数の計算も再帰の例である。

練習 80 a, b を自然数とし、2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の 2 つの解を α, β とすると、任意の自然数 n に対し、 $\alpha^n + \beta^n$ は整数である。[ヒント]
 $\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} = (\alpha^k + \beta^k)(\alpha + \beta) - \alpha^k\beta - \alpha\beta^k = (\alpha^k + \beta^k)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1})$
 $\alpha^n + \beta^n$ が整数であることを $P(n)$ 、 $P(n) \wedge P(n+1)$ を $Q(n)$ として、 $Q(n)$ に帰納法を適用する。

練習 81 数列 $\{a_n\}$ において $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ であるとき、

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

5.2 累積帰納法

$n > 1$ ならば n は素数の積で表せる（素因数分解できる）ことを数学的帰納法で証明しよう。 $P(n)$ を「 n は素数の積で表せる」とすると、 $P(2), P(3)$ は自明だけれど、 $P(3)$ から $P(4)$ を導けない。

$P(n)$ を自然数 n に関する条件命題とする。

$$\forall n [\forall k [k < n \rightarrow P(k)] \rightarrow P(n)] \rightarrow \forall n P(n)$$

を**累積帰納法**と呼ぶことがある。

命題 82 累積帰納法

$P(n)$ を自然数 n に関する条件命題とする。

$$\forall k [k < n \rightarrow P(k)] \Rightarrow P(n) \quad \cdots (*)$$

であるとき、 $\forall n P(n)$ 。

(*) は、 $n = 1, 2, 3, \dots$ について $\forall k [k < n \rightarrow P(k)] \rightarrow P(n)$ を意味する。ただし、 $n = 1$ のときは、 $\forall k [k < n \rightarrow P(k)]$ は形式的に真となるので、 $P(1)$ を意味する。したがって、(*) は、次のように言い換えられる。

$$P(1)$$

$$\begin{aligned}
&P(1) \rightarrow P(2) \\
&P(1) \wedge P(2) \rightarrow P(3) \\
&P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \rightarrow P(4) \\
&P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \rightarrow P(5) \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

通常の数学的帰納法と同様、将棋倒しの原理で、順に、 $P(2), P(3), P(4), P(5), \dots, P(n)$ の成立が示せる。

数学的帰納法が正しいければ累積帰納法も正しい。それは以下のようにして示すことができる。

$\forall n[\forall k[k < n \rightarrow P(k)] \rightarrow P(n)] \dots (*)$ とする。

$\forall k[k \leq n \rightarrow P(k)]$ を $Q(n)$ として、 $\forall nQ(n)$ を示す。

[1] $Q(1)$ は $P(1)$ を意味する。

$n = 1$ のとき $\forall k[k < n \rightarrow P(k)]$ は形式的に真なので、 $(*)$ より $P(1)$ は真。

[2] $Q(n)$ とする。すなわち、 $\forall k[k \leq n \rightarrow P(k)]$ とする。

これは、 $\forall k[k < n + 1 \rightarrow P(k)]$ と書くこともできる。

$(*)$ より $\forall k[k < n + 1 \rightarrow P(k)] \rightarrow P(n + 1)$ 。

$\therefore P(n + 1) \quad (**)$

$(Q(n + 1),$ すなわち $\forall k[k \leq n + 1 \rightarrow P(k)]$ を示したいので)

$k \leq n + 1$ とする。

$k < n + 1$ のとき、帰納法の仮定 $Q(n)$ より $P(k)$ がいえる。

$k = n + 1$ のとき、 $(**)$ より $P(k)$

よって、 $\forall k[k \leq n + 1 \rightarrow P(k)]$ 、すなわち、 $Q(n + 1)$ が成立する。

[1],[2] より、 $\forall nQ(n)$ 。

(次に $\forall nP(n)$ を示す)

m を任意の自然数とする。

$\forall nQ(n)$ より $Q(m)$ 、すなわち、 $\forall k[k \leq m \rightarrow P(k)]$

ここで、 $k = m$ のときを考えて $P(m)$

すなわち、 $\forall nP(n)$ 。

例題 83 任意の自然数 $n > 1$ は素数の積で表せる (素因数分解できる)。

証明. 「 n は素数の積で表せる」を $P(n)$ とする。

$n > 1$ とし、 $k < n$ のとき $P(k)$ が成立するものとする。

n が素数のとき、 $P(n)$ は成立する。

n が素数でないとき、 $n = ab$ となる 1 より大きく n より小さい 2 数 a, b がある。

帰納法の仮定より a, b は素数の積で表せるので、 n も素数の積で表せる。

数学的帰納法 (累積帰納法) により、 $n \geq 2$ のとき $P(n)$ が成立する。□

例題 84 正の整数 a, b に対し、 $a > b$ で、 $\text{GCD}(a, b) = c$ のとき、方程式 $ax + by = c$ は整数解を持つ。

証明. 正の整数 a に対し, $P(a)$ を「 b が非負整数で, $a > b$, $\text{GCD}(a, b) = c$ のとき, 方程式 $ax + by = c$ は整数解を持つ。」として, $P(a)$ に累積帰納法を適用する。

a を任意の正の整数とする。

累積帰納法を適用するために, $k < a$ のとき $P(k)$ が成立するものとする。

$P(a)$ を示すために, b を非負整数, $a > b$, $\text{GCD}(a, b) = c$ とする。

$b = 0$ のとき,

$\text{GCD}(a, 0) = a$ なので, $a = c$ となって,

求める方程式 $ax + by = c$ は $ax = a$ と書き換えられる。

$a > 0$ なので, この方程式の整数解は, $x = 1$, y は任意。

たとえば, $x = 1, y = 0$ とすればよい。

$b > 0$ のとき,

a を b で割った商を q , 余りを r とすると, $a = bq + r, 0 \leq r < b$ 。

$\text{GCD}(a, b) = \text{GCD}(b, r)$ なので, $\text{GCD}(a, b) = c$ より, $\text{GCD}(b, r) = c$ 。

$b < a$ なので $P(b)$ が成立する。

$b > r$ で, $\text{GCD}(b, r) = c$ なので, $P(b)$ より,

方程式 $bx + ry = c$ は整数解 $x = x_0, y = y_0$ を持つ。

すなわち, $bx_0 + ry_0 = c$ 。

$r = a - bq$ なので, $bx_0 + (a - bq)y_0 = c$,

すなわち, $ay_0 + b(x_0 - qy_0) = c$ 。

$y_0, x_0 - qy_0$ は整数なので, 方程式 $ax + by = c$ は整数解を持つ。□

Note.

この証明から, $\text{GCD}(a, b) = c$ のときの不定方程式 $ax + by = c$ の解 (の一つ) は,

$b = 0$ のとき, $x = 1, y = 0$,

$b > 0$ のとき, a を b で割った商を q , 余りを r として,

$bx + ry = c$ の整数解 $x = x_0, y = y_0$ を求め, $x = y_0, y = x_0 - qy_0$

とすることで求まることがわかる。

この手順は, 実際にプログラムを書いてコンピュータで実行できる。

練習 85

正の数からなる数列 $\{a_n\}$ において, 任意の n に対して $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^3$ となるとき, $a_n = n$ であることを示せ。 [ヒント] $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

5.3 整列原理 (最小原理)

命題 86 整列原理 $\mathbb{N}$ の空でない部分集合は最小値を持つ。 ($\mathbb{N}$ は自然数全体の集合を表す。)

古典論理を前提とすると, 数学的帰納法の原理と整列原理は同値な命題である。整列原理は数学的帰納法よりも直観的に捉えやすい。だから, 数学的帰納法は, 整列原理から導かれるものと考えられることにしてもよい。

空でない部分集合は最小値を持つような順序集合を整列集合という。整列原理は、 $\mathbb{N}$ が整列集合だという主張である。なお、整列原理は、最小原理、最小値原理などと呼ばれることもある。

整列原理から数学的帰納法の原理を導いてみよう。

数学的帰納法の仮定の [1], [2] が成立しているものとする。

$\neg \forall n P(n)$ と仮定して矛盾を導く。 $(\neg)$ は否定を表す)

$\exists n \neg P(n)$ となるので、 $S = \{n \mid \neg P(n)\}$ とおくと、 $S \neq \emptyset$ 。

整列原理から S は最小値 m を持つ。

$P(1)$ より $1 \notin S$ だから、 $m > 1$ である。

このとき、 $m-1 \notin S$ 、 $m \in S$ から矛盾が生じる。

なぜなら、 $m \in S$ より $\neg P(m)$ 。

$m-1 \notin S$ より $\neg \neg P(m-1)$ 、すなわち、 $P(m-1)$ (二重否定の法則による)。

[2] より、 $P(m-1) \rightarrow P(m)$ なので $P(m)$ 。

$\neg P(m)$ と $P(m)$ が示せたので矛盾。

練習 87 数学的帰納法 (または累積帰納法) から整列原理を導く。

[ヒント] $S \subset \mathbb{N}$ に対し、 S が最小値を持たないとき $S = \emptyset$ を示す。 $S = \emptyset \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}[n \notin S]$ なので、 $\forall n \in \mathbb{N}[n \notin S]$ を累積帰納法で示す。

練習 88 整列原理を用いて、任意の自然数 $n > 1$ は素数の積で表せることを示せ。

[ヒント] 素数の積で表せない 1 より大きい自然数の集合を考える。

6 後記 集合・論理に関する学習指導の今後への期待

計算と論理は、数学を学び、また、応用するための基礎技能である。どのように指導していけばよいか、考えておくべき重大事である。

集合・論理を、表立って、つまり、単元として設定して指導すべきものかどうかは、何ともいえない。けれども、一気に学べる種類のものではないから、継続的に指導されるべきものであることは間違いない。中学校では証明に拘泥するのに、高校に進んだら、証明が二の次になるというのは異常な体制ではないだろうか。また、数学では無限を前提として論理を展開するのだから、命題論理の範疇に留めてカリキュラムを作るようなことをすると不都合が生じる。

集合のよさは、条件命題を外延で捉えることである。論理で扱うのが難しい場合でも、ベン図等を利用することで条件を言い換える技能を習得できる。ド・モルガンの法則による言い換えなどを早期に習得させたい。有限集合では正しい論理も無限集合には適用できないことがある。最大の課題は、有限集合で成り立つ論理法則を無限集合に拡張していくところの指導である。有限集合のみを対象とするのであれば、背理法はいらない。補集合(残りの部分)を考えればいいだけである。しかし、無限の可能性を扱う論理に背理法は欠かせない。

古典論理に対峙して直観主義論理という考え方があることを考えると、二重否定の法則を根拠とする背理法($(\neg p \rightarrow \text{人}) \rightarrow p$ に対し、だまされたという印象を持つのは当然だろう。けれども、素朴な $(p \rightarrow \text{人}) \rightarrow \neg p$ の型の論理は、「アリバイの原理」と同一なのだから、小学生でも使える。 $\neg p \Leftrightarrow (p \rightarrow \text{人})$ なのだから、否定形の命題を証明するためには、 $(p \rightarrow \text{人}) \rightarrow \neg p$ の型の背理法を避けて通ることはできない。「～でない」というのと、「～だとすると矛盾する」というのが同じ意味であることを早い時期から意識させる指導が望まれる。また、現在の高校数学では、場合分けを避ける指導法が好まれる。場合分けは、一直線に進むのとは異なって脳に負荷のかかる考え方であるけれども、難解な考え方ではない。むしろ、問題を単純化する手法である。どうしたら、そうした論法を習得する場を作ることができるか、議論が進むことを期待したい。

注意すべきことは、範囲を狭めて習熟を図ろうと考えると、その範囲の課題には効果的だけれど、少し先に進むと、逆に足を引っ張りかねない指導法が優位となってしまう(かもしれない)ことである。過去の数学教育の経験を教訓として、これからどうするかを考えていかなければならない。

複素数を見直す

2025.02.19 白石和夫

1 複素数はなぜ必要か？

複素数は世の中で重要な役割を果たしている。けれども、いまの学校教育はその重要性を正しく伝えていない。複素数が必要とされる理由が伝わる教え方になっていない。

フーリエ変換

フーリエ変換は、フーリエ級数展開にある周期関数という制約を取り除き、時刻で表す関数を周波数で表す関数に変換する。量子力学はフーリエ解析の言葉で記述されるのが通例であり、また、電子工学ではフーリエ解析やその変種であるラプラス変換が便利な道具として使われている。

平面幾何

円や直線など、合同・相似の視点から平面図形を調べるのに、複素数は有用である。高校数学では数学 C の「複素数平面」として学習する。

ガロア理論

5 次以上の代数方程式に解の公式が存在しないことを示すのに、多項式が一次因子の積に分解できるような拡張（拡大体）の存在が役にたつ。高校数学Ⅱの複素数はその視点で学習される。しかし、実際に高校生にその意図が伝わっているのだろうか。

複素数の歴史

複素数が“数”として認知されるのには長い歴史がある。それは学ぶ価値のあるものであるが、複素数を使う人すべてが知っておかなければならないものなのだろうか。歴史に沿って学ぶことを強制する必要はあるのだろうか。

複素数を学ぶ意義は何か？

多くの人にとって複素数を学ぶ意義は何だろうか。

複素数は新たな理論を作るときの枠組みとして便利な道具である。複素数は天然に存在するのではなく、道具として作ったものである。道具としてどう使うかを学ばなければならない。また、どうやってその道具を組み立てたのか知ることも有用である。それは道具としての限界を知ることにもつながる。

2 プロローグ

LCR 回路

コイル, コンデンサ, 抵抗器で構成された電気回路を LCR 回路という。

コイルは電流の変化を抑制する性質があつて, コイルに流れる電流が変化するとき, 両端に電位差を発生する。時刻 t において, コイルに流れる電流を i , コイル両端の電位差を v とするとき,

$$v = L \frac{di}{dt}$$

の関係がある。このとき比例定数 L をコイルの自己インダクタンスという。

コンデンサは電荷を蓄える性質があつて, 静電容量 C のコンデンサに蓄えられた電荷を Q , 両端の電位差を V とすると, $Q = CV$ の関係がある。電流は電荷の時刻に対する変化率なので, 静電容量 C のコンデンサに流れる電流を i , 電位差を v とすると,

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

すなわち,

$$v = \frac{1}{C} \int i dt$$

である。

そして, 抵抗器に流れる電流を i , 電位差を v とすると $v = iR$ の関係がある (オームの法則)。

たとえば, コイル, コンデンサ, 抵抗器を直接に接続し, 電圧 V を両端にかけると,

$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C} \int i dt = V$$

LCR 回路の定常解

LCR 回路に正弦波交流電圧を付加したとき, 定常状態では, 回路に流れる電流は電源と同じ周波数の正弦波交流になる。過渡現象を無視して定常解のみを求める手段を考える。

電流を小文字の i で表すと虚数単位 i と区別が付かなくなるので, 電流を大文字の I で書く。

電源電圧を $V = v_0 \sin \omega t$ とすると, 回路に流れる電流は定常状態で $I = r \sin(\omega t + \theta)$ の形になる。角周波数 ω を固定して, 時刻 t の関数 $r \sin(\omega t + \theta)$ に複素数 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ を対応させる写像を κ で表す。

$I = x \sin \omega t + y \cos \omega t$ と表されるとき, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とすると $I = r \sin(\omega t + \theta)$ なので, $\kappa(x \sin \omega t + y \cos \omega t) = x + iy$ である。

κ は線形写像である。

すなわち, $\kappa(I_1 + I_2) = \kappa(I_1) + \kappa(I_2), k$ を定数とすると $\kappa(kI) = k\kappa(I)$

さらに,

$I = x \sin \omega t + y \cos \omega t$ のとき,

$$\frac{dI}{dt} = \omega x \cos \omega t - \omega y \sin \omega t = -\omega y \sin \omega t + \omega x \cos \omega t \text{ なので,}$$

$$\kappa\left(\frac{dI}{dt}\right) = -\omega y + i\omega x = i\omega(x + iy) = i\omega \kappa(I)$$

$$\int I dt = -\frac{x}{\omega} \cos \omega t + \frac{y}{\omega} \sin \omega t \text{ なので, } \kappa\left(\int I dt\right) = \frac{1}{i\omega} \kappa(I)$$

例題 1 LCR 直列回路

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{1}{C} \int I dt = v_0 \sin \omega t$$

写像 κ を適用して

$$i\omega L\kappa(I) + R\kappa(I) + \frac{1}{i\omega C}\kappa(I) = v_0$$

$$\frac{\omega CR + i\omega^2 CL - i}{\omega C} \kappa(I) = v_0$$

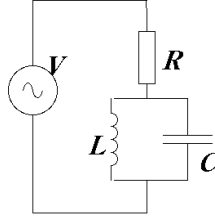
$$\kappa(I) = \frac{\omega C}{\omega CR + i(\omega^2 CL - 1)} v_0$$

この計算結果の絶対値 r と偏角 θ を求めることで $I = r \sin(\omega t + \theta)$ が求まる。

特に, $\omega^2 CL = 1$ のときを考えてみると, $\kappa(I) = \frac{v_0}{R}$ となつて, $I = \frac{v_0}{R} \sin \omega t$

これは, コイルとコンデンサの部分短路したのと同じ結果になることを意味する。

例題 2 LCR 直並列回路



図に示す電気回路で, $V = v_0 \sin \omega t$, コイルに流れる電流を I_1 , コンデンサに流れる電流を I_2 とすると, 抵抗器に流れる電流は $I_1 + I_2$ なので,

$$\begin{cases} V = R(I_1 + I_2) + L \frac{dI_1}{dt} \\ V = R(I_1 + I_2) + \frac{1}{C} \int I_2 dt \end{cases}$$

写像 κ を適用して

$$\begin{cases} v_0 = R(\kappa(I_1) + \kappa(I_2)) + i\omega L\kappa(I_1) \\ v_0 = R(\kappa(I_1) + \kappa(I_2)) + \frac{1}{i\omega C}\kappa(I_2) \end{cases}$$

これは, $\kappa(I_1)$ と $\kappa(I_2)$ に関する連立一次方程式なので代数的に解けて,

$$\kappa(I_1) = -\frac{-R0 + \omega^2 CLR + i\omega L}{\omega^2 L^2 + R^2 + \omega^4 C^2 L^2 R^2 - 2\omega^2 CLR^2} v_0,$$

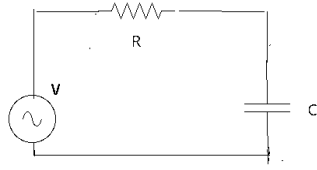
$$\kappa(I_2) = \frac{\omega^4 C^2 L^2 R - \omega^2 CLR + i\omega^3 CL^2}{\omega^2 L^2 + R^2 + \omega^4 C^2 L^2 R^2 - 2\omega^2 CLR^2} v_0$$

$$\kappa(I_1 + I_2) = \kappa(I_1) + \kappa(I_2) = \frac{R(\omega^2 CL - 1) + i\omega L}{\omega^4 C^2 L^2 R^2 - 2\omega^2 CLR^2 + \omega^2 L^2 + R^2} (\omega^2 CL - 1) v_0$$

この計算結果から, $I_1, I_2, I_1 + I_2$ を求めることができる。

特に, $\omega^2 CL = 1$ のとき, $I = 0$ となり, これは, 電源からこの回路に電流が供給されないことを意味する。

練習 3



図の RC 直接回路で $V = v_0 \sin \omega t$ とするとき、回路に流れる電流 I とコンデンサ両端の電位差 v を求めよ。

$$\text{解. } V = RI + \frac{1}{C} \int Idt \text{ なので } v_0 = R(\kappa(I) + \frac{1}{i\omega C} \kappa(I))$$

$$\frac{\kappa(I)}{v_0} = \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{R - \frac{i}{\omega C}} = \frac{R + \frac{i}{\omega C}}{(R - \frac{i}{\omega C})(R + \frac{i}{\omega C})} = \frac{R + \frac{i}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$$\therefore I = v_0 \left(\frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \sin \omega t + \frac{\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \cos \omega t \right)$$

コンデンサ両端の電位差 v は、

$$\frac{\kappa(v)}{v_0} = \frac{1}{i\omega C} \frac{\kappa(I)}{v_0} = \frac{1}{i\omega C} \cdot \frac{R + \frac{i}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{1}{i\omega C} \cdot \frac{R + \frac{i}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{1 - i\omega CR}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

$$\text{より, } v = \frac{v_0}{1 + \omega^2 C^2 R^2} (\sin \omega t - \omega CR \cos \omega t)$$

特に、 $\omega \div 0$ のとき、 $v \div v_0 \sin \omega t$

$$\omega = \frac{1}{CR} \text{ のとき, } v = \frac{v_0}{2} (\sin \omega t - \cos \omega t) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

$\omega \rightarrow \infty$ のとき、 $v \rightarrow 0$ □

Note. $\kappa(I)$ は標準的に用いられる記法ではない。電気・電子工学における交流理論では、虚数単位を j で表し、 $\kappa(I)$ は $\dot{I}$ と書かれることが多い。

まとめ 4 数学的問題解決の特徴と複素数

特定周波数の定常解を求める微分方程式の問題を複素数を利用することで代数方程式の問題に転嫁することができた。別世界の問題に書き換える手法は数学的問題解決の特徴である。

歴史的経緯を無視して語れば、複素数は、2次元ベクトルに新たな演算を追加した変種である。 $i^2 = -1$ となる数が天然にあるのではなく、 i は新たな世界を作るために考案された空想上の存在である。だから、現実に合わせて計算規則を考えていくという学び方では学びきれない。複素数は抽象的な存在であり、その存在は論理的な構成によって確立すると考えべきである。

無論、現実には即して複素数を学ぶという行き方が不可能という訳ではない。LCR 回路に正弦波交流電圧を印加したとき流れる交流電流は同じ周波数の正弦波交流だからそれは振幅と位相のみで記述可能である。振幅と位相を平面上に記述すればベクトルになる。実験事実に基づいて LCR 各素子の性質を記述することから複素数の演算を定義していくことは不可能ではない。実際、工業高校の電気科や電子科ではそのように教えられている。

3 複素数

以下、幾何の視点から始まる複素数へのアプローチを探る。

3.1 平面ベクトルの幾何学

3.1.1 平面ベクトルの極形式

x, y を少なくとも一方が 0 でない実数とすると,

$$x = \sqrt{x^2 + y^2} \cos \theta, \quad y = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \theta$$

となる角 θ が存在し, 2π のちがいを無視すれば一意的に定まる。

したがって, 2次元ベクトル $\alpha = (a_1, a_2)$ に対し, $|\alpha| \neq 0$ のとき, $\alpha = |\alpha|(\cos \theta, \sin \theta)$ となる θ が 2π の違いを無視して一意的に定まる。この角 θ を α の**偏角**といって, $\arg \alpha$ で表す¹。また, $\alpha = \mathbf{0}$ のとき, $\arg \alpha$ は任意の角を表すものとする。

$(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$ (ただし, $r \geq 0$) と表すとき, $r(\cos \theta, \sin \theta)$ を**極形式**という。

3.1.2 複素数の積

積の定義

2次元ベクトル $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$ に対し, それらの極形式を

$\alpha = r_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$, $\beta = r_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2)$ とする。すなわち,

$$a_1 = r_1 \cos \theta_1, a_2 = r_1 \sin \theta_1, b_1 = r_2 \cos \theta_2, b_2 = r_2 \sin \theta_2$$

このとき, 積 $\alpha\beta$ を

$$\alpha\beta = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2), \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

で定める。 $\alpha = \mathbf{0}$ または $\beta = \mathbf{0}$ のとき偏角 θ_1, θ_2 は不定であるが, そのとき, $r_1 r_2 = 0$ なので, 問題は生じない。

この定義から,

交換法則 $\alpha\beta = \beta\alpha$

結合法則 $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

が導かれる。

積の成分表示

$\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$ に対し, 積を成分で表してみよう。

$$\alpha\beta = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2), \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2, \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$= (r_1 \cos \theta_1 r_2 \cos \theta_2 - r_1 \sin \theta_1 r_2 \sin \theta_2, r_1 \sin \theta_1 r_2 \cos \theta_2 + r_1 \cos \theta_1 r_2 \sin \theta_2)$$

$$= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_2 b_1 + a_1 b_2)$$

¹arg は argument の略

3.1.3 複素数の和と積

和はベクトルとしての和の定義を踏襲する。この和と積の演算のもとで2次元ベクトルを**複素数**という。

複素数の計算について次の法則が成立する。ただし、 $\mathbf{0} = (0, 0)$, $\mathbf{1} = (1, 0)$ 。

- (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha\beta = \beta\alpha$
- (2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
- (3) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$
- (4) $\alpha + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \alpha = \alpha$, $\alpha\mathbf{1} = \mathbf{1}\alpha = \alpha$

(3) は、成分で表して確かめることができる。

$\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$, $\gamma = (c_1, c_2)$ とするとき,

$$\begin{aligned}\alpha(\beta + \gamma) &= (a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2), a_2(b_1 + c_1) + a_1(b_2 + c_2)) \\ &= (a_1b_1 + a_1c_1 - a_2b_2 - a_2c_2, a_2b_1 + a_2c_1 + a_1b_2 + a_1c_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta + \alpha\gamma &= (a_1b_1 - a_2b_2, a_2b_1 + a_1b_2) + (a_1c_1 - a_2c_2, a_2c_1 + a_1c_2) \\ &= (a_1b_1 + a_1c_1 - a_2b_2 - a_2c_2, a_2b_1 + a_2c_1 + a_1b_2 + a_1c_2)\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

3.1.4 スカラー倍と複素数の積

$(k, 0)(x, y) = (kx, ky)$ であり, $k(x, y) = (kx, ky)$ であるので, $(k, 0)(x, y) = k(x, y)$ 。

すなわち, 複素数 $(k, 0)$ をかけるのと, ベクトルのスカラー倍の意味で k をかけるのは同じ効果を持つ。

そこで, 複素数 $(k, 0)$ を実数 k と同一視する。

3.1.5 虚数単位

$i = (0, 1)$ を**虚数単位**という。

$i^2 = -1$ である。なぜなら, $i^2 = ii = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 0 \times 1) = (-1, 0) = -1$

$(x, 0)$ を実数と同一視して x と書く約束を用いると,

複素数 (x, y) は, 虚数単位 i を用いて $(x, y) = (x, 0) + y(0, 1) = x + yi$ と書ける。

3.1.6 複素数の絶対値

複素数 $\alpha = (a_1, a_2)$ に対し, $|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ を α の**絶対値**という。

$|\alpha|$ はベクトルの大きさである。

絶対値の計算法則 $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

なぜなら, α, β の極形式を $\alpha = r_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$, $\beta = r_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2)$ とすると,

$$|\alpha\beta| = r_1r_2\sqrt{\cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \sin^2(\theta_1 + \theta_2)} = r_1r_2 = |\alpha||\beta|$$

3.1.7 共役複素数

複素数 $\alpha = (a_1, a_2)$ に対し, $(a_1, -a_2)$ を α の ^{きょうやく}共役複素数といい, $\bar{\alpha}$ で表す。

$z = x + yi$ とかくとき, $\bar{z} = x - yi$ 。

複素数を平面上の点とみるとき, 共役複素数は x 軸に関して対称な点を表す。

共役複素数について, 次の計算公式が成立する。

$$\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2, \bar{\bar{\alpha}} = \alpha, \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}, \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$$

k が実数のとき $\bar{k} = k$ であり, その逆も成立する。すなわち, $\bar{z} = z \Leftrightarrow z$ は実数。

練習 5 $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2, \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$ を確かめよ。

3.1.8 複素数の除算 (割り算)

有理数, 実数の世界では除算ができる。複素数の世界でも除算が可能なことを示す。

$\beta\bar{\beta} = |\beta|^2$ なので $\beta\bar{\beta}$ は実数。だから, $\beta \neq 0$ のとき, $\frac{1}{\beta\bar{\beta}}$ は実数。

$\beta \left(\frac{1}{\beta\bar{\beta}} \bar{\beta} \right) = 1$ となるから, $\frac{1}{\beta\bar{\beta}} \bar{\beta}$ は β の乗法に関する逆元 (逆数)。

これを用いて, $\beta \neq 0$ のとき $\alpha \div \beta$ の除算ができる。

$\beta z = \alpha$ となる複素数 z がただひとつに定まるとき, その z を $\frac{\alpha}{\beta}$ で表す。

$$\beta z = \alpha \text{ の両辺に } \frac{1}{\beta\bar{\beta}} \bar{\beta} \text{ をかけて } z = \frac{1}{\beta\bar{\beta}} \alpha \bar{\beta}$$

$$\text{すなわち, } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta\bar{\beta}} \alpha \bar{\beta}$$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta\bar{\beta}} \alpha \bar{\beta}$ は, 複素数の計算において, 分母, 分子に分母の共役複素数をかけると分母が実数化されることを意味している。

0 でない複素数に乗法に関する逆元 (逆数) が存在することから, 次の関係が成り立つ。

$$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0$$

なぜなら, $\alpha\beta = 0$ のとき, $\alpha \neq 0$ なら両辺に $\frac{1}{\alpha}$ をかけて $\beta = 0$ となるから。

また, 共役複素数について次の公式が成立することもわかる。

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

Note.

$\alpha = \beta = 0$ のとき $\beta z = \alpha$ となる z は一通りに定まらないので, $\frac{0}{0}$ は定義されない。

3.1.9 偏角と絶対値

極形式の計算公式から, 次のことがわかる。

複素数 z_1, z_2 に対し,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

注意. 偏角は, 2π の差を無視して考える。たとえば, $\frac{3\pi}{2}$ と $-\frac{\pi}{2}$ を同じ角とみなす。

3.1.10 極形式の計算公式 (除算)

極形式で表された複素数の除算は次の公式で行うことができる。

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \text{ のとき,}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}.$$

$$\text{特に, } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$\text{証明. } \frac{1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|^2} \overline{z_2} \text{ なので, } \arg \frac{1}{z_2} = \arg \overline{z_2} = -\arg z_2$$

$$\therefore \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \arg z_1 + \arg \frac{1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \quad \square$$

3.2 複素数の幾何学

3.2.1 平行条件と垂直条件

2つの0でない複素数 α, β がベクトルとして平行である条件は, $\alpha = k\beta$ となる実数 k が存在すること。そのとき, $\frac{\alpha}{\beta}$ は実数だから $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\alpha}{\beta}$ 。逆に $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\alpha}{\beta}$ のとき, $\frac{\alpha}{\beta} = k$ とおけば $\alpha = k\beta$ となるから $\alpha // \beta$ 。

命題 6 2つの0でない複素数 α, β について, $\alpha // \beta \Leftrightarrow \alpha \overline{\beta} = \overline{\alpha} \beta$

2数 $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2)$ をベクトルとみなすと内積 $\alpha \cdot \beta = a_1 b_1 + a_2 b_2$ が定義される。

このとき, $\alpha \cdot \beta = \frac{1}{2}(\alpha \overline{\beta} + \overline{\alpha} \beta)$ である。なぜなら,

$$\alpha \overline{\beta} = (a_1 + a_2 i)(b_1 - b_2 i) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 b_2 - a_2 b_1)i$$

$$\overline{\alpha} \beta = (a_1 - a_2 i)(b_1 + b_2 i) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)i$$

$$\therefore \alpha \overline{\beta} + \overline{\alpha} \beta = 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) = 2\alpha \cdot \beta$$

この等式を利用すると, 複素数の垂直条件が以下のように求まる。

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha \overline{\beta} + \overline{\alpha} \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha \overline{\beta} + \overline{\alpha} \beta = 0$$

命題 7 $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \alpha \overline{\beta} + \overline{\alpha} \beta = 0$

注意 通常, 複素数に内積を定義することをしない。その場合, $\cdot$ は複素数の積を表す記号として用いられるかもしれない。

3.2.2 複素数のなす角

ベクトルがなす角に向きを考えないけれども, 複素数では角の向きを考える。

角の正の向きは, 三角関数と同様, 半時計まわり。半直線 OA を原点 O のまわりに θ 回転させると半直線 OB と重なるとき, 半直線 OA に対し半直線 OB がなす角は θ であるといい, この角を $\angle AOB$ で表す。

複素数 α, β に対し, $\overrightarrow{OA} = \alpha, \overrightarrow{OB} = \beta$ となる2点 A, B をとるとき, $\angle AOB$ を α に対し β がなす角という。

偏角は 2π の違いを無視して考える約束のもとで $\angle AOB = \arg \beta - \arg \alpha$ となるので、偏角の計算公式から、

命題 8 $\alpha\beta \neq 0$ のとき、 β が α に対しなす角 $= \arg \frac{\beta}{\alpha}$

問題 1 $\alpha\beta \neq 0$ とする。とする。このとき、

$$\arg \frac{\beta}{\alpha} = 0, \pi \Leftrightarrow \alpha // \beta$$

$$\arg \frac{\beta}{\alpha} = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$$

3.2.3 虚数と純虚数

複素数 $\alpha = (a_1, a_2)$ に対し、 a_1 を実部、 a_2 を虚部といい、それぞれ、 $\operatorname{Re}(\alpha)$ 、 $\operatorname{Im}(\alpha)$ で表す。

$$\operatorname{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}, \operatorname{Im}(\alpha) = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}$$

a, b を実数とすると、 bi を**純虚数**といい、 $b \neq 0$ であれば $a + bi$ を**虚数**という。 0 は虚数ではないが、純虚数である。 $2i, 3i$ などは虚数であり純虚数でもある。 $1 + 2i$ は虚数であるが、純虚数ではない。

複素数 α が実数であるための必要十分条件は $\bar{\alpha} = \alpha$ であり、 α が純虚数であるための必要十分条件は $\bar{\alpha} = -\alpha$ である。

(注意) 純虚数の定義に 0 を含めないことがある。その場合、「純虚数」とある部分を「 0 または純虚数」と読み替える。

3.3 平面上の変換

複素数を利用すると、平面上の合同変換・相似変換の記述ができる。

通常、複素数平面上の点を表す変数として z を用い、写像 $z \mapsto f(z)$ を $w = f(z)$ と書く。また、 $z' = f(z)$ のように書くこともある。

3.3.1 平面上の変換

写像 $w = (\cos \theta + i \sin \theta) z$ は、原点を中心とする角 θ の回転を表す。

k を正の数とすると、写像 $w = kz$ は原点を中心とする k 倍の拡大を表す。

写像 $w = \bar{z}$ は x 軸に関する対称移動を表す。

α を複素数の定数とすると、写像 $w = z + \alpha$ はベクトル α の平行移動を表す。

問 9 上記、各写像の逆写像はいかなる写像か。

3.3.2 合同変換

回転

点 α を中心とする角 θ の回転は、 $w = (\cos \theta + i \sin \theta) (z - \alpha) + \alpha$ で表される。

なぜなら、この回転で点 z が点 w に移るとき、点 $w - \alpha$ は点 $z - \alpha$ を原点を中心として θ 回転した点であるので、 $w - \alpha = (\cos \theta + i \sin \theta)(z - \alpha)$ 。

次の例題のようにベクトルとして捉えると考えやすい。

例題 10 点 $\alpha = 6 + 4i$ を中心とする $\frac{\pi}{6}$ の回転を複素数を用いて表せ。

解. $w - \alpha$ は $z - \alpha$ を $\frac{\pi}{6}$ 回転したベクトルだから

$$w - \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)(z - \alpha)$$

$$\text{よって, } w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z - \alpha) + \alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\alpha$$

$$\text{すなわち, } w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + (8 - 3\sqrt{3}) + (1 - 2\sqrt{3})i \quad \square$$

鏡映

平面上の線対称移動を**鏡映**ともいう。

原点を通り x 軸の正の向きとなす角が θ の直線に関する鏡映は、

$w = (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)\bar{z}$ で表される。

なぜなら、この鏡映で点 z が点 w に移るとき、点 z を原点を中心として $-\theta$ だけ回転した点と、点 w を原点を中心として $-\theta$ だけ回転した点とは、 x 軸について対称であるので、 $\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}w = \overline{\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}z}$ 。

例題 11 原点を通り x 軸の正の向きとなす角が $\frac{\pi}{3}$ である直線に関する鏡映を複素数を用いて表せ。

解. w を原点を中心として $-\frac{\pi}{3}$ 回転した点は、 z を原点を中心として $-\frac{\pi}{3}$ 回転した点と x 軸について対称だから、

$$\{\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})\}w = \overline{\{\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})\}z}$$

$$w = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \overline{\{\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})\}z}$$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \bar{z}$$

$$= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \bar{z}$$

$$\text{よって, } w = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \bar{z} \quad \square$$

問題 2 変換 $w = i\bar{z}$ はいかなる変換か？

問題 3 点 α を通り x 軸の正の向きとなす角が θ の直線に関する鏡映は、 $w = (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)(\bar{z} - \bar{\alpha}) + \alpha$ で表される。

[ヒント] 点 $z - \alpha$ と点 $w - \alpha$ はいかなる関係にあるか？

問題 4 次の変換を複素数を用いて表せ。

- (1) 直線 $y = \sqrt{3}x + 1$ に関する鏡映 (2) 直線 $x + y = 2$ に関する鏡映
(3) 直線 $x = a$ (x 軸上の点 a を通り x 軸に垂直な直線) に関する鏡映

3.3.3 回転と平行移動

回転・平行移動を表す数式

P が複素数 z の点であるとき, $P(z)$ と書く。

平行移動

点 $P(z)$ を β 平行移動した点を $Q(z')$ とすると $z' = z + \beta$

回転移動

点 $A(z_0)$ を中心として点 $P(z)$ を θ 回転した点を $Q(z')$ とする。

このとき, 点 $Q'(z' - z_0)$ は点 $P'(z - z_0)$ を原点を中心として θ 回転した点なので,

$$z - z_0 = (\cos \theta + i \sin \theta) (z - z_0)$$

$$z' = (\cos \theta + i \sin \theta) (z - z_0) + z_0$$

$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ とおくと $|\alpha| = 1$ であって,

$$z' = \alpha(z - z_0) + z_0 = \alpha z - \alpha z_0 + z_0$$

3.3.4 表向き合同変換

$|\alpha| = 1$ である複素数 α を用いて $w = \alpha z + \beta$ の形に表される変換を表向き合同変換という。

問題 5 回転, 平行移動は, 表向き合同変換である。

問題 6 表向き合同変換と表向き合同変換の合成は表向き合同変換である。

問題 7 表向き合同変換は, 回転, または, 平行移動である。

(ヒント) $\alpha = 1$ のとき平行移動, $\alpha \neq 1$ のとき回転。

問題 8 変換 $w = iz + 2$ は, いかなる回転 (または平行移動) か。

Note. 回転のときは, 中心と回転角の大きさ, 平行移動のときは, それを表すベクトルを答える。

問題 9 次の合成変換は, いかなる回転 (または平行移動) か。

- (1) 原点を中心として 45° 回転し, 点 $2i$ を中心として -45° 回転する。
- (2) ベクトル $1 + i$ が定める平行移動を行い, 点 $1 - i$ を中心として 90° 回転する。

問題 10 次の変換は, 平行移動, 回転のいずれか? 平行移動のときは変位を表す複素数, 回転のときは中心と回転角を求めよ。注意 「 f と g の合成」は, f の実行後に g を実行する。

- ①点 i を中心とする 60° 回転と点 1 を中心とする 30° 回転の合成
- ②点 1 を中心とする 60° 回転と点 i を中心とする 30° 回転の合成
- ③点 1 を中心とする 90° 回転と点 i を中心とする 270° 回転の合成
- ④原点を中心とする 90° 回転と $1 + i$ を変位ベクトルとする平行移動の合成

Note. 回転角は個々の回転の回転角の和。回転の中心は不動点を求めればよい。

3.3.5 相似変換

α, β を複素数とする。

変換 $z \mapsto z + \alpha$ は平行移動である。

$\alpha \neq 0$ のとき、変換 $z \mapsto \alpha z$ は回転角 $\arg \alpha$ ，拡大率 $|\alpha|$ の回転拡大である。

さらに、 $\alpha \neq 0$ のとき、変換 $z \mapsto \alpha z + \beta$ および変換 $z \mapsto \alpha \bar{z} + \beta$ は相似変換であり、複素数平面上の相似変換はこれらのいずれかで表される。変換 $z \mapsto \alpha z + \beta$ を表向き相似変換、 $z \mapsto \alpha \bar{z} + \beta$ を裏向き相似変換という。

平面上の相似変換を扱うのに複素数は便利に使える。だから、伝統的な平面幾何の問題を解くのに複素数は有用である。

3.3.6 反転

反転変換

点 O を中心とする半径 r の円 C に関する反転とは、 O を除く平面上の各点 P に対し、 $OP \cdot OQ = r^2$ となる半直線 OP 上の点 Q を対応させる変換をいう。

命題 12 単位円に関する反転は、 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ で与えられる。

証明. $w\bar{z} = 1$ より $|w||\bar{z}| = 1$ ， $\arg w = -\arg \bar{z} = \arg z$ なので、 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ は単位円に関する反転。□

例題 13 a を $a > 0$ の実数とすると、点 a を通り x 軸に垂直な直線の単位円に関する反転の像を求めよ。

解. 反転による像を w とすると、 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ なる点 z は直線 $z + \bar{z} = 2a$ 上にある。

$$z = \frac{1}{\bar{w}} \text{ を直線の方程式に代入して、} \frac{1}{\bar{w}} + \overline{\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)} = 2a$$

$$w\bar{w} - \frac{1}{2a}w - \frac{1}{2a}\bar{w} = 0$$

$$\left(w - \frac{1}{2a}\right)\overline{\left(w - \frac{1}{2a}\right)} = \left(\frac{1}{2a}\right)^2$$

$w = \frac{1}{\bar{z}}$ だから $w \neq 0$ であり、

逆に、 $w \neq 0$ であれば、 $z = \frac{1}{\bar{w}}$ で定まる点 z は直線 $z + \bar{z} = 2a$ 上にあるから、

反転による像は、点 $\frac{1}{2a}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2a}$ の円から原点を除いた図形である。□

複素数全体の集合（複素数平面）を $\mathbb{C}$ で表す。

問題 11 単位円に関する反転 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ は $\mathbb{C} - \{0\}$ から $\mathbb{C} - \{0\}$ への全単射である。ただし、 $\mathbb{C} - \{0\}$ は、 $\mathbb{C}$ から点 0 を除外した集合を表す。

問題 12 y 軸の単位円に関する反転による像を求めよ。

問題 13 a を $a > 0$ の実数とすると、点 a を中心とする半径 r の円の単位円に関する反転の $w = \frac{1}{z}$ による像を求めよ。[ヒント] $r = a$ のときと $r \neq a$ のときとに分ける。

変換 $w = \frac{1}{z}$

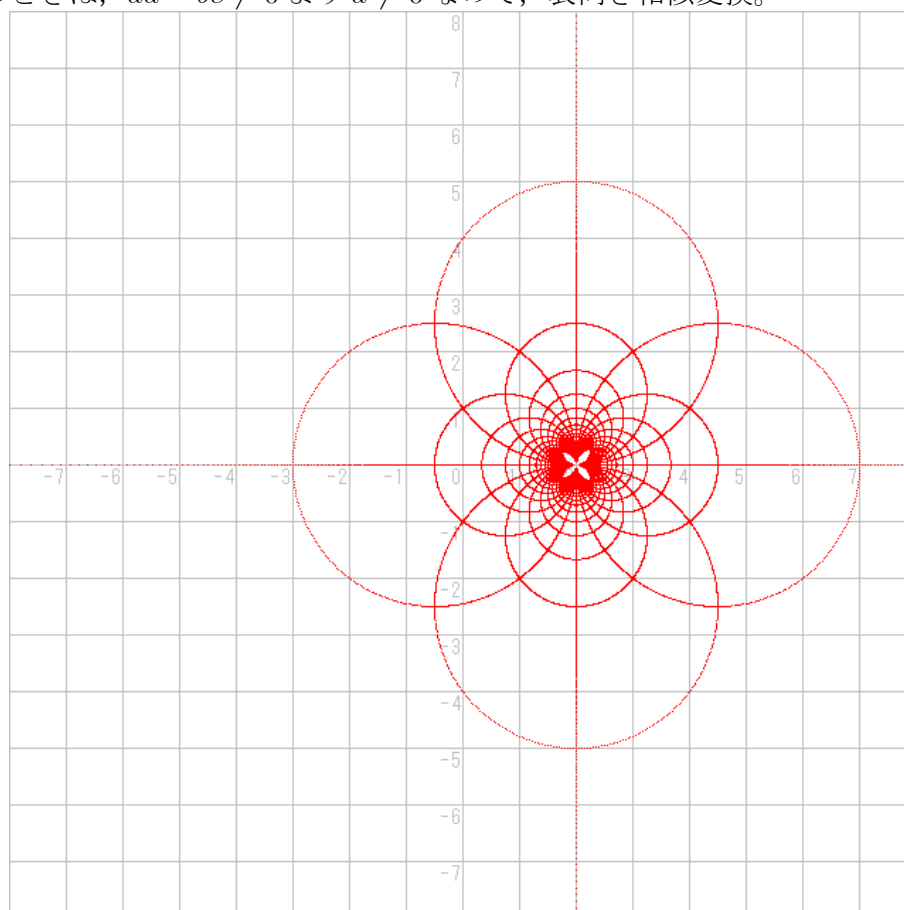
反転の場合と同様、変換 $w = \frac{1}{z}$ は $\mathbb{C} - \{0\}$ から $\mathbb{C} - \{0\}$ への全単射である。

問題 14 変換 $w = \frac{1}{z}$ により、円または直線は円または直線に移る。

3.3.7 一次分数変換

$ad - bc \neq 0$ である複素数 a, b, c, d を用いて $w = \frac{az + b}{cz + d}$ の形に表される変換を一次分数変換という。

注意 $ad - bc \neq 0$ は、約分されて定数になってしまうのを避けるため必要な条件。 $c = 0$ のときは、 $ad - bc \neq 0$ より $a \neq 0$ なので、表向き相似変換。



平面上の格子 (銀) を $w = \frac{2z-3}{z+1}$ で変換 (赤)

問題 15 一次分数変換 $w = \frac{z-i}{z+i}$ は x 軸を単位円に写す。

問題 16 $1, 1+i, i$ をそれぞれ (この順に) $1, 2, 3$ に写す一次分数変換を求めよ。

問題 17 一次分数変換と一次分数変換の合成は一次分数変換である。

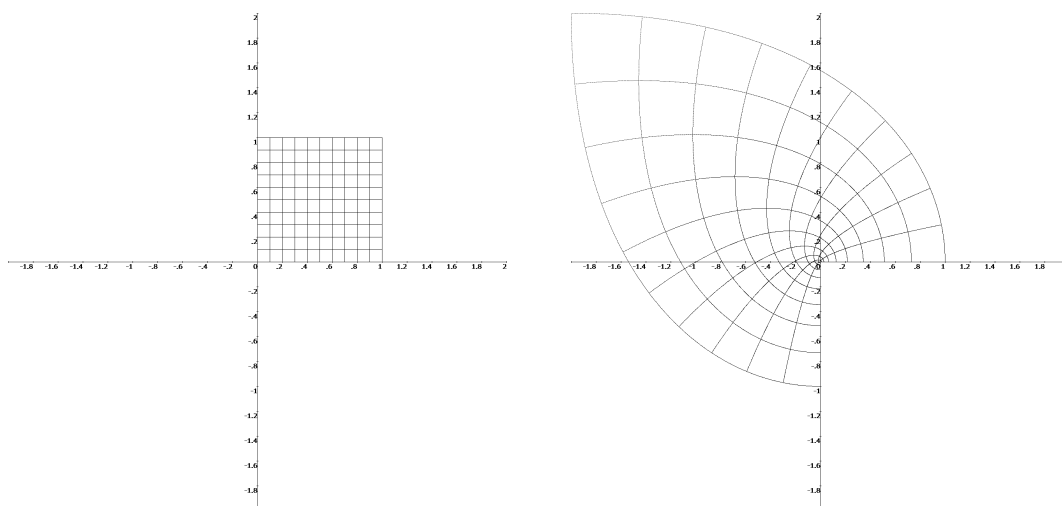
[ヒント] $w = \frac{az+b}{cz+d}$ と $v = \frac{ew+f}{gw+h}$ を合成する。一次分数変換の定義を満たすことの確認を忘れない。

問題 18 $c \neq 0$ のとき、一次分数変換 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ を、平行移動、回転拡大、変換 $w = \frac{1}{z}$ の合成で表せ。[ヒント] $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2z+cd} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{ad-bc}{c^2}}{z+\frac{d}{c}}$

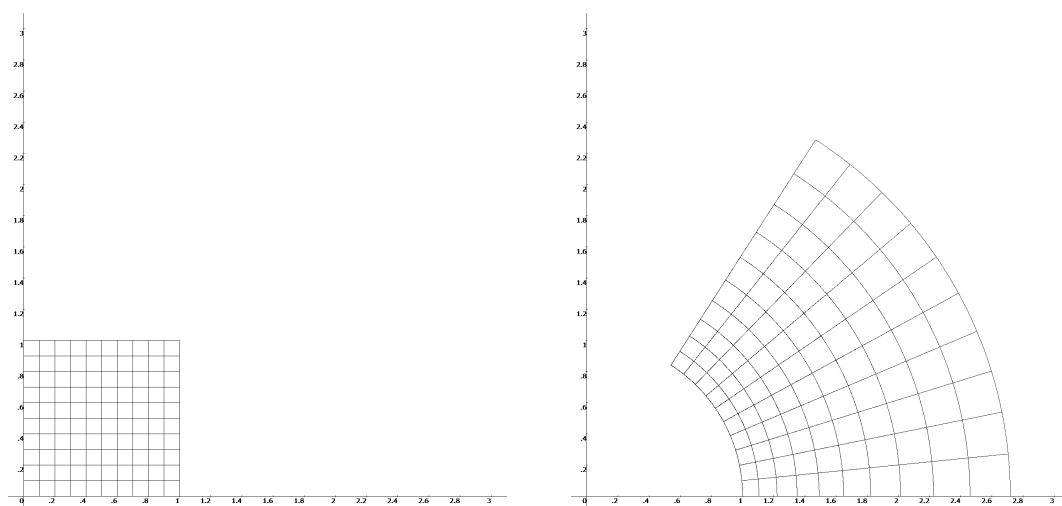
3.4 等角写像

一次分数変換では、直交する 2 直線が変換先でも交点が直交する様子が見れる。

同様の現象は他の複素関数においても見られる。右図は、左図の格子線を $f(z) = z^3$ で写したものである。



次の図は、同様の計算を $f(z) = e^z$ に対し適用したものである。



2 曲線の交角を保存する写像を等角写像という。これは複素数の関数に普遍的に見られる性質で、微分可能な関数は $f'(z) = 0$ の点を除いて等角写像である。

複素関数 f によって点 $P_0(z_0)$ とその近くの点 $P_1(z_1), P_2(z_2)$ がそれぞれ $Q_0(w_0), Q_1(w_1), Q_2(w_2)$ に移されるものとする。

f が微分可能で $f'(z_0) \neq 0$ であれば、 $w_1 - w_0 \doteq f'(z_0)(z_1 - z_0), w_2 - w_0 \doteq f'(z_0)(z_2 - z_0)$ なので、

$$\frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} \doteq \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$\therefore \arg \frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} \doteq \arg \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$$

これは、 $\angle P_1 P_0 P_2 \doteq \angle Q_1 Q_0 Q_2$ を意味する。

4 複素関数

4.1 オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

指数関数 e^x 、余弦関数 $\cos x$ 、正弦関数 $\sin x$ を級数展開すると、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

複素数 z に対し、

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

として複素数の指数関数を定義する。

z に ix を代入して強引に計算すると、

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

同様に

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

である。

また、拡張した指数関数 e^z においても指数法則

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

が成立する。

4.2 e^z の導関数

複素関数 $f(z)$ に対しても、実数の場合と同様に導関数 $f'(z)$ を定義する。すなわち、

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

と定義する。ただし、 Δz は複素数の値を取って 0 に近づく。

e^z のようなべき級数については項別微分が可能だということが知られていて、

$$(e^z)' = 1' + z' + \left(\frac{z^2}{2!}\right)' + \left(\frac{z^3}{3!}\right)' + \left(\frac{z^4}{4!}\right)' + \cdots = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = e^z$$

のような計算が許される。すなわち、 $(e^z)' = e^z$ である。

$$\{g(f(z))\}' = g'(f(z))f'(z)$$

という微分法の公式が成立するのは実数値関数の場合と同様なので、 α を複素数の定数として $(e^{\alpha z})' = \alpha e^{\alpha z}$, $(e^{\alpha z})'' = \alpha^2 e^{\alpha z}$ などが成立する。

4.3 2 階線形微分方程式

$y'' + 2ay' + by = 0$ の形の微分方程式を考える。ただし、 a, b を実数とする。

虚数を考えることで統一的に扱える。

$y = e^{\lambda x}$ が解となるときの、 $y' = \lambda y$, $y'' = \lambda^2 y$ なので

$$\lambda^2 y + 2a\lambda y + by = 0$$

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$$

$$\therefore \lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

$$\lambda_1 = -a + \sqrt{a^2 - b}, \lambda_2 = -a - \sqrt{a^2 - b} \text{ とおけば,}$$

c_1, c_2 を任意の定数として $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ は複素数の範囲で方程式を満たす。

ただし、解は実数なので、それらすべてが解となるわけではない。

i) $a^2 - b > 0$ のとき

c_1, c_2 を任意の実数として $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ が解。

ii) $a^2 - b < 0$ のとき

$$\lambda_1 = -a + i\sqrt{b - a^2}, \lambda_2 = -a - i\sqrt{b - a^2}$$

と書き換えて、

$$y = e^{-ax} \left(c_1 e^{i\sqrt{b-a^2}x} + c_2 e^{-i\sqrt{b-a^2}x} \right)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \text{ なので,}$$

$$c_1 e^{i\sqrt{b-a^2}x} + c_2 e^{-i\sqrt{b-a^2}x} = (c_1 + c_2) \cos \sqrt{b-a^2}x + (c_1 - c_2)i \sin \sqrt{b-a^2}x$$

y は実数なので、 $c_1 + c_2, (c_1 - c_2)i$ はともに実数でなければならないので c_1, c_2 を共役数にする。

A, B を実数として $c_1 = A + Bi, c_2 = A - Bi$ とすれば、 $c_1 + c_2 = 2A, (c_1 - c_2)i = -2B$

$$\therefore y = e^{-ax} \left(2A \cos \sqrt{b-a^2}x - 2B \sin \sqrt{b-a^2}x \right)$$

周期の等しい正弦、余弦をまとめることができるので、

解は、 C, α を任意の定数 (実数) として

$$y = C e^{-ax} \sin \left(\sqrt{b-a^2}x + \alpha \right)$$

iii) $a^2 - b = 0$, すなわち、 $b = a^2$ のとき

$y'' + 2ay' + a^2 y = 0$ を変形すると、

$$y'' + ay' + a(y' + ay) = 0$$

$z = y' + ay$ とおくと、 $z' = y'' + ay'$ なので、

$$z' + az = 0$$

$$\therefore z = C_1 e^{-ax}$$

$$\text{すなわち, } y' + ay = C_1 e^{-ax}$$

$$\text{ここで, } f(x) = \frac{y}{e^{-ax}}, \text{ すなわち, } y = e^{-ax} f(x) \text{ とおく。}$$

$$y' = -ae^{-ax} f(x) + e^{-ax} f'(x) \text{ なので,}$$

$$-ae^{-ax} f(x) + e^{-ax} f'(x) + ae^{-ax} f(x) = C_1 e^{-ax}$$

$$f'(x) = C_1$$

$$\therefore f(x) = C_1 x + C_2$$

$$\therefore y = (C_1 x + C_2) e^{-ax}$$

5 最終章

5.1 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列

5.1.1 $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

行列の計算を学んでいくとき、少し横道にそれることで複素数を導入することもできる。
2行2列の正方行列を利用する。

2行2列の行列に対し、単位行列を $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 、零行列を $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

$\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする。

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ において, } M = \{aE + bI | a, b \in \mathbb{R}\} \text{ とおく。}$$

すなわち、 M の要素は、 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の 2×2 行列。

M の要素どうしの和、差、およびスカラー倍が M の要素となるのは明らか。

次の計算のように、 M の要素どうしの積も M の要素になる。

$E^2 = E, EI = IE = I, I^2 = -E$ なので、 M の要素どうしの積を次のようにしても計算できる。

$$\text{例 } (2E + 3I)(3E - 4I) = 2E(3E - 4I) + 3I(3E - 4I) = 6E - 8I + 9I + 12E = 18E - I$$

$$\text{例 } (2E + 3I)(2E - 3I) = 2E(2E - 3I) + 3I(2E - 3I) = 4E - 6I + 6I + 9E = 13E$$

同様にして、

$$(aE + bI)(cE + dI) = aE(cE + dI) + bI(cE + dI) = (ac + bd)E + (ad + bc)I$$

となるので、 M の要素どうしの積も M の要素になることに加えて、

$$\text{積の交換法則 } (aE + bI)(cE + dI) = (cE + dI)(aE + bI)$$

が成立することが示せる。

$$\det(aE + bI) = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \text{ なので,}$$

$$a^2 + b^2 \neq 0 \text{ ならば, } (aE + bI)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} (aE - bI)$$

これは、次の計算からも分かる。

$$(aE + bI)(aE - bI) = (a^2 + b^2)E \text{ なので, } (aE + bI) \cdot \frac{1}{a^2 + b^2} (aE - bI) = E$$

積の交換法則も成立していることに注意して、

$$(aE + bI)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} (aE - bI)$$

$aE + bI$ を $a + bi$ と書いて計算することにすれば、通常の複素数の計算になる。

5.1.2 回転拡大 (表向き相似変換)

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の 2×2 行列は、回転拡大を表す。

$a^2 + b^2 \neq 0$ のとき、 $a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$ となる正の数 r と角 θ をとると、

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

このとき、一次変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は、原点を中心とする角 θ の回転と、原点を中心とする r 倍の拡大の合成である。

また、この変換は、原点を中心とする r 倍の拡大と原点を中心とする角 θ の回転の合成とみることもできる。

5.2 多項式

5.2.1 多項式をモノとする数学を作る

多項式をモノと考えて数学の対象とする。普通、多項式で表すとき、文字は数を表しているが、多項式自体をモノとして扱うために、変数を（数ではなく）文字として扱う。その立場を鮮明に表すために、多項式を対象とする数学では、大文字の X を用いて多項式を書く。

実数係数多項式 $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots + a_nX^n$ の実体は、数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ である。要するに、 X に無関係に数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ で多項式を識別する。ただし、項数を限定するのは面倒なので、末尾に 0 が続く無限数列だと考える。

加減乗の演算に対して通常の代数法則が成立するように多項式の加法と乗法を定義する。和は、ベクトルの和で定義する。積は

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots)(b_0 + b_1X + b_2X^2 + a_3X^3 + \cdots) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + (a_0a_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + b_0a_3)X^3 + \cdots \end{aligned}$$

となつて欲しいので、 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ と $b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots$ の積は、

$$a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, a_0a_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + b_0a_3, \cdots$$

であるものとする。そうすれば、 X が数だと考えたときにも正しい計算になる。

多項式を考えると、変数の数と、係数をどこから取って来るかが重要である。実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表すとき、1 変数の多項式全体を $\mathbb{R}[X]$ で表す。

因数分解

実数係数の 1 変数多項式は、実数の範囲内で、一次因子と、実根を持たない 2 次因子の積の形に因数分解できる。

まず、一次因子をすべて取りつくす。これは、中間値の定理と因数定理を用いて示せる。残りは実根を持たない偶数次の因子になる。数係数の範囲を複素数に拡張すると、代数学の基本定理と因数定理を反復適用して、虚根を持つ一次因子の積に因数分解できる。虚根を持てばその共役複素数もまた根であるので、それらを持つ 1 次因子どうしの積を作ることとで実根を持たない実係数の 2 次因子ができる。

問 14 実根を持たない偶数次の因子を 2 次因子の積に分解する目的は何か？

5.2.2 多項式の剰余系

1 変数の多項式には、(余りを考える意味での) 割算が定義できる。

例 $X^3 + 3X^2 + 5X + 7$ を $X^2 + 1$ で割る。

$$X^3 + 3X^2 + 5X + 7 = X(X^2 + 1) + 3X^2 + 4X + 7 = X(X^2 + 1) + 3(X^2 + 1) + 4X + 4 = (X + 3)(X^2 + 1) + 4X + 4$$

なので、 $X^3 + 3X^2 + 5X + 7$ を $X^2 + 1$ で割った商は $X + 3$ 、余りは $4X + 4$ である。

商を無視して余りだけを求めたいとき、 $X^2 + 1 = 0$ として計算すればよい。

実係数の 1 変数多項式を $X^2 + 1$ で割ったときの剰余系を $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ で表す。

$\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ には加減と乗算を定義することができるが、 $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ は、0 以外の要素には乗算についての逆元が存在するという特別な性質を持つ。

また、 $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ において、定数項の全体は $\mathbb{R}$ と同じ構造を持つから、 $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ の拡張になっている。しかも、 $X^2 + 1 \equiv 0$ だから、 X と $-X$ は方程式 $x^2 + 1 = 0$ の解になっている。

0 で割る以外の加減乗除の演算について閉じた体系を ^{たい}体 という。 $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ において X を i と書くことにするとき、その要素を複素数という。複素数の全体は $\mathbb{R}$ の拡大体で、方程式 $x^2 + 1 = 0$ は 2 個の解 $\pm i$ を持つ。

ガロア体

多項式全体の集合から既約多項式による剰余系を作る手法は学ぶ価値がある。

ノイズの多い通信回線でデジタル信号を安定に送るために冗長符号という考え方が用いられる。単純に同じものを複数回送るのではなくて、上手に符号化すると余分に送るデータを少なくできる。そのような符号化を誤り訂正符号という。誤り訂正符号では、特定のビット列のパターンのみを通信に使う。少数ビットの誤りであれば、受け取ったビット列にもっともよく似た符号を選ぶことで伝送誤りを訂正できる。

誤り訂正符号の体系を作るのに用いられる数学としてガロア体がある。係数として実数の代わりに 0 と 1 のみを用い、多項式全体を既約多項式で同値類に分類するという手法でガロア体が作られる。

ガロア体は有限個の要素からなる代数系である。だから、総当たりの手法でその性質を調べつくすことができる。純粋数学への入門としても優れた教材になりえるものである。

(注) ガロア体の理論とガロア理論は別物である。

5.3 複素数

複素数は計算しようとする対象の違いによってさまざま手法で定義できる。さまざまな定義があるけれども、計算の体系としてみたとき、どれも実質的に同じものである。だから、複素数は様々な目的に使える数体系だともいえる。

しかし、何を計算したいのか、目的が不明確ななかで $i^2 = -1$ として計算するという複素数の学び方は異常である。 $x^2 + 1$ を一次因子の積で表すといって学ぶのが現行の複素数であるが、 $x^2 + 1$ を一次因子の積で表すことで何をしたいのかよく分からない。何を計算したいのか、目的を明確にして複素数が学ばれる日が早期に訪れることを願って本稿を閉じる。

6 補遺 複素数の幾何と初等幾何

複素数の幾何学を土台に、非ユークリッド幾何のモデルを作ることができる。そのとき、円周角の定理と関係するある量 (複比) が重要な役割を演じる。

6.0.1 有向角

P が複素数 α の点であるとき、 $P(\alpha)$ と書く。

$\overrightarrow{BA}$ に対し $\overrightarrow{BC}$ がなす角 (有向角) を $\angle ABC$ で表す。ただし、 $-\pi < \angle ABC \leq \pi$ 。

3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ に対し、 $\overrightarrow{BA} = \alpha - \beta$, $\overrightarrow{BC} = \gamma - \beta$ なので

命題 15 3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ に対し、 $\angle ABC = \arg \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}$

命題 16 2 点 P, Q が直線 AB に対して同じ側にあるとき、 $\angle APB$ と $\angle AQB$ は同符号である。

問題 19 単位円周上に 4 点 A, B, P, Q があって、 P, Q が直線 AB に対し同じ側にあるとき、 $\angle APB = \angle AQB$ である (円周角の定理の別証)。[ヒント] z が実数 $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

証明. 4 点 A, B, P, Q の座標を $A(\alpha), B(\beta), P(\gamma), Q(\delta)$ とすると、

$$\angle APB = \arg \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}, \angle BQA = \arg \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}$$

$\angle APB + \angle BQA = 0$ を示す。

まず、 $\angle APB + \angle BQA = 0$ または π を示す。

$$\arg \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} + \arg \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta} = \arg \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \cdot \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta} \text{ なので,}$$

$$\arg \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \cdot \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta} = 0 \text{ または } \pi \text{ であることを示せばよい。}$$

すなわち, $\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \cdot \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}$ が実数であることを示せばよい。

$$\overline{\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \cdot \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}} = \frac{\overline{\beta - \gamma}}{\overline{\alpha - \gamma}} \cdot \frac{\overline{\alpha - \delta}}{\overline{\beta - \delta}} = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\delta}} = \frac{\alpha - \delta}{\alpha - \gamma} \frac{\beta - \gamma}{\beta - \delta}$$

だから, $\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \cdot \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}$ は実数である。

よって, $\angle APB + \angle BQA = 0$ または π

$\angle APB + \angle BQA = \pi$ のとき, $\angle APB = \pi + \angle AQB$

これは $\angle APB$ と $\angle AQB$ が同符号であることに反する。

$\therefore \angle APB + \angle BQA = 0$, すなわち, $\angle APB = \angle AQB$ □

☆ この議論の胆は命題 16 であるが, それは, 直線について同じ側にあることをどう定義するかによる。

6.0.2 複比

定義 17 相異なる複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 に対し, $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \div \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ を複比と呼ぶ。

定理 18 相異なる複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 が同一円周上にあつて, z_1, z_2 が z_3, z_4 で定まる直線に対し同じ側にあるとき, $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \div \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ は正の実数である。

6.0.3 非ユークリッド幾何の上半平面モデル

$\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ を上半平面という。

上半平面上の 2 点 z_1, z_2 に対し, $\text{Re } z_1 \neq \text{Re } z_2$ であれば, 実軸 (x 軸) 上に中心を持つ円で 2 点 z_1, z_2 を通るものがただ一つ定まる。その円と実軸との交点を x_0, x_1 とすると, 複比 $\frac{z_1 - x_0}{z_1 - x_1} \div \frac{z_2 - x_0}{z_2 - x_1}$ は正の実数である。そのことを用いて, 2 点 z_1, z_2 間の距離 $d(z_1, z_2)$ を

$$d(z_1, z_2) = \left| \log \left(\frac{z_1 - x_0}{z_1 - x_1} \div \frac{z_2 - x_0}{z_2 - x_1} \right) \right|$$

で定める。 $\text{Re } z_1 = \text{Re } z_2$ のときは, $x_1 = \text{Re } z_1$ として

$$d(z_1, z_2) = \left| \log \frac{z_1 - x_1}{z_2 - x_1} \right|$$

と定める。このように上半平面上の 2 点間の距離を定義すると, 上半平面が非ユークリッド幾何のモデルになる。詳細は省く。

学会SG 2025.2.22

変容する社会を生きる日本型社会の市民に向けた 算数・数学教育

埼玉大学名誉教授

町田彰一郎

1

変容する社会を生きる日本型社会の市民に向けた算数・数学教育

1. 急激に変容する情報システム社会を生きる児童・生徒・学生の教育とは
2. 日本型教育とは
3. 変容する社会を生きる市民に向けた算数・数学教育

2

1. 急激に変容する情報システム社会を生きる児童・生徒・学生の教育とは

第4次産業革命期、 Society4.0、 RealとVirtualの融合

児童・生徒・学生の置かれた教育環境

事例1 紙の本、手で書くノートからの情報収集から、スマホ画面上の映像情報収集
手で書いて覚えることがなくなった社会での学習記憶はどうなるか

事例2 昭和以前の時代に行われていた「地域の人たちに支えられた子供達の市民生活」
から、変容期を生きる多忙な「共稼ぎ夫婦」によって育てられる子供達へ
ーこれは、かつての英国の(第一次)産業革命時にも指摘された事柄でもある。ー

事例3 デジタル機器を傍らに置いて学び、探究する算数・数学教育に求められる
教材研究、指導法の改革 教育DX

3

事例4 職場や、生活の場、教育の場に浸透する生成AI、自律型AI等とどのように向き合うか

事例5 誰でもが先を読めない、常に変容する社会において、“生きる力”を育てるとは？
主体的・対話的で深い学び、複雑系社会を自立協働して生き抜く力をどう作るか？
PBL(Problem/Project Based Learning)

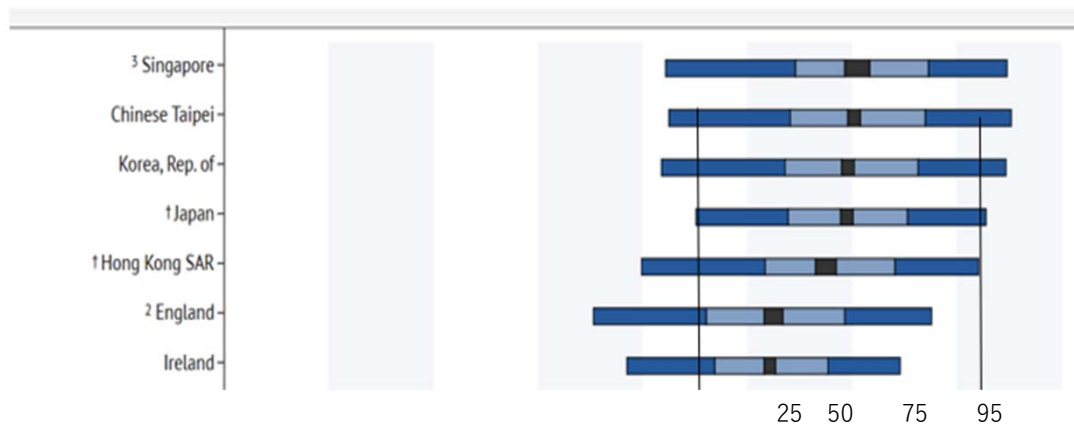
事例6 Net上にあふれている情報の真実性を見定める力としての「思考力・判断力・表現力」、
数学的論理力 をどう育てるか

事例7 少子高齢化、移民の増加などの現象の中の第4次産業革命期、変容期の若い人にも含め
求められる成人の再教育の場としての“地域の学び舎”

4

2. 日本型教育とは

TIMSS2023年の調査(中学2年生)では日本の平均値はシンガポール、台湾、韓国に比べ平均得点は微妙に低いが高得点域におり、95%信頼区間は狭いことが分かる。これは成績上位層、中間層、下位層の格差が他の国に比べ小さいことを示している。世界的に見ると、こうした意味の安定は、上記の東南アジア、北欧系の国に見ることが出来る。こうした特徴が日本型社会の特徴といえるのではないか。



5

このことは、多くの児童・生徒が比較的真面目に算数・数学に取り組んでいることを示しているといえる。

しかしながら、次の結果は別の視点があることを示している。

「数学を勉強すると日常生活に役に立つか」という問いに対して、

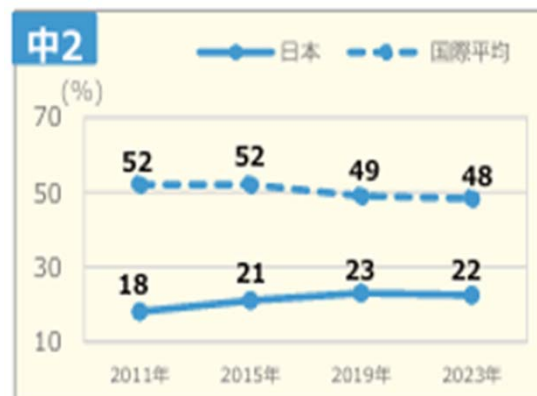
「そう思う」、「強くそう思う」と答えた割合が左のグラフである。

太線が日本、点線が国際平均を表している。少しずつ上がっているが、未だ4分の1程度の生徒たちが数学の勉強が日常生活に役に立っているとは思っていない。



6

また、以下のグラフでは、「数学を使うことが含まれる職業につきたいか」という問いに対して、「そう思う」、「強くそう思う」と回答した割合である。
そう思っている生徒は国際平均の半分以下で、約78%以上の生徒がそのようには思っていないということである。



こうした事から見てくることは、日本の小・中の児童・生徒は、真面目に学校の算数・数学を学び一定の成果を上げているが、21世紀の変容を影で支えている数学に対し、未だ、苦手意識を持ち続けているということが見てくる。

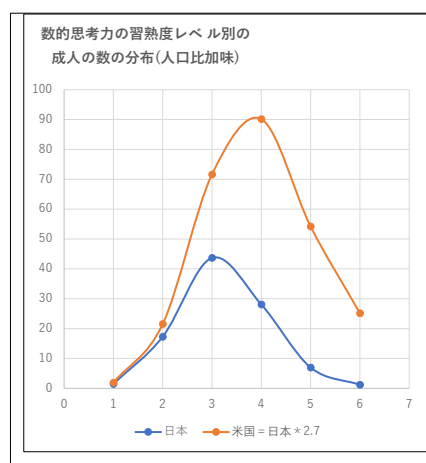
7

前回の学会SGで河合先生から出された調査であるが、この調査はOECD国際成人力調査ピアック (PIAAC; Programme for the International Assessment of Adult Competences) 調査である。

ここでは、これを改めて見直してみる

実際の人口比が日本の2.7661倍もある米国と比較してみる。レベル1では、日米同じ人数、レベル2～3では米国の人数が多くなる。レベル5、6の人数の多さは米国の教育の難しさを示している。

レベル	得点
1	376点以上
2	326～375点
3	276～325点
4	226～275点
5	176～225点
6	176点未満



レベル1の優秀な人材を中心として、中間層から新たな活力を生み出していく、日本型社会での教育の中に、変容期を生きるリテラシーを作り上げていくことがこれからの日本の教育課題である。

8

2024年度世界大学ランキングを見ると、東京大学が29位になったので、それよりも高位の他の国の大学の数を上げてみると、米国19大学、英国4大学、中国2大学、スイス、カナダ、シンガポールが各1大学となっており、米国が圧倒的に他国をリードしている事が分かる。

「日本型教育」下で、日本の児童・生徒・学生、教員は誠意をもって努力し基本的な教養としての数や図形の教育には世界的にかなり良い成績を挙げているが、第4次産業革命下での社会変容に対応したリテラシー教育が達成されていないことが見てとれる。

筆者は、「日型型教育」の原点は江戸の伊能忠敬などの17年間にわたる測量の旅等での地域の人たちとの情報交流の中に、また各地での寺子屋、郷学校、藩校などの活動に見ることが出来ると感じている。これからの変容期「日本型教育」の中でどのように時代の変容に即する教育を作り上げていくかが課題と言える。

経済的、教育的、文化的格差の広がりを前提としている社会で、エリート階層が上位の成績を引き上げていく社会と異なり、日本型教育の中では、一般市民が社会の変容を乗り越えていく力を持てないと社会が崩壊してしまう。これからの教育改革は、第4次産業革命期を一般市民がたくましく乗り越えていく術を皆で作りに出していかなければならない。こうした事が今日の日本型教育の主要課題といえる。

9

3. 変容する社会を生きる市民に向けた算数・数学教育

(1) デジタル機器を傍らに置いた算数・数学の学習

- (a) 江戸時代、米国へ渡った日本の一庶民が、算盤を習っており、当時の米国の一般市民では不可能と思われた日常計算を難なくやり遂げたことが、驚きを持って報道されたという。

このようなリテラシーは、デジタル化社会の今日、日本の一般市民には備わっているだろうか？

末位からの手による計算はを止め、基数モデルを採用し、頭位からの計算を行い、デジタル機器での計算が正しいものかどうかをチェックする能力、さらには、デジタル機器を使って例えば、8桁×8桁の計算などが出来る能力などが、日常の生活の場の中で使えるリテラシーが今日の一般市民に求められている。

10

2桁×2桁の計算の仕組みを理解すれば、
8桁の電卓を使って、8桁×8桁の計算が頭位から出来る。

小学校で数と計算を行うなか、式指導の決まりを見つ
けていく良さを見いだしていく試み。
小中連携、中高連携の視点

この意味で、小学校の内容も中高で学び直すことが
重要な意味を持つ。

$11 \times 11 = 121$
 $111 \times 111 = 12321$
 $1111 \times 1111 = 1234321$
・・・
 $1111111 \times 1111111 = 12345654321$

$$\begin{array}{r} 111 \quad 111 \\ \times 111 \quad 111 \\ \hline 12321012321 \\ 12321 \\ 12321 \\ \hline 1234565431 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7654 \ 7894 \\ \times \quad 4567 \ 3456 \\ \hline 34955818 \ 27281664 \\ 3605 \ 18980000 \\ 2645 \ 22240000 \\ \hline 34962068 \ 68501664 \end{array}$$

11

素朴な疑問から決まりを見つける道具としてのEXCEL

自動車のナンバーをみていると、7171、9797 など同じ2桁の数が並んでいるナンバーがある。
これは、素数でないことはすぐに分かる。 $7171=71 \times 101$ 、 $9797=97 \times 101$
では、101は素数か？ これは、比較的容易に、素数と分かる。

そのうち、次の様なナンバーが目につく。7117、9779 同じ数だが、ひっくり返っている。
 $7117=71 \times 100 + 17 = 71 \times 1001$ 、同様に、 $9779=97 \times 1001$
ここで、同じように、1001は素数か？ との素朴な疑問がわく。このようなときは、基数モデルを使い。
1001は、(10)が100、(1)が1から、(100)から1個(1)へ移して、(100)が99、(1)が11、
 $1001=91 \times 11$

ここから、更なる素朴な疑問がでる。10001、100001・・・は素数か？ EXCELをつかって約数を探すと、

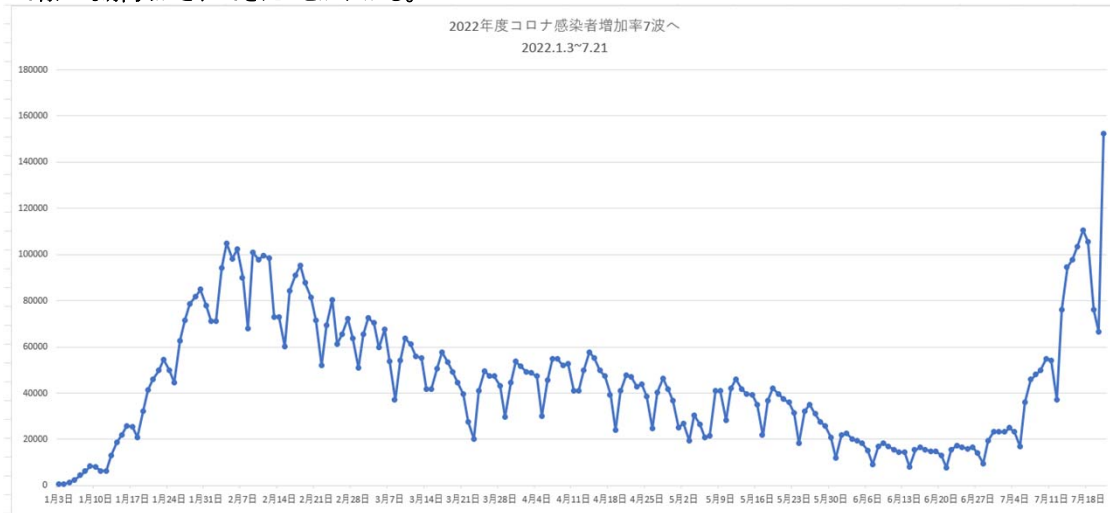
1101=		
21001=	11*91	=11*7*13
310001=	73*137	
4100001=	11*9091	
51000001=	101*9901	
610000001=	11*909091	
7100000001=	17*5882353	
81000000001=	11*90909091	=11*7*13*19*52579

この種の問題は、日常生活
の場で数多く見受けられる。

今日の算数・数学教育では、
図書館や書店に行っても、
算数自体、数学自体の書物は
殆ど見あたらない。あったと
しても、現代化の頃の1990年
～2000年頃のものとなってい
る。算数・数学の中身につい
ての教育的議論が必要である。

12

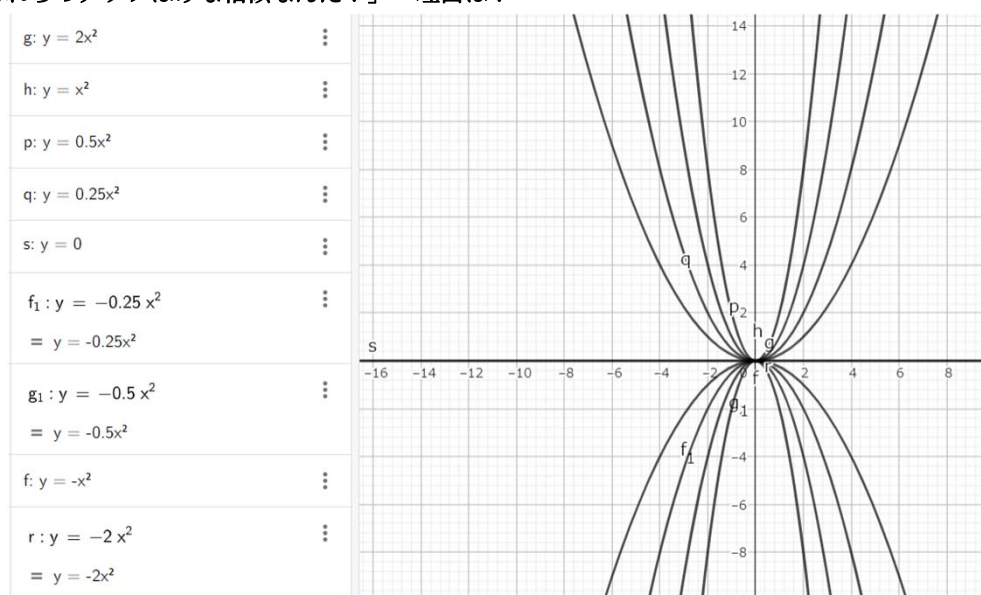
(b) 日常の新聞記事、TVから専門家の見解を聞いて、それを正しいとして伝え合うだけでなく、自信がなくとも、自分なりの視点でデータを(EXCEL等を使い)読み取り、解釈しPBL、自立協働学習へつなげる教育が求められる。以下の事例は、当時の朝日新聞の記事にあった資料からEXCELを使って作ったグラフである。ここから、取り込む時期によって様々な解釈がされてきたことがわかる。



13

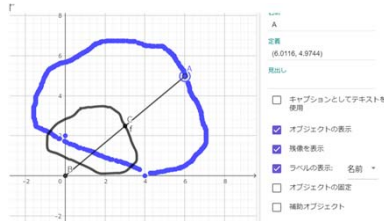
2次曲線 $y=ax^2$ のグラフをgeogebraを使って自由に書かせる。そこから生ずる素朴な疑問について、自立協働して、探究的に取り組ませる。

「これらのグラフはみな相似なんだ？」 理由は？



14

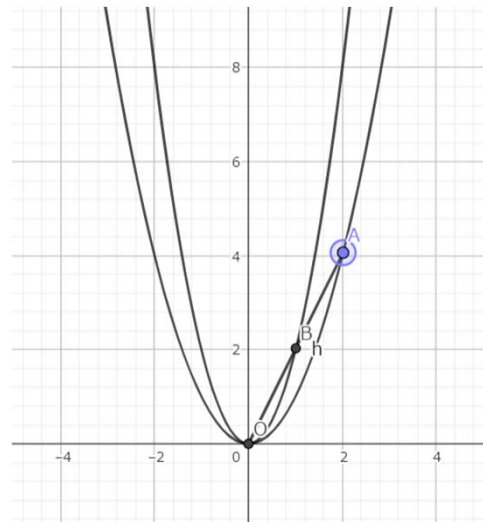
Geogebra を使って、体感的、体験的に確かめる。



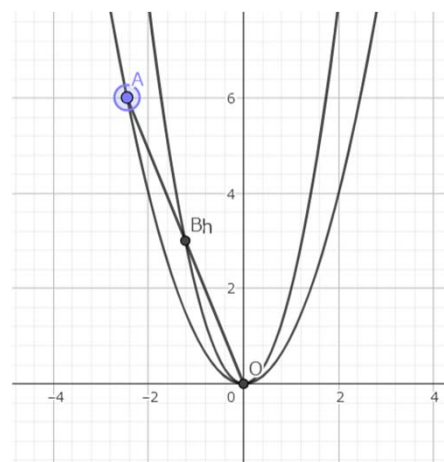
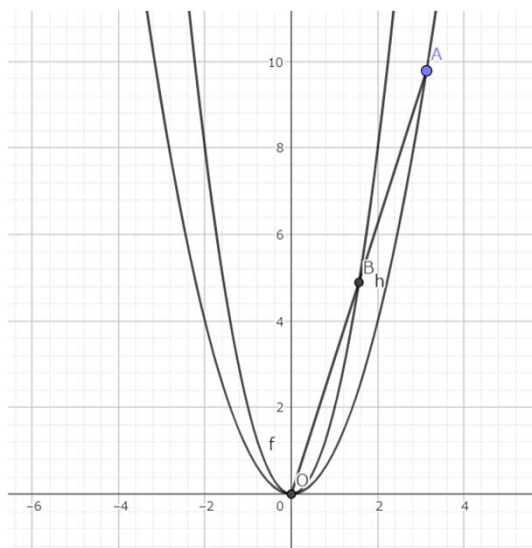
Geogebraでは、手書きの曲線図形を一定の比率に拡大・縮小した図を描くことが出来る。

この場合は、放物線なので、より簡単に作図で確かめられる。
2つの放物線、 $y=x^2$ と $y=2x^2$ のグラフを描く。
放物線 $y=x^2$ のグラフ上に点Aをとる(オブジェクト上の点)
そして、線分OAの中点Bをとり、点Aを放物線 $y=x^2$ のグラフ上を動かしていくと、点Bはどうなるだろうか？

確かめてみると、点Bは常に放物線 $y=2x^2$ のグラフ上を動いていることが確認出来る。



15



16

9

「数学教育の現代化」を日本型社会へ受け入れるために育てられた教育観・教材の見直し

今まで、数1、数2の学習で終わっていた高校生に対し、第4次産業革命下を生きる一般市民としての基礎教養として、例えば以下の内容を、体験的、体感的、直感的なExperimental Mathematicsとして教えられないか？ 詳しくは、2025年度春季年会中学校部会の町田の発表にゆずる。

写像概念、3次元空間の幾何、曲線図形、行列

相似変換、affine変換、射影変換

事例 中学校向け「影の幾何」(1979年)

第4次産業革命下で求められる数学

ビッグデータ処理、時系列データの分析、データサイエンス

19

第4産業革命期に応ずる教育の実現のために、あらためて、第3次産業革命下における教育改革としての「数学教育の現代化」で採用された、以下の「らせん型教育課程の理論」の見直しを検討する必要がある。異なるところは、当時は、構造主義的な思想の元で行われていたのに対し、今回は、より現実との関わり、社会との関わり、デジタル機器との関わりを重視する、体験・体感的、認知的、Experimental Mathematicsとしての教育の実現が求められている。

この思想がカリキュラム開発として実現されるときに次の「らせん型教育課程」(Spiral Curriculum)がある。

ブルーナは1961年度出版の「教育の過程」で以下のように述べている。

「もし、数、量、確率の理解が科学の探究に重要であるというのであれば、これらの事柄を子どもの思考様式に一致させるようにして、できるだけ知的性格をそのままに保ち、また できるだけ速く教え始めなければならない。それらの題材は後の学年になって、さらに 一度も二度も繰り返し展開されなければならない。

こうした考えを再度見直し検討する必要がある。

20

具体的な研究課題としては、2015年～2017年の学会課題SG(11)から取り上げてみると、

- ① Data Driven社会を生きる力の育成
- ② 理科教育と数学教育の連携を考える
- ③ コンピュータを傍らに置いて行う数学実験と観察 —Computational Thinking—
- ④ 体感的数学教育論の展開 —Theory of Experimencing Mathematics Education
- ⑤ 事例研究： サッカーボールを作ろう
—操作的に体感できる教材の実証事例—

参考・引用文献

- (1) 角山 栄「産業革命の群像 —現代社会の原点を探る—」、清水書院、昭和53年(1978)
- (2) 角山 栄「生活の世界史10—産業革命と民衆—」、河出書房新社、昭和57年(1982)
- (3) 宮沢康人「世界の子どもの歴史6—産業革命期」 第一法規出版、1985
- (4) 町田彰一郎「日本の『数学教育』の源流を探る— 21世紀の変容を乗り越える『教育』のために」、創英社/三省堂書店、平成28年(2017)
- (5) 町田彰一郎「なぜ。その人は「計算」が「速い」のか?」、東洋館出版社、平成18年(2007)
- (6) 町田彰一郎、長嶋 清「教育DX(デジタル・トランスフォーメーション)の時代—これにどう対処したらよいか —「数と計算」の事例研究に向けて—」、新しい算数研究12月号「特集:DXへの対応、授業スタイルの転換を軸に据え直す」、58-61、東洋館出版社、2024
- (7) 町田彰一郎「変容期を生きる児童・生徒のための算数・数学 —小・中・高の教育現場、教員養成系大学に向けて—」東洋館出版社、2025.3

第9回数学教育学会教員講習会 2023.8.20

学校現場での教育研究の 実践的方法について ー繰り下がりのある引き算を例にー

守屋誠司

元公立小学校・中学校教諭, 京都教育大学名誉教授,
数学教育学会事務局長・会長代行

1

数学教育学会名誉会長
横地清先生

2022年12月10日歿 行年100歳



2

ご冥福をお祈りいたします



3

小学校3年生



4

数学教育研究の目的

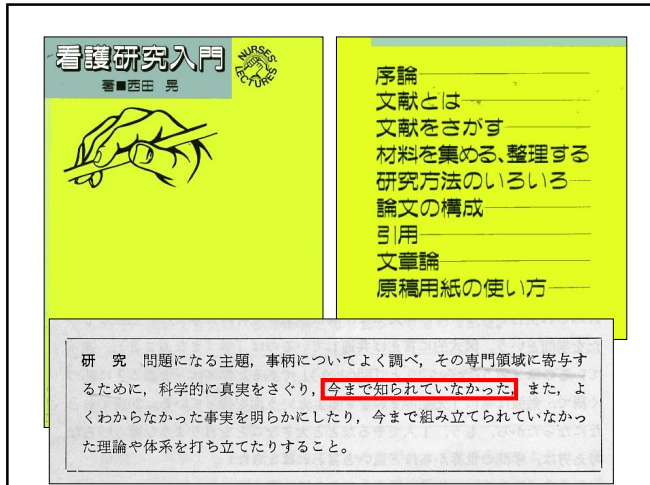
- 数学教育学の構築に寄与する。
 - 横地(2002)は、「『数学教育学を学問的に構築する』とは、『数学教育学の研究領域を体系化し、各領域の研究を深化していくことだ』としている。
 - 横地清(2002)「研究の足場固めを考える」数学教育学会誌2001/Vol.42/N0.1/2, 1-2
- 数学教育研究は、学習者に戻る、実践に還元される仕事であることを肝に銘じる。
 - →研究のための研究は△であろう。
- 数学教育学は、社会的に制約された現場における臨床的な教育方法を創造する学問である上に、教育目的・目標や教育内容、教材を創造することも含まれている学問である。
 - そのため、数学教育学では、カリキュラム、教育制度、教員養成、数学史・数学教育史、比較教育、認知論、幼児教育、特別支援教育等の研究が含まれる学問である。
 - 参考文献：向後千春(2019)「インストラクションデザイン研究の方法論」日本教育工学会論文誌43巻3号 207-214
- 数学教育研究は、常に教育をより良くしようという目的追求がある研究である。そのためには、原因追及的研究も行う必要がある。

5

学校現場での教材研究の課題

- 研究とは何をするのか、どう研究するのか？
 - 実践的な研究方法の勉強をしてきていない

6



7

学校現場での教材研究の課題

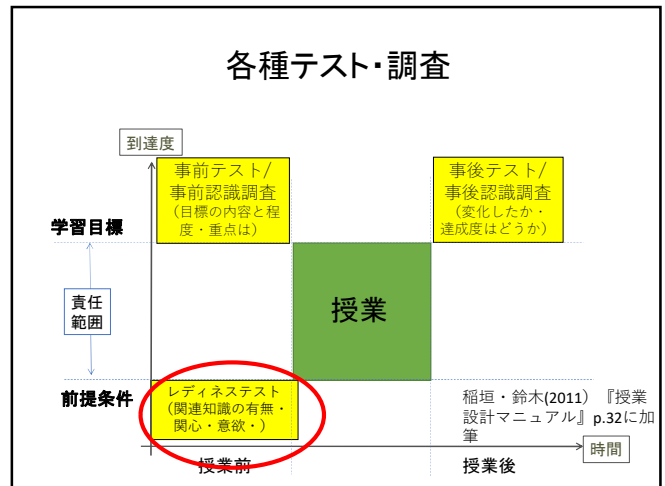
- 研究とは何をするのか、どう研究するのか？
 - 実践的な研究方法の勉強をしてきていない
- 校内研究での授業研究の形骸化？
 - 教科書会社作成の教師用指導書のコピーでは
- 子どもたちの教材に対する認識は？
 - 子どもが持っている能力の過小評価につながる
- 先行研究・実践の調査は？
 - 誰かが良い指導方法や課題を発見しているのでは
- 成果と課題を明らかにする授業分析とそれらの蓄積をしているか？
 - 追授業ができるほど詳しく
 - 他の人の教育実践に役立つ知見の記述がしてあるか？
- 授業の目標と研究の目的は違う！

8

実践的研究の実施とまとめ方

- 蓄積性、汎用性、普遍性、敷衍性を目指した**再現性**が必要である。
- 先行研究・実践**を精査(1960年1970年代まで遡る)・精読することでこれまでの成果と残された課題を明らかにして、研究・実践の目的と位置づけをハッキリと示す。
- 学習者が持つ当該課題に関連する**認識**を明らかにする。
- 対象者が数人の教育実験や、クラス単位の教育実践を通して、**実証的**に行う。
- 実験・実践の内容を、他者が**再現**できるほどに詳しく記述する。
- 実験・実践の成果を学習者の**作品**や**レポート**の資料と事後テスト等により**数値データ**を示す。
- 実験・実践結果を**考察**して、解決できた点と残された課題を**知見**として示す。
- 次に実践する先生や研究者のために、学習指導案でも**参考・引用文献**を明記する。

9



10

レディネステスト

- 関連する既習事項の取得状況の調査
 - 最低限身に付けている知識と技能
 - 全体と個人別
 - 知識や技能が中心
- 関心・意欲・態度の状況

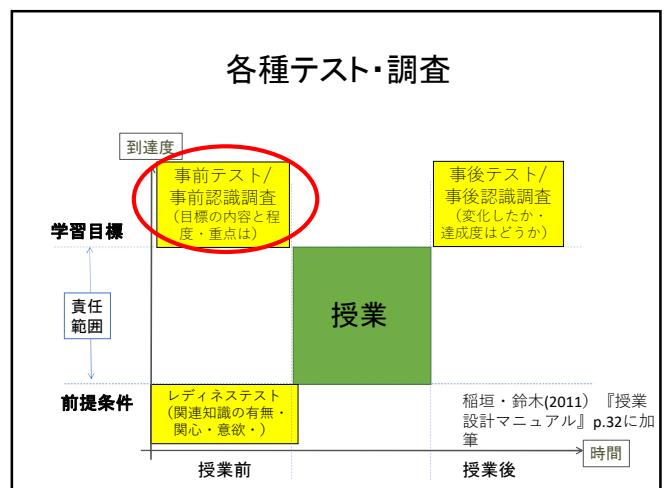
➡

- **指導計画、指導方法に生かす。**
 - 教科書の内容に沿う。

• これでは不十分である。

- すでに何を知っているのか、できるのかが不明である。

11

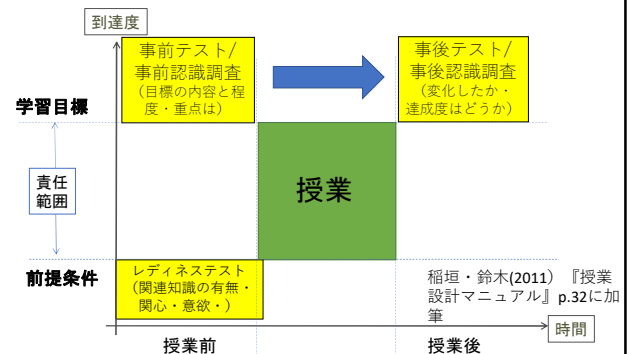


12

認識調査・事前テスト

- これから扱う内容についての調査 ←→ レディネステスト
 - どのように認識しているか？
 - 広さ...渦巻き、川の広さ、グラウンドの広さ、体育館の広さ
 - すでにどのくらい理解しているのか、できるのか？
 - 素朴な概念、誤認識
 - 調査・テストレベルは事後テストのレベルと同じに
- 教材をより深く理解できる。
 - 教育的意義、先行研究、指導困難点、つまづきの把握
 - 成果と課題の内容
- 目標設定、内容選定、指導計画に生かせる。
- 教材選定、指導方法に生かせる。
- 評価に生かせる。
 - 授業前後を比べて伸びの様子を調べられる。
 - 自身の授業方法や教材研究にフィードバックできる。

各種テスト・調査



13

14



15

研究の目的

- ブロック操作を伴わない図表現による思考活動の可能性を探る。
- 繰り下がりのある引き算までの指導改善点を検討する。

研究の方法

- 事前調査の実施
- 比較学級を使った足し算の実験的授業
- 引き算の教育実践
- 形成的評価と事後調査の実施

16

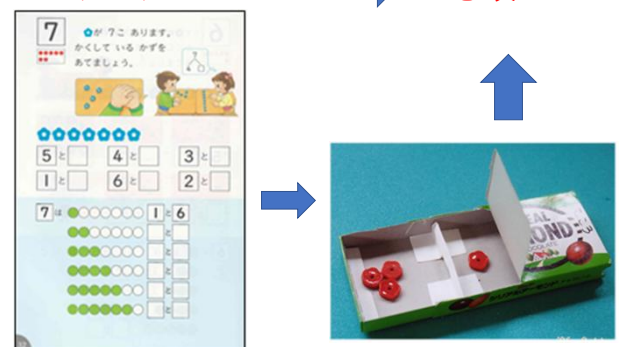
指導方針

- 方針Ⅰ**：既習の1位同士の加法と減法の計算技能習得をまず徹底させる。
- 方針Ⅱ**：ブロック操作は採り入れず、具体物を提示して、それを図で表現させて考えさせる。最後に図と具体物に対応させて振り返る。これにより、**具体と抽象との行き来**を確実にさせる。
- 方針Ⅲ**：解答した式・答えを当初の問題に対応させて、正しいかを検討・確認させる。これは、**数学的モデリング**を志向した文章題指導を意識している。
- 方針Ⅳ**：教師が個人解決での様々な結果をi-Padで撮り込み、それを全体解決の一斉授業の中で子供が電子黒板を使い発表・説明して、皆で確認するという授業形態を採る。これは、ICT利用の効果的成果を確認するためである。

17

数の分解と合成での指導上の課題

9名（36%）が指を使う → 念頭で



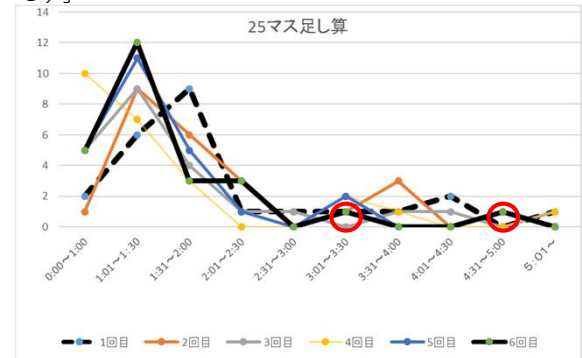
18

分解と合成の指導事例



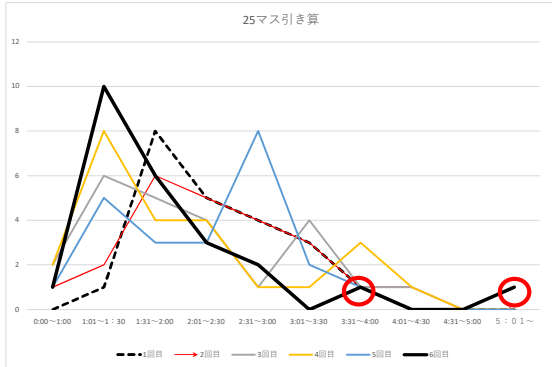
19

1位数+1位数の実態（スピード） 9月



20

1位数-1位数の実態（スピード） 9月



21

繰り上がりのある足し算の実態 (9月)

問題	正解率
④ 9 にんで あそんで います。そ こへ 3 にん きました。みんな なんにんに なりましたか。 しき こたえ □にん	(未習内容) 式 96% 答 84%
⑤ 9+3 の けいさんの しかたを ずやことばで せつめいししょう。	(未習内容) 64% 9 個の○にその まま 3 個の○を 足す図

かなりでき
る！

数え足し

22

繰り下がりのある引き算の実態 (9月)

問題	正答率
① ひきさんをしましょう。 ⑦ 14-8	⑦80% (未習内容)
② □にかずをかきましょう。 ④ 12から4をひくと、□に なります。	④72% (未習内容)
④ 12 にんで あそんで いま す。9 にんかえりました。の こりは、なんにんに なり ましたか。	(未習内容) 式 80% 答え 68%
⑤ 14-8 のけいさんのしかた を、ずやことばでせつめいし しょう。	(未習内容) ○ 80% × 20% (内 2 名無答)

かなりでき
る！

数え引き

10の塊を意識させる意図的指導が必要

23

比較実験授業

ーブロック操作と図表現についてー

➤ A クラス

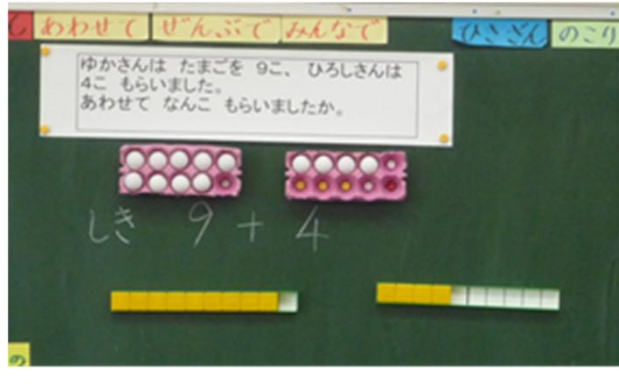
文章題→具体物→立式→**ブロック操作**→図表現→解答

➤ B クラス（実験クラス）

文章題→具体物→立式→図表現→解答

24

A クラス（一般）の導入

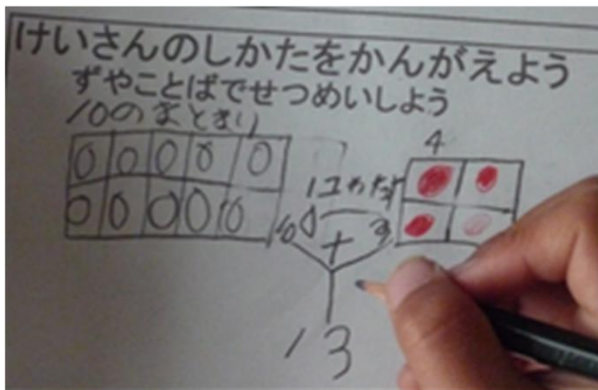


25

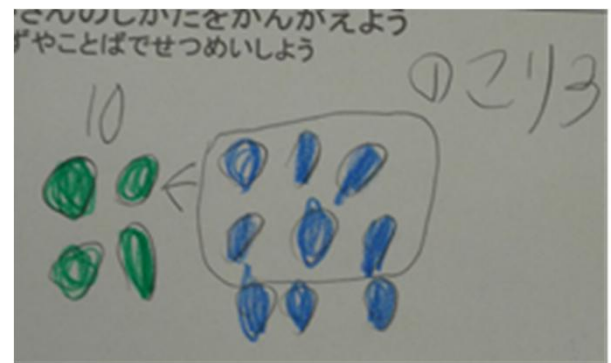
B クラス（実験）の導入



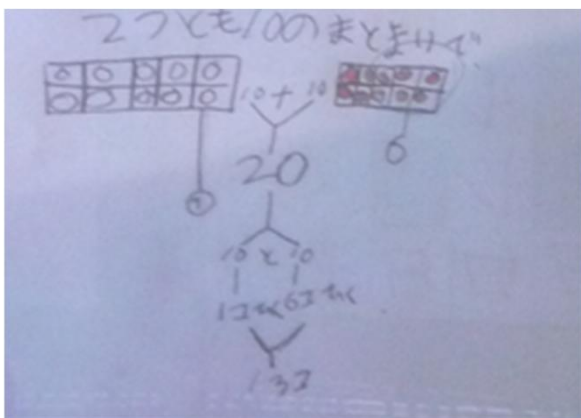
26



27



28



29

比較実験の結果

A クラス

- ブロック操作の「動かす」という行為を図表現できない。
 - 操作時と図表限時にタイムラグがあるため、
 - どのように操作したか忘れる。
 - 操作して解決できたため、図表現の興味が薄い。
- 課題確認→念頭イメージ→ブロック操作→図表現という流れで、思考の継続が途切れてしまう。
- 他の方法に対する興味は乏しい。

B クラス

- 具体から直接に図へ抽象化し、それを具体に戻すという一連の流れで、思考を中断すること無しで解決できる。
- 思考時間が十分に取れ、いろいろな方法を考えられる。
- 他の子がどんな図式をかくかに、興味を持って参加している

30

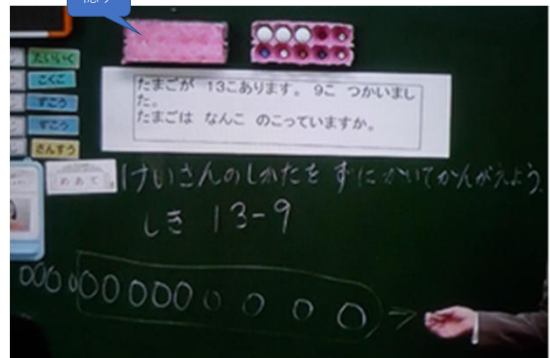
繰り下がりのある引き算の実際 (11月)

問題	正答率
① ひきさんをしましょう。 ⑦ $14-8$	⑦60% →73% (未習内容)
② □にかずをかきましょう。 ④ 12から4をひくと、□になります。	④72% →73% (未習内容)
④ 12にんで あそんで います。 9にんかえりました。の こりは、なんにんに になりましたか。	式 80% →92% 答え 68% →77%
⑤ $14-8$ のけいさんのしかたを、 ずやことばでせつめいしましょう。	(未習内容) ○ 80% →85% × 20% (内2名無答) →15% (内1名無答)

足し算の
指導が引
き算に生
かされる

31

繰り下がりのある引き算の実際 Bクラス



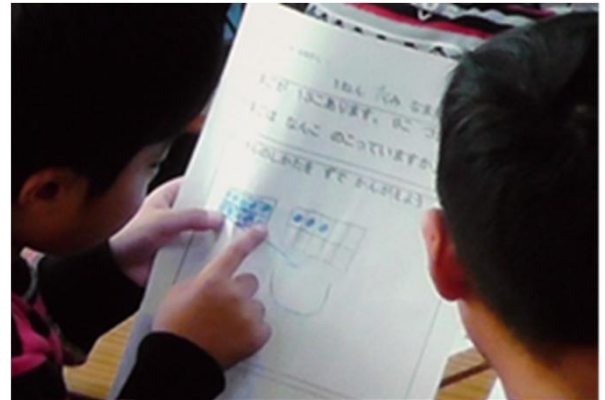
32

個人解決, i-Padの利用



33

ペアで説明



34

減減法

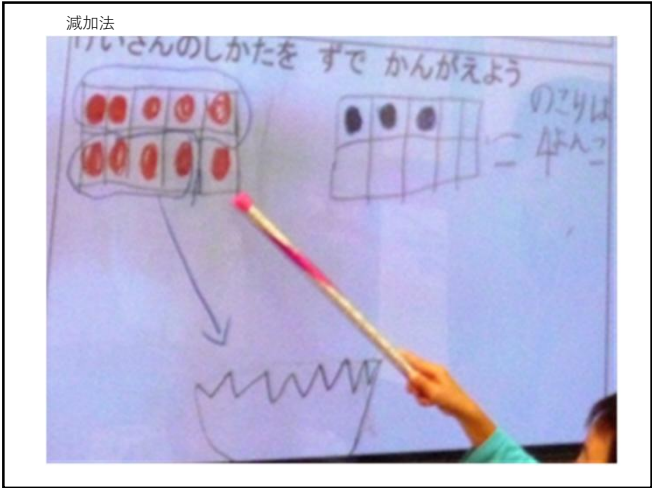


35

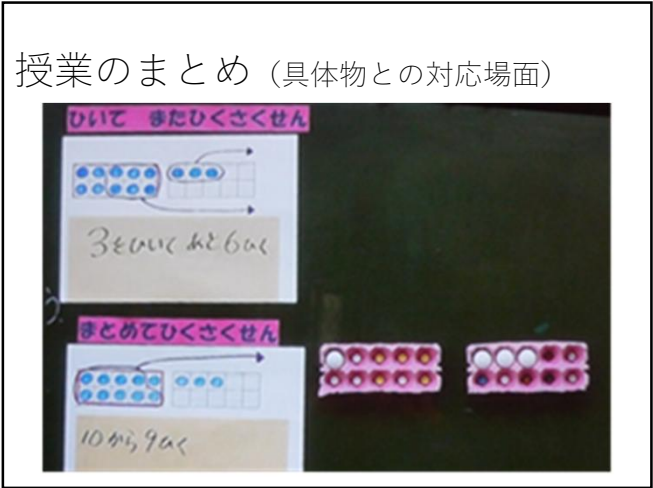
i-Padを使った確認のための説明



36



37

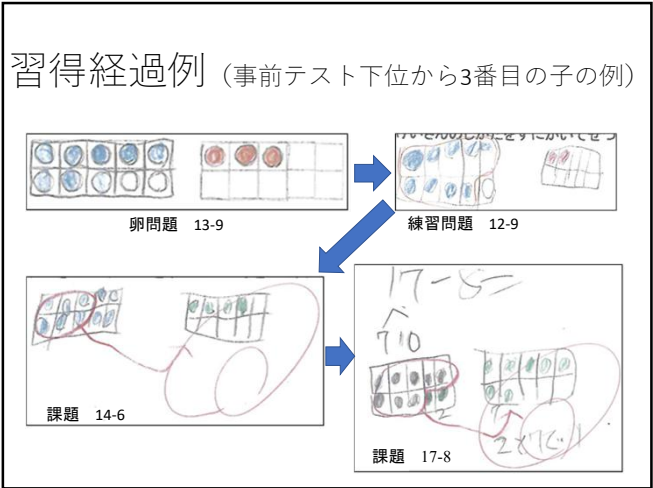


38

授業時間内での変化結果
(全体学習の効果)

		練習問題			
		減加	減減	他・×	計
導入卵問題	減加	9	5	3	17
	減減	4	2		6
	他・×	1	2		3
	計	14	9	3	26

39



40

市販テスト結果

技能と数学的思考方の合計(100点満点)

	100	90	80	75	65
人数	14	5	4	2	1

技能のみ(100点満点換算)

技能	100	90	80
人数	18	7	1

41

- 実践のまとめ
- I. 繰り下がりのある引き算修得の授業目標は達せられた。
 - II. 数の分解・合成の指導では、見えない数を考えて答えられるようになるまでしておく必要がある。これを怠ると、指使いによる計算からなかなか抜け出せず、計算が遅いという結果になる。それは、繰り上がり・繰り下がりのある加減まで影響を与える。
 - III. 指使いや計算の遅さは、2学期に入ってから、分解と合成の復習、計算練習によって一定の改善は見られる。
 - IV. 未習の繰り上がり・繰り下がり有加減とも、正答できる子供が多い。ただし、図表現を見ると、数え足しや数え引きで行っている。従って、単に解けるだけで無く、10のまとまりを意識させることを重点とした意図的な指導が必要である。

42

研究のまとめ

- I. 1年生の早い段階でも、図表現を指導すれば、**文章の意図を自分で図表現でき**、それに基づいて立式、解答できることが示された。
- II. ブロックによる操作は必ずしも必要では無く、むしろ操作することで思考を中断させている可能性がある。それよりは、同じ半具体物としての図を使う方が、**思考に集中**でき、**多様な方法**を考えられそれを出出もできる。
- III. i-Padと電子黒板を使って子供の描いた図をそのまま表現し、それを子供に**発表させる**授業方法により、他の子の方法を理解し、さらに、**自分の考えに取り入れる**ことが確認できた。
- IV. ICTを使った**発表会の有効性**が検証できたが、その基は図表現による**同じ土俵**での思考活動が源で重要となる。

43

学校現場での教材研究

- 研究とは何をするのか、どう研究するのか？
 - 実践的な研究方法の**勉強**をする。
- 校内研究での授業研究の形骸化？
 - 教科書会社作成の教師用指導書のコピペではなく、**独自性**を出す。
- 子どもたちの教材に対する認識は？
 - 子どもが持っている能力の過小評価から、**実態を把握**が優先
- 先行研究・実践の調査は？
 - 誰かが良い指導方法や課題を発見しているかを**調べる**。
- 成果と課題を明らかにする授業分析と蓄積があるか？
 - **追授業**ができるほど詳しく書く
 - 他の人の教育実践に役立つ知見の記述がしてあるか？ **修正指導案**
- 授業**目標**と研究**目的**は**違う**！
- 研究には**訓練**が必要！
 - **卒論作成で基礎**を学び、**現場経験**を積み、**大学院や研究会**等で学び直すことで成長する。

44

指導要領を越えた発展的な研究

- 文字（式）は何年生から使えるのか？
- 図形教育はこれで良いのか？
- 論証幾何は何年生からできるのか？
- 明治に引きずられた内容
 - 初等教育 → すぐに社会に出る庶民のため
 - 中等教育 → エリート、準エリートのため
 - 文字（式）や論証は中等教育で、庶民に要らない
 - 割合は初等教育で、歩合の理解はすぐに必要だった
- 新しく整った数学内容の集合や論理、離散数学、情報数学はどう教えるのか？

45

ご清聴を有り難うございました。

第9回数学教育学会教員講習会 2023.8.20

学校現場での教育研究の 実践的方法について ー 繰り下がりのある引き算を例にー

守屋誠司

元公立小学校・中学校教諭、京都教育大学名誉教授、
数学教育学会事務局長・会長代理

46

OS 次世代の数学教育を担う教員の養成-

何が問題なのか

京都教育大学名誉教授 守屋誠司

seijimoriya@hotmail.co.jp

概要：学校の現場での算数・数学指導は、児童・生徒同士のディスカッションもあり、丁寧に行われている。文科省が推薦する授業が実現されつつある。しかしながら、そこには看過できない問題が潜んでいる。1) 算数・数学は教科書どおり教える教科になっている。2) 実験や実測など、児童・生徒の体験的学習が不十分である。3) PC は提示教具と練習問題発生装置。4) 算数指導は誰でもできるという自信。5) 事前の学力や認識の調査がされずに指導計画が先行する。6) 数学内容が理解できたかにあまり関心が無い。7) そもそも何のために算数・数学を指導するのか深く考えていない。等があるが、まとめると、数学教育学の存在とその中での算数・数学指導という視点が欠如した数学教育観となってしまった。

検索語：数学教育学, 数学観, 教員養成

1. はじめに

今年度 4 月より放課後の学童保育の支援員として、また 6 月よりは小学校で非常勤講師も務めている。実験授業などで数時間の授業を行ったことはあるが、38 年ぶりで小学校現場に入り職員室で他の先生方と机を並べて、中学年に図工と書写を教えている。現代の教室環境はオープンなので、算数の授業も垣間見える。私が現職であった昭和 55 年～61 年のころとの授業の違いや、教員が忙しい理由も少しずつ分かってきた。その一端を紹介して、今後の教員養成と内容について述べたい。

2. 学校現場の実際

先ず、総じて言えば、先生方は、従順・真面であり、板書も丁寧、発問や説明、子供同士のディスカッションの方法もしっかりしている。教科書を教えることに関しては、若い先生方も指導が上手である。このように教科書に則り、昨今の文科省が目指している方針に従った授業が日々展開していると思われる。図工と書写の素人教員である私には、教科書は元より、教科書会社が用意した赤本や教員用指導書・資料・プリント類、豊富な動画が含まれるデジタル教科書や Web 動画は、強い味方である。至れり尽くせりで、私でもまあまあの授業が出来そうな気がしている。

算数指導に関しての知識や経験が少ない若い先生方も、一定水準のそれなりの授業が出来る環境が 38 年前と比べて整っている。このような学校

環境整備と一定水準の教員の養成を目指してきたので、文科省が望む教員養成は成功していると言っている。しかし、この状況を、10 年前に鈴木 (2014) は、「教員養成は AI を掲載したマネキンロボットの製造を目的になされているのではない」と痛烈に批判し、本来の教員養成を示している。

次に、教員の勤務実態はどうであろうか。山梨県では、週当たりの授業持ち時間を減らして、全体に働き改革が進行中である。さらに 25 人学級の少人数学級制度が 4 学年まで実施された。高学年の教科担任加配や TT 加配、また、特別支援学級の増設と教員の加配と、昭和とは違い、手厚い指導体制が整っている。それでも、教師が足りず、私のような年寄りでも手伝って欲しいと懇願される。昭和 60 年には、3 年生で週 27 時間授業があり、担任がすべて持ったが、今は、週 24 時間にするため、週 3 時間分を担任以外が持つ。それでも、忙しいそうである。

忙しい原因は、教科指導ではなく、それ以外の精神的に疲れる内容に時間を割かなければならない実態かと考えられる。昭和時代は、教師は聖職で、先生の言うことが正しいと、保護者からも信頼され尊敬されていた。教師は、雑音を気にしないでよく、教科指導に専念でき、割と自由に授業内容や方法を工夫できるという精神的余裕があった。現在はそれが少ないため、授業実施以上に精神的な疲労感があると思われる。

このように、忙しいという実態は存在するものの

徐々に改善され、授業への援助・支援は相当に厚くなっているのが今日である。しかしながら、やっぱり算数指導では問題を感じざるを得ない。問題点を上げれば、

- 1) 教材の意味をきちんと理解しているのか。
児童は、何のためにそれを学ぶのか、学ぶ前と学んだ後で何がどう変わるのか。評価。
- 2) 黒板等の説明で理解させられると信じているのではないか。実験や体験は必要ないのか。
- 3) 子どもの既習知識の有無とその状態、認識といった実態を調べて、授業設計をしていないのではないか。
- 4) 教師は自信をもって正答を教えられるため、算数は指導しやすい教科との勘違いをしているのではないか。

3. どうすればよいのか

1) 大学担当教員と講義時間数を増やす。

以前は大学院設置の構成上、数学教育の専任教員は2名必要だった。現在は1名でも良く、非常勤で穴埋めをしている大学が多いと聞く。専任が講義内容と卒業生の質に対して責任を持って教員養成をする必要がある。

大学の小学校教員養成課程では、大学によって呼び方は違うが、算数のバックになっている数学を中心とする科目「算数」(半期90分15回、2単位)と教育内容の説明とその指導方法を中心とする科目「算数科指導法」(半期90分15回、2単位)があり、両方とも必修となっている。小学校で他教科と比べ指導時間が圧倒的に少ない家庭科と同じ時間数で、算数科を指導できる教員を養成したことになるのは悪しき教科平等主義である。

昭和50年代の山梨大学の小学校教員養成課程では、算数が通年で3単位、指導法が通年で2単位であった。小学校課程の全員が、現行の倍の2年間、算数科指導関係科目を学んだことになる。

中・高教員免許に必要な数学の内容も図1のように減ってきた。また、演習は1単位から2単位科目となっている。大学卒業単位も昭和51年時代の140単位から現在は124単位になった。

このような状態で卒業するわけなので、4月から一人前に算数・数学を教えられることは期待できない。しかし、前節で紹介したように指導のためのツールは充実しており、大学で模擬授業を散々やつ

	S51年	S63改定(H2年から)	H10改定(H12年から)
中学校	代数学 4	代数学 6又は4	代数学 1以上
	幾何学 4	幾何学 6又は4	幾何学 1以上
	解析学 4	解析学 4	解析学 1以上
	統計学 2	確率論/統計学 4又は2	確率論/統計学 1以上
	測量 2	コンピュータ 2	コンピュータ 1以上
	16 1級免許 32	20 専修, 1級免許 40	20 専修, 1級免許 20
高校	代数学 6又は4	代数学 6又は4	代数学 1以上
	幾何学 6又は4	幾何学 6又は4	幾何学 1以上
	解析学 6又は4	解析学 6又は4	解析学 1以上
	統計学/測量 2	確率論/統計学 4又は2	確率論/統計学 1以上
	16 2級免許 32	20 専修, 1級免許 40	20 専修, 1級免許 20
	演習1単位時代 高校1級は院卒	演習1から2単位へ 専修免許導入	演習2単位時代 教科以外を充実

図1 教員免許に必要な教科専門科目の推移

ているため、教科書をそれなりに教えることは可能であろう。ただ、術ではない部分の不足や新規採用者の離職が増えていることもあり、原則担任は持たせず、副担任や専科教員にしているという。

2) 数学教育学を指導する。

教員養成を専門とする大学のある教員に、数学教育学は大学院になってから学ぶという趣旨の論文がある。学部では術に近い指導法を学び、大学院で初めて「学」を知るということである。医者が医学を知らずに現場で診察しているとは思えないが、教師は術だけで対応できるのだろうか。

先の山梨大学の場合、小学校の数学関係専修は、数学専修と数学科教育専修があり、前者は中・高教員課程と同じ専門の数学を履修して卒業した。しかし、後者は、後で示す数学教育学関連科目を履修して卒業した。ただ、殆どの学生が中・高数学教員免許を取得したため、専門の数学も最低32単位は履修していた。この専修の指導では、数学教育学会創設者で世話人の加藤国雄氏、横地清氏の2名が、入学時からゼミ・卒論までの4年間の指導教官だったため、今思えば、有難いことに学部時代から数学教育学を叩き込まれていたように思われる。授業科目は以下である。

通年で初等数学科教育概論(2単位)と中等数学科教育法(3単位)、初等数学科指導法(2単位)、中等数学科教育(3単位)、数学科教育学第一・第二(各2単位)小学校専門科目(算数)に相当する数学緒論第三(3単位)、数学科教育研究法(卒論ゼミ、4単位)があった。また、半期単位では、数学緒論第一・第二(各2単位)、数学教育史(2単位)、比較数学教育学(2単位)、数学学習の心理(2単位)、初等数学教育持論(1単位)、数学的認識論(2単位)、中等数学科教育特論(1単位)があった。

以上より、教員養成では、数学と、数学教育学として数学教育史、認知論、教育(教材)内容論、教

育方法論(指導案の作成とICT 利用を含む)を開講し履修させるべきである。

3) 数学的活動を体験させる。

玉川大学のスクーリングで、算数の15回(100分/回)は、数学教育学入門、数学教育史(終戦まで)、高学年車作り(二面角)、低学年ハンカチ模様(集合と演算)、高学年死海の面積(公式の利用とExcelの利用)、高学年トリックアート(比と空間)、高学年赤道型日時計(空間幾何・STEM)、中学年刺繍画(曲線と曲率)である。

指導法の15回の授業では、数学教育史(戦後から現在)、1年分解と合成(教科書の問題点と教具作り)、求差型減法(認知論的教材研究の方法)、中学年ミカンの表面積(体験的学習方法)、5年自分物差しで割合(つまずきの解決策・体験的学習)、規範授業動画の視聴と指導案の作成(教育方法論)を行う(詳しくは守屋(2008)参照)。

中等数学教育では、これらの内容を解析的に扱い、Excelを使って製作活動をする。

これらの講義は、学生が実際にジャガイモ切ったり、ケント紙に車の展開図を描いたりと演習や実習で、まず作業を体験し、その上で理論をテキストで学習させる。子供に作業や数学的活動を通して教えるというのが、教師はその経験を持っていない。そのため、どうしても、教科書を頼り、黒板とデジタル教科書で説明中心の授業になってしまうと考えられる。この種の講義を受講すると、多くの学生の算数・数学観や指導観が変わる。

4) 卒業後の継続的指導と教員研修を充実する。

ドイツバイエルン州では、守屋(2007)のように、州共通教員国家試験を行いそれに合格した者に教師の道が開かれる。この試験を州の大学教員が合同で作る。また、2年間の教員インターン修了試験にも大学教員が関わっている。このように、大学教員が卒業生と学校教員の質に責任を持つシステムである。大丈夫かな?と思う学生に、「教育的配慮」の下で単位を出している某国とは大いに違う。

横地氏と鈴木正彦氏は、学部を卒業しただけでは数学教育の力が付いていないと、山梨大学在職中に卒業生のためのゼミを毎月開催していた。時には毎週集まることもあった。

とん挫した教員研修制度の公開された研修内容は充実していたと思われるが、仕方なく参加した教員の参加意識と、修了試験があったものの形式的で参加しただけで合格していたのでは、実が上が

った参加者は少ないと予想される。そこで、横地・鈴木の実質的に有効である研修を体験させ、今まで自分が行ってきた算数科・数学科の教材観と指導観の変化を目指したい。

5) 教員免許状の区分を変える。

小学校高学年は専科とする。専科は、何回か同じ内容を指導する機会が多くなり、教材研究がしやすく、高学年数学教育の専門家に早くなれる。

図2の特徴として、免許の守備範囲には主と従があり、小学校高学年を担当する教員は、様々な免許の取得者で構成される。現行学制で問題になっている小1プレブテムや中1ギャップを解消できるが、将来4,4,4制や複線系中等教育に学制が変更されたなら、こうならざるを得ない。

教科担任制の推進とともに義務教育高等部免許が現実には実質的になっている。

学年	校種	義務教育 初等部免許	義務教育 高等部免許	中等免許
12	高校			理学部数学科で養成
11				
10				
9	中学		教員養成系 大学で養成	
8				
7				
6	小学校			
5				
4		教員養成系 学部で養成		
3				
2				
1				
k	こども園			

図2 教員免許と守備範囲、養成機関の案
(濃い色は主担当、薄い色は従担当範囲を示す)

付記:本研究は、ISPS 科研費 22K02530 の助成を受けたものである。

参考・引用文献

- [1] 守屋誠司, 「ドイツの文化環境と教育制度から示唆される日本の数学教育の課題」, 京都教育大学「教育実践研究紀要」2007第7号, 2007, 21-30
<https://www.kyokyo-u.ac.jp/Cece/7-3.pdf>
- [2] 守屋誠司, 「算数・数学の授業力を持つ教員を育成する試み」, 京都教育大学「教育実践研究紀要」2008第8号, 2008, 1-10
<https://www.kyokyo-u.ac.jp/Cece/8-1.pdf>
- [3] 鈴木正彦, 「OS 小・中学校の教員養成に求められる数学教育」, 2014 年度数学教育学会春季年会発表論文集, 2014, 170-171
- [4] 守屋誠司, OS 小・中学校の教員養成に求められる数学教育「小・中学校の数学教育を支える教員養成について」, 上掲[3], 172-174

OS次世代の数学教育を担う教員の養成 －何が問題なのか－

京都教育大学名誉教授 守屋誠司

seijimoriya@hotmail.co.jp

1

学校現場の 実際(1)

先生：従順・真面であり、板書も丁寧、発問や説明、子供同士のディスカッションの方法もしっかりしている。

教科書を教えることに関して、若い先生方も指導が上手である。一定水準のそれなりの授業が出来る

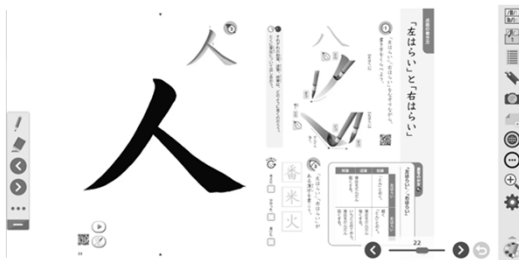
・教科書会社が用意した赤本や教員用指導書・資料・プリント類、豊富な動画が含まれるデジタル教科書やWeb動画

文科省が望む教員養成は成功している

鈴木(2014)「教員養成はAIを掲載したマネキンロボットの製造を目的になされているのではない」

2

デジタル教科書例



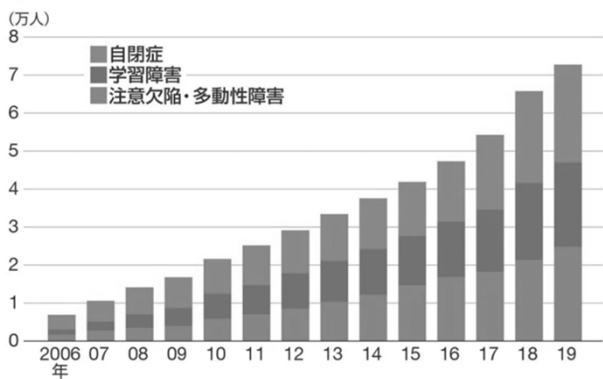
3

学校現場の 実際(2)

- ・25人学級(山梨県4学年まで)
- ・専科指導・TT加配, 特別支援級の増設と専任教員の加配, 支援員
- ・3学年: 週27時間→週24時間に
- ・1980年代: 教科指導に専念→自由に授業内容や方法を工夫できる
- ・現在: 授業実施以上に精神的な疲労感がある
 - ・10%の?児 自由気まま

4

発達障害の児童生徒は13年で10倍に



5

学校現場の 実際(3)

教材の意味をきちっと理解しているのか。児童は、何のためにそれを学ぶのか、学ぶ前と学んだ後で何がどう変わるのか。評価は。

黒板等の説明で理解させられると信じているのではない。実験や体験は必要ないのか。

子どもの既習知識の有無とその状態、認識といった実態を調べて、授業設計をしていないのではない。

教師は自信をもって正答を教えられるため、算数は指導しやすい教科との勘違いをしているのではない。

6

どうすれば
いいのか
(3)

- 大学担当教員を増やす。
- 算数・数学関係講義時間数を増やす。
- 数学教育学を指導する。
 - 数学教育史, 認知論, 教育(教材)内容論, 教育方法論(指導案の作成とICT利用を含む)
- 数学的活動を体験させる。
- 卒業後の継続的指導と教員研修を充実する。
- 教員免許状の区分を変える。

7

数学科教員免許に必要な教科専門科目
の推移

	S51年	S63改定(H2年から)	H10改定(H12年から)
中学校	代数学 4	代数学 6又は4	代数学 1以上
	幾何学 4	幾何学 6又は4	幾何学 1以上
	解析学 4	解析学 4	解析学 1以上
	統計学 2	確率論/統計学 4又は2	確率論/統計学 1以上
	測量 2	コンピュータ 2	コンピュータ 1以上
	16	20	20
高校	1級免許 32	専修, 1種免許 40	専修, 1種免許 20
	代数学 6又は4	代数学 6又は4	代数学 1以上
	幾何学 6又は4	幾何学 6又は4	幾何学 1以上
	解析学 6又は4	解析学 6又は4	解析学 1以上
	統計学/測量 2	確率論/統計学 4又は2	確率論/統計学 1以上
	20	20	20
演習1単位時代 高校1綱は院卒	2級免許 32	専修, 1種免許 40	専修, 1種免許 20
	演習1から2単位へ 専修免許導入	演習2単位時代 教科以外を充実	

8

1970年代の数学教育に関する科目
山梨大学教育学部小学校課程

- ◎初等数学科教育概論(教職科目の指導法にあたり演習の位置づけで, 通年2単位)
- ◎数学緒論Ⅰ・Ⅱ(小学校教科専門科目にあたり講義として半期それぞれ2単位), 数学緒論Ⅲ(Ⅰ・Ⅱと同様であるが講義・演習として, 通年3単位)
- 数学教育専修外は, ◎の2科目で4単位以上が必修、但し、半期3コマ～4コマ分

9

小学校課程数学教育専修必修

- 初等数学科学習法(通年2単位)
- 半期2単位の数学教育史, 比較数学教育学, 数学学習の心理, 数学的認識論, 集中講義で1単位の初等数学教育特論(川口廷東京学芸大学名誉教授が講師)
- 応用数学(半期2単位FORTRAN言語)
- 数学科教育研究法(卒論指導)

10

1970年代の数学教育に関する科目
山梨大学教育学部小学校課程数学教育専修の例

- 中高の数学の免許を取得のため、数学40単位を取得、さらに中等数学科教育法(通年3単位)、中等数学科教育特論(1単位)、数学科教育学第1・第2(各通年4単位)
- 一般教養として、通年4単位で数学、統計学
- 卒業生は、数学教育の専門家として県内の各地で算数・数学教育研究の中心的役割を果たしていた。

11

どうすれば
いいのか
(3)

- 大学担当教員を増やす。
- 算数・数学関係講義時間数を増やす。
- 数学教育学を指導する。
 - 数学教育史, 認知論, 教育(教材)内容論, 教育方法論(指導案の作成とICT利用を含む)
- 数学的活動を体験させる。
- 卒業後の継続的指導と教員研修を充実する。
- 教員免許状の区分を変える。

12

算数の15回
(100分/回)

数学教育学入門(概論)

数学教育史(和算から終戦まで)

高学年:死海の面積(公式の利用とExcelの利用,社会)

高学年:車作り(二面角と角度計測,展開図,図工)

低学年:ハンカチ模様(集合と演算,群論入門,図工)

高学年:赤道型時計(空間幾何,地理,理科)

中学年:刺繍画(作図,曲線と曲がり方)

高学年:トリックアート(比,空間,遠近法,図工)

13

指導法の15回
(100分/回)

数学教育史(戦後から現在)

1年:数の分解と合成(教科書の問題点と教具作り)

1年:求差型減法(認知論的教材研究の方法)

中学年:ミカンの表面積(体験的学習方法)

5年:自分物差しで割合(つまずきの解決策・体験的学習)

ICT利用の数学教育

規範授業動画の視聴と指導案の作成(教育方法論)

14

数の分解と合成



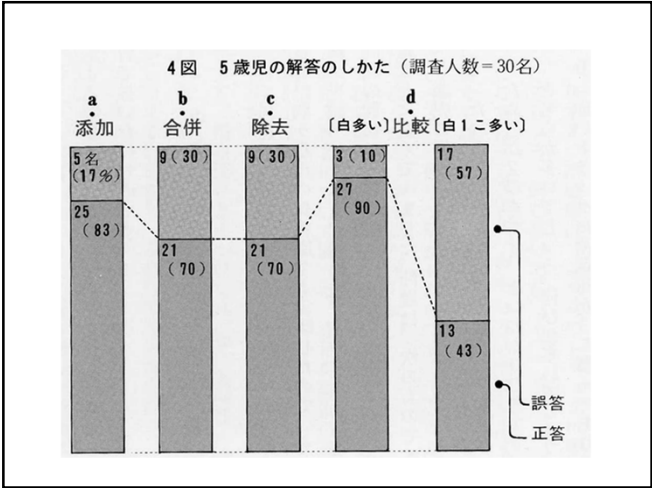
15

認識調査

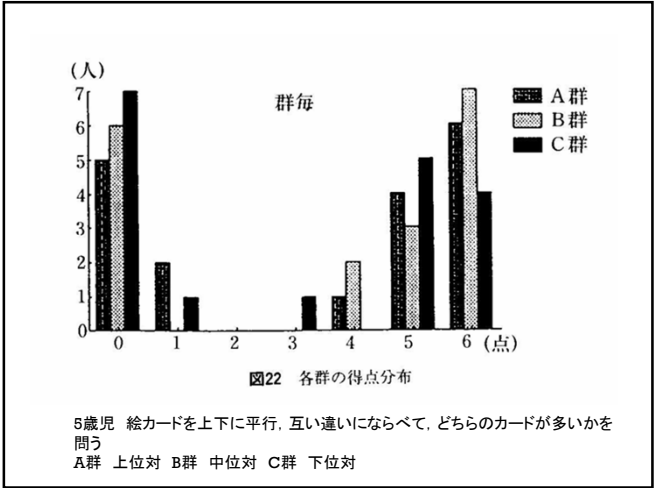
- 添加 猿が木に2こいました。また猿が5こやってきました。猿は全部で何個ですか。
- 合併 赤いリンゴが3こあります。黄色いリンゴが4こあります。赤いリンゴと黄色いリンゴをかごに入れました。みんなで何個ですか。
- 除去(求残) ケーキが箱に7こ入っています。2こ食べました。箱の中に何個残っていますか。
- 比較(求差) 白いウサギと黒いウサギが、野原で遊んでいます。白いウサギは7こです。黒いウサギは6こです。どちらが多いでしょう。いくつ多いでしょう。

- 横地清(1981)「保育百科」より

16



17



18

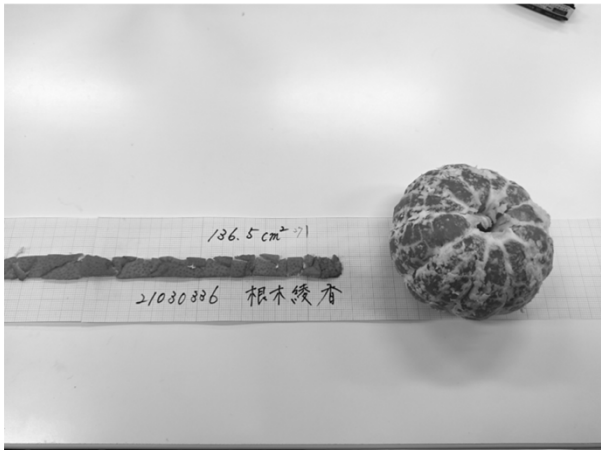
ミカンの表面積は？



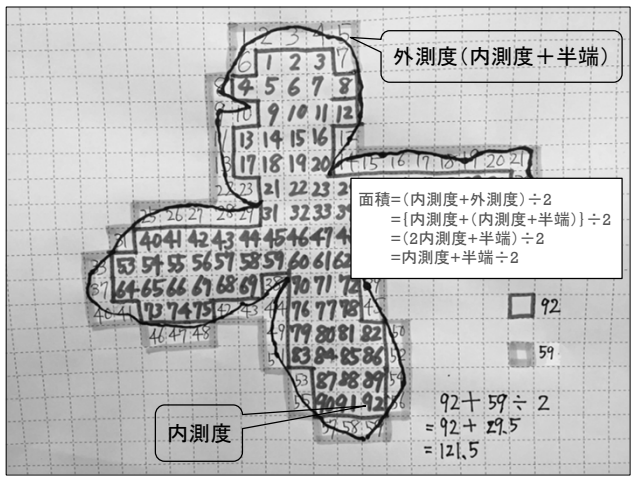
19



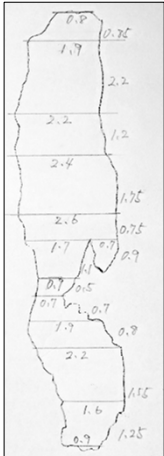
20



21



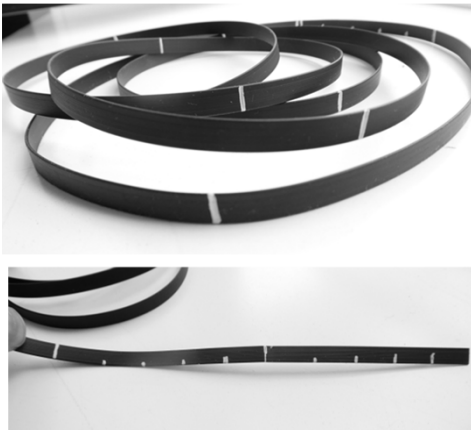
22



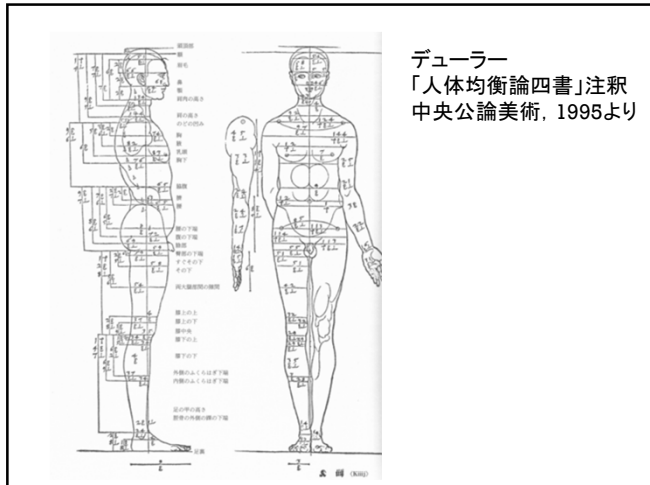
	A	B	C	D	E	F
1	死海の面積					
2						
3	1931年					
4		上底	下底	高さ	面積	
5	1	0.8	1.9	0.85	=(B3+C3)*D3/2	
6	2	1.9	2.2	2.20	4.51	
7	3	2.2	2.4	1.20	2.76	
8	4	2.4	2.6	1.75	4.20	
9	5	2.6	2.4	0.75	1.31	
10	6	1.7	0.9	1.10	0.94	
11	7	0.7	0.0	0.90	0.63	
12	8	0.9	0.7	0.50	0.70	
13	9	0.7	1.9	0.70	1.02	
14	10	1.9	2.2	0.80	1.40	
15	11	2.2	1.6	1.55	2.40	
16	12	1.6	0.9	1.25	1.00	
17				全体	22.01	cm^2
18	15km => 2.2cm					
19	1cm => 15/2.2=6.82km					
20	1cm^2 => 6.82*6.82km^2=46.51km^2					
21	1cm^2= 46.5 km^2 1023.8 km^2					
22						

23

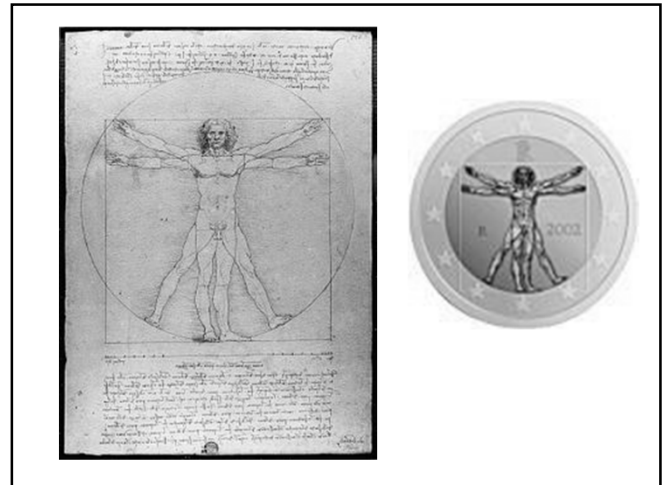
自分物差し 1守屋&0.1守屋



24



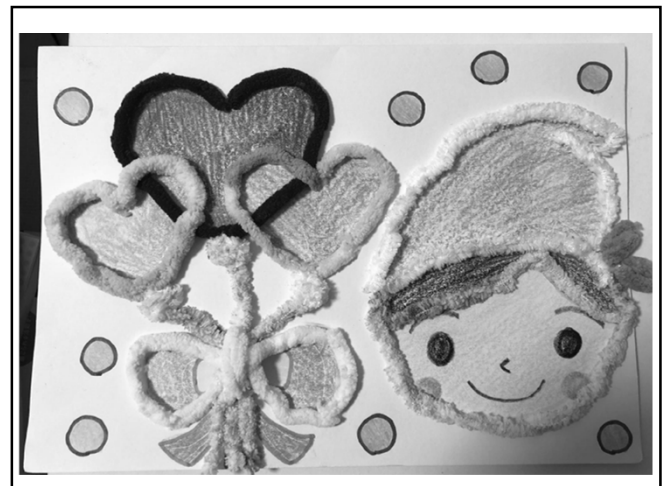
25



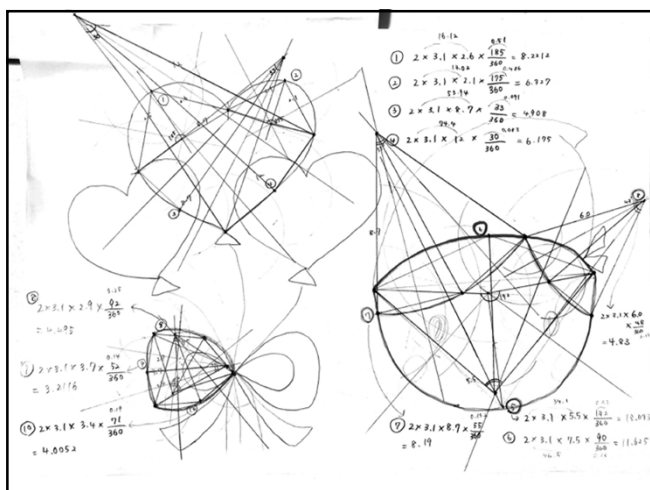
26



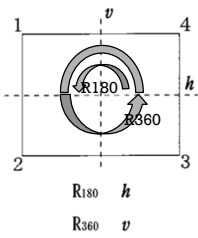
27



28

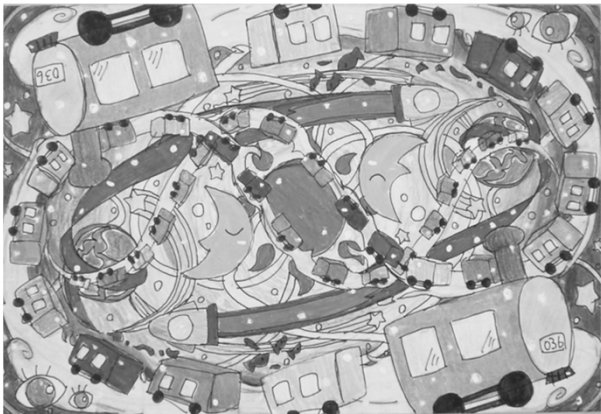


長方形模様
「長方形」をそれ自身に移す「運動」を象徴する模様

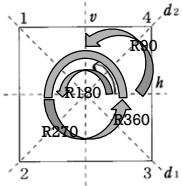


あと	先	R360	R180	v	h	
R360	R360	R180	v	h		{R360}
R360	R360	R180	v	h		{R360 R180}
R180	R180	R360	h	v		{R360 v h R180}
v	v	h	R360	R180		{R360 h}
h	h	v	R180	R360		{R360 v}

31



32



あと	先	R360	R0	R180	R270	<i>v</i>	<i>h</i>	<i>d1</i>	<i>d2</i>
R360	R360	R0	R180	R270	<i>v</i>	<i>h</i>	<i>d1</i>	<i>d2</i>	
R0	R0								
R180	R180								
R270	R270								
<i>v</i>	<i>v</i>								
<i>h</i>	<i>h</i>								
<i>d1</i>	<i>d1</i>								
<i>d2</i>	<i>d2</i>								

33

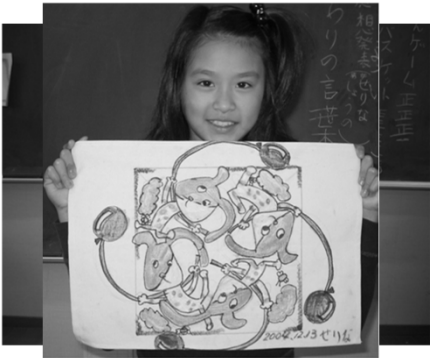


34

3年生



35



36

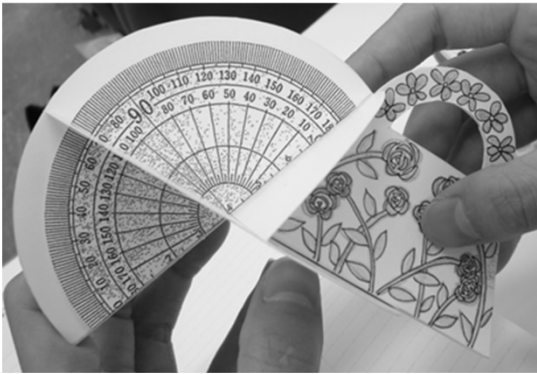


37

二面角の計測



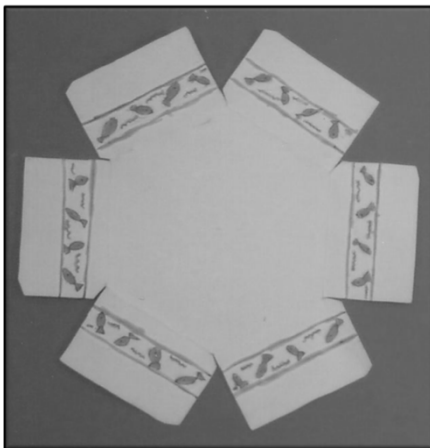
38



39



40



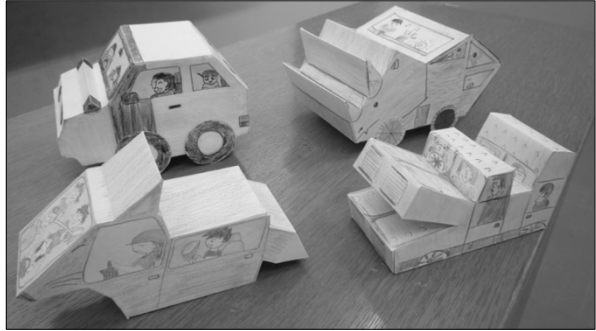
41



42



43



44

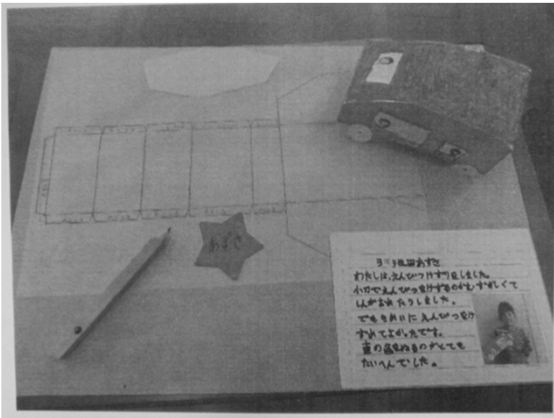
2年生の車製作



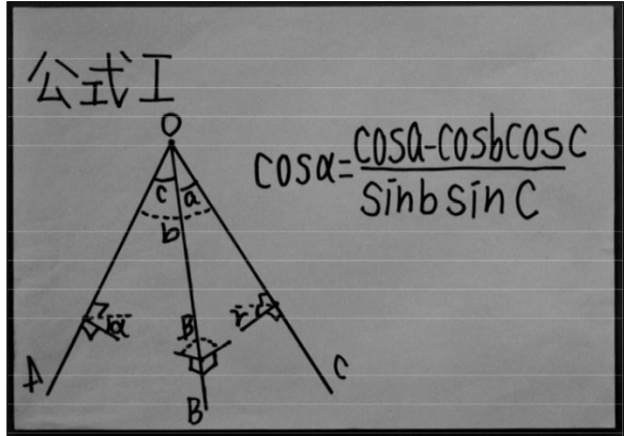
45



46



47



48



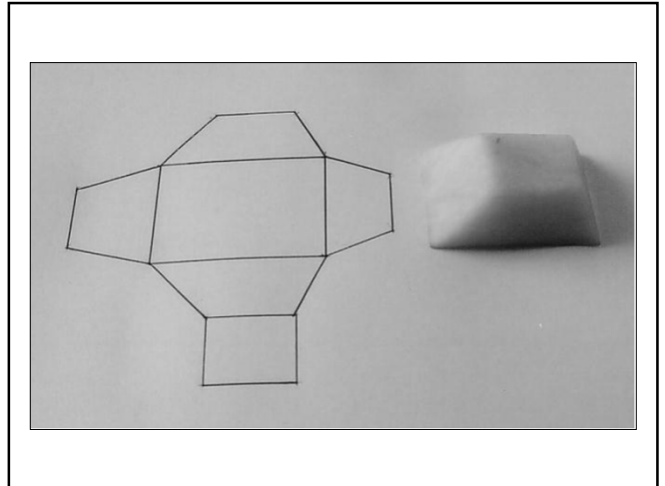
49



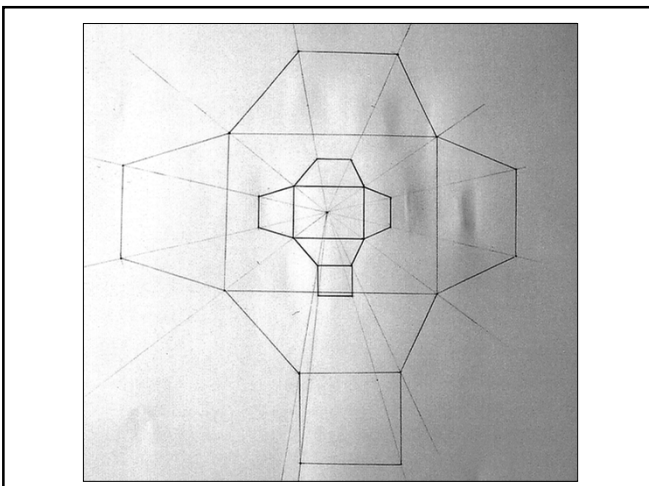
50



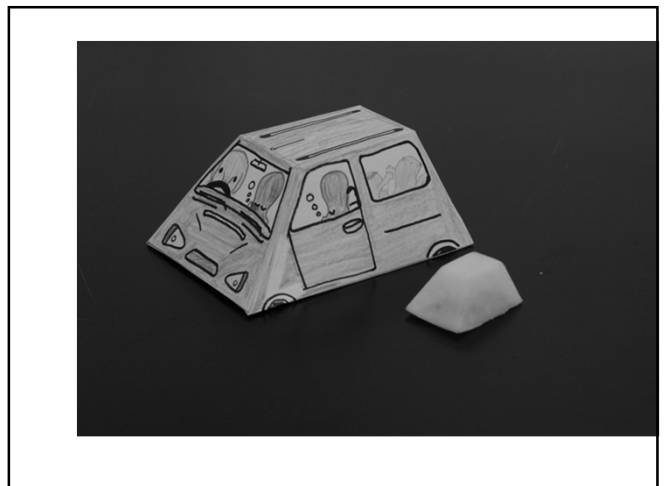
51



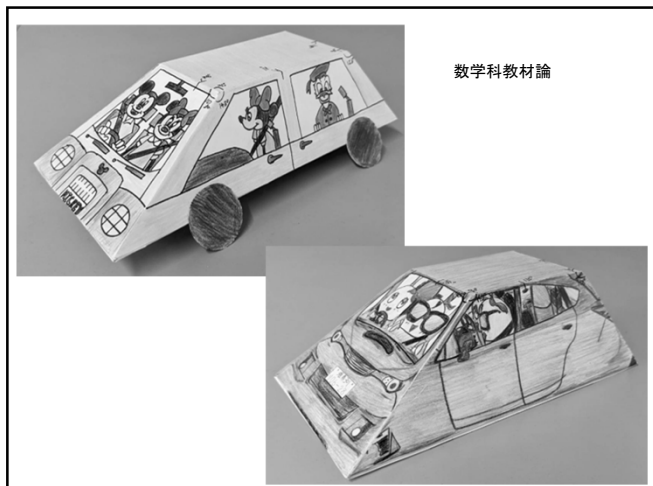
52



53



54



55



56



57



58



59

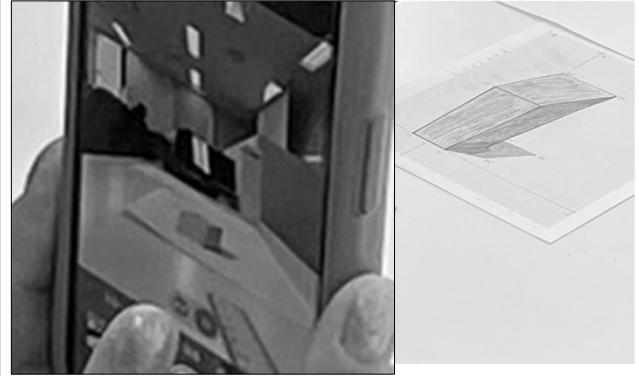


60

トリックアート 算数

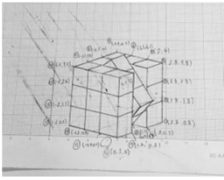


61



62

トリックアート 数学科教材論



1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB	BC	BD	BE	BF	BG	BH	BI	BJ	BK	BL	BM	BN	BO	BP	BQ	BR	BS	BT	BU	BV	BW	BX	BY	BZ	CA	CB	CC	CD	CE	CF	CG	CH	CI	CJ	CK	CL	CM	CN	CO	CP	CQ	CR	CS	CT	CU	CV	CW	CX	CY	CZ	DA	DB	DC	DD	DE	DF	DG	DH	DI	DJ	DK	DL	DM	DN	DO	DP	DQ	DR	DS	DT	DU	DV	DW	DX	DY	DZ	EA	EB	EC	ED	EE	EF	EG	EH	EI	EJ	EK	EL	EM	EN	EO	EP	EQ	ER	ES	ET	EU	EV	EW	EX	EY	EZ	FA	FB	FC	FD	FE	FF	FG	FH	FI	FJ	FK	FL	FM	FN	FO	FP	FQ	FR	FS	FT	FU	FV	FW	FX	FY	FZ	GA	GB	GC	GD	GE	GF	GG	GH	GI	GJ	GK	GL	GM	GN	GO	GP	GQ	GR	GS	GT	GU	GV	GW	GX	GY	GZ	HA	HB	HC	HD	HE	HF	HG	HH	HI	HJ	HK	HL	HM	HN	HO	HP	HQ	HR	HS	HT	HU	HV	HW	HX	HY	HZ	IA	IB	IC	ID	IE	IF	IG	IH	II	IJ	IK	IL	IM	IN	IO	IP	IQ	IR	IS	IT	IU	IV	IW	IX	IY	IZ	JA	JB	JC	JD	JE	JF	JG	JH	JI	IJ	JK	JL	JM	JN	JO	JP	JQ	JR	JS	JT	JU	JV	JW	JX	JY	JZ	KA	KB	KC	KD	KE	KF	KG	KH	KI	KJ	KK	KL	KM	KN	KO	KP	KQ	KR	KS	KT	KU	KV	KW	KX	KY	KZ	LA	LB	LC	LD	LE	LF	LG	LH	LI	LJ	LK	LL	LM	LN	LO	LP	LQ	LR	LS	LT	LU	LV	LW	LX	LY	LZ	MA	MB	MC	MD	ME	MF	MG	MH	MI	MJ	MK	ML	MM	MN	MO	MP	MQ	MR	MS	MT	MU	MV	MW	MX	MY	MZ	NA	NB	NC	ND	NE	NF	NG	NH	NI	NJ	NK	NL	NM	NN	NO	NP	NQ	NR	NS	NT	NU	NV	NW	NX	NY	NZ	OA	OB	OC	OD	OE	OF	OG	OH	OI	OJ	OK	OL	OM	ON	OO	OP	OQ	OR	OS	OT	OU	OV	OW	OX	OY	OZ	PA	PB	PC	PD	PE	PF	PG	PH	PI	PJ	PK	PL	PM	PN	PO	PP	PQ	PR	PS	PT	PU	PV	PW	PX	PY	PZ	QA	QB	QC	QD	QE	QF	QG	QH	QI	QJ	QK	QL	QM	QN	QO	QP	QR	QS	QT	QU	QV	QW	QX	QY	QZ	RA	RB	RC	RD	RE	RF	RG	RH	RI	RJ	RK	RL	RM	RN	RO	RP	RQ	RR	RS	RT	RU	RV	RW	RX	RY	RZ	SA	SB	SC	SD	SE	SF	SG	SH	SI	SJ	SK	SL	SM	SN	SO	SP	SQ	SR	SS	ST	SU	SV	SW	SX	SY	SZ	TA	TB	TC	TD	TE	TF	TG	TH	TI	TJ	TK	TL	TM	TN	TO	TP	TQ	TR	TS	TU	TV	TW	TX	TY	TZ	UA	UB	UC	UD	UE	UF	UG	UH	UI	UJ	UK	UL	UM	UN	UO	UP	UQ	UR	US	UT	UU	UV	UW	UX	UY	UZ	VA	VB	VC	VD	VE	VF	VG	VH	VI	VJ	VK	VL	VM	VN	VO	VP	VQ	VR	VS	VT	VU	VV	VW	VX	VY	VZ	WA	WB	WC	WD	WE	WF	WG	WH	WI	WJ	WK	WL	WM	WN	WO	WP	WQ	WR	WS	WT	WU	WV	WW	WX	WY	WZ	XA	XB	XC	XD	XE	XF	XG	XH	XI	XJ	XK	XL	XM	XN	XO	XP	XQ	XR	XS	XT	XU	XV	XW	XX	XY	XZ	YA	YB	YC	YD	YE	YF	YG	YH	YI	YJ	YK	YL	YM	YN	YO	YP	YQ	YR	YS	YT	YU	YV	YW	YX	YY	YZ	ZA	ZB	ZC	ZD	ZE	ZF	ZG	ZH	ZI	ZJ	ZK	ZL	ZM	ZN	ZO	ZP	ZQ	ZR	ZS	ZT	ZU	ZV	ZW	ZX	ZY	ZZ	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB	BC	BD	BE	BF	BG	BH	BI	BJ	BK	BL	BM	BN	BO	BP	BQ	BR	BS	BT	BU	BV	BW	BX	BY	BZ	CA	CB	CC	CD	CE	CF	CG	CH	CI	CJ	CK	CL	CM	CN	CO	CP	CQ	CR	CS	CT	CU	CV	CW	CX	CY	CZ	DA	DB	DC	DD	DE	DF	DG	DH	DI	DJ	DK	DL	DM	DN	DO	DP	DQ	DR	DS	DT	DU	DV	DW	DX	DY	DZ	EA	EB	EC	ED	EE	EF	EG	EH	EI	EJ	EK	EL	EM	EN	EO	EP	EQ	ER	ES	ET	EU	EV	EW	EX	EY	EZ	FA	FB	FC	FD	FE	FF	FG	FH	FI	FJ	FK	FL	FM	FN	FO	FP	FQ	FR	FS	FT	FU	FV	FW	FX	FY	FZ	GA	GB	GC	GD	GE	GF	GG	GH	GI	GJ	GK	GL	GM	GN	GO	GP	GQ	GR	GS	GT	GU	GV	GW	GX	GY	GZ	HA	HB	HC	HD	HE	HF	HG	HH	HI	HJ	HK	HL	HM	HN	HO	HP	HQ	HR	HS	HT	HU	HV	HW	HX	HY	HZ	IA	IB	IC	ID	IE	IF	IG	IH	II	IJ	IK	IL	IM	IN	IO	IP	IQ	IR	IS	IT	IU	IV	IW	IX	IY	IZ	JA	JB	JC	JD	JE	JF	JG	JH	JI	IJ	JK	JL	JM	JN	JO	JP	JQ	JR	JS	JT	JU	JV	JW	JX	JY	JZ	KA	KB	KC	KD	KE	KF	KG	KH	KI	KJ	KK	KL	KM	KN	KO	KP	KQ	KR	KS	KT	KU	KV	KW	KX	KY	KZ	LA	LB	LC	LD	LE	LF	LG	LH	LI	LJ	LK	LL	LM	LN	LO	LP	LQ	LR	LS	LT	LU	LV	LW	LX	LY	LZ	MA	MB	MC	MD	ME	MF	MG	MH	MI	MJ	MK	ML	MM	MN	MO	MP	MQ	MR	MS	MT	MU	MV	MW	MX	MY	MZ	NA	NB	NC	ND	NE	NF	NG	NH	NI	NJ	NK	NL	NM	NN	NO	NP	NQ	NR	NS	NT	NU	NV	NW	NX	NY	NZ	OA	OB	OC	OD	OE	OF	OG	OH	OI	OJ	OK	OL	OM	ON	OO	OP	OQ	OR	OS	OT	OU	OV	OW	OX	OY	OZ	PA	PB	PC	PD	PE	PF	PG	PH	PI	PJ	PK	PL	PM	PN	PO	PP	PQ	PR	PS	PT	PU	PV	PW	PX	PY	PZ	QA	QB	QC	QD	QE	QF	QG	QH	QI	QJ	QK	QL	QM	QN	QO	QP	QR	QS	QT	QU	QV	QW	QX	QY	QZ	RA	RB	RC	RD	RE	RF	RG	RH	RI	RJ	RK	RL	RM	RN	RO	RP	RQ	RR	RS	RT	RU	RV	RW	RX	RY	RZ	SA	SB	SC	SD	SE	SF	SG	SH	SI	SJ	SK	SL	SM	SN	SO	SP	SQ	SR	SS	ST	SU	SV	SW	SX	SY	SZ	TA	TB	TC	TD	TE	TF	TG	TH	TI	TJ	TK	TL	TM	TN	TO	TP	TQ	TR	TS	TU	TV	TW	TX	TY	TZ	UA	UB	UC	UD	UE	UF	UG	UH	UI	UJ	UK	UL	UM	UN	UO	UP	UQ	UR	US	UT	UU	UV	UW	UX	UY	UZ	VA	VB	VC	VD	VE	VF	VG	VH	VI	VJ	VK	VL	VM	VN	VO	VP	VQ	VR	VS	VT	VU	VV	VW	VX	VY	VZ	WA	WB	WC	WD	WE	WF	WG	WH	WI	WJ	WK	WL	WM	WN	WO	WP	WQ	WR	WS	WT	WU	WV	WW	WX	WY	WZ	XA	XB	XC	XD	XE	XF	XG	XH	XI	XJ	XK	XL	XM	XN	XO	XP	XQ	XR	XS	XT	XU	XV	XW	XX	XY	XZ	YA	YB	YC	YD	YE	YF	YG	YH	YI	YJ	YK	YL	YM	YN	YO	YP	YQ	YR	YS	YT	YU	YV	YW	YX	YY	YZ	ZA	ZB	ZC	ZD	ZE	ZF	ZG	ZH	ZI	ZJ	ZK	ZL	ZM	ZN	ZO	ZP	ZQ	ZR	ZS	ZT	ZU	ZV	ZW	ZX	ZY	ZZ
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Erlangen- Nürnberg 大学の教員養成の実際と日本への示唆

京都教育大学名誉教授 守屋誠司

seijimoriya@hotmail.co.jp

1. はじめに

筆者は、2025 年1月から 2 月にかけて、南ドイツのバイエルン州 Erlangen 市に滞在して、フリードリヒ・アレクサンダー大学エアランゲン-ニュルンベルク (Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, FAU と略記)、通称 Erlangen-Nuremberg 大学の教員養成用に関講されている数学教育関係の授業を参観して、そこで行われている授業の内容と方法について調査した。また、FAU 大学教授の Thomas Weth 教授やバーデン=ヴュルテンベルク州 Karlsruhe 教育大学 Mutfried Hartmann 教授に教員養成やドイツの学校での数学教育、ICT の利用について聞き取り調査をした。それらの一部を報告したい。

2. FAU の専任スタッフと講義

FAU では、小学校(GS:Grundschule:小1～小4)、中等学校(MS:Mittelschule:小5～中3:旧称の基幹学校(Hauptschule)), 実科学校(RS:Realschule:小5～高1)、ギムナジウム(GY:Gymnasium:小5～高3)の教師のための教員養成を行っている。2024 年2月の数学教育教室のスタッフは、RS 担当の教授 Th.Wethと准教授・講師に相当する、GY 担当の S.Nicoli, MS 担当の G.Stephanie, GS 担当の E.Beckstein, それ以外に、学校現場の教師が非常

勤として大学で指導をしている。年間の講義科目は表1・表2である。

3. 具体的な教育現場

幾つかの授業を参観したので内容を報告する。

3.1 GS: 算術と代数と算数(数学)の基礎 E.Beckstein 80名程度

月曜日に出された試験課題への質問の説明から始まる。763419を12進法ではいくつになるかの説明をする。また、 $3_8 + 6_8 = 11_8$ ではないかの質問もあることから、N 進法での加法・減法を扱っている。試験でも、 $3704_{12} - A18_{12}$ の計算とそれが正しいことを説明させていた。

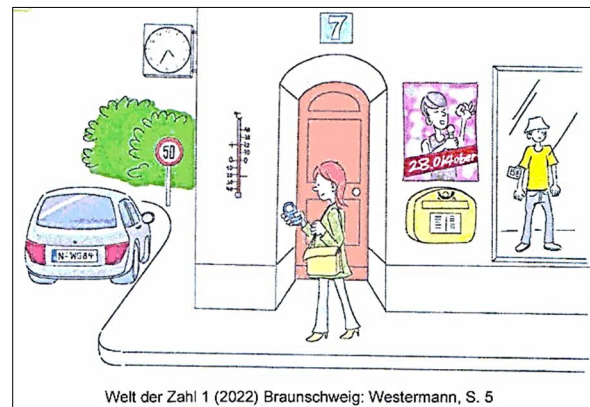


図2 2024 年冬学期 GS 期末試験問題より

期末試験は6設問からなり、図2が最初の問題である。

「a)教科書の絵について、クラスで授業をはじめるための具体的な課題を立てなさい。どのような内容に関連した目標を追求し、どのような一般的な数学的能力に取り組みせるか述べよ。」

実際の指導の際に、現実場面から数に気づき、関心を持たせる課題を構築できるか問われている。最後の問題では、

「ルーシーは春に自転車を買えるように毎週お小遣いの半分を貯めている。祖母が購入経費の半分を補助してくれる。半年後に彼女は自転車を

教員養成システム(2023/2024)

第1段階 (大学生)		第2段階 (研修勤務期間)	
3年～5年大学に在学		2年間学校現場にて	
	基礎 学校	中等 学校	実科 学校
担当教科と 週授業数	クラスの全教科指導 28h/w		全てのクラスの2教科指導 24h/w
教科	1教科と教育 法	1教科と教 育法	2教科
数学教育法	必修 4コマ	選択 7コマ	数学教師 4コマ
数学の教科専門	選択 18コマ	選択 MESコマ MT13コマ	36コマ

図1 FAU 教職科目

買うのに十分なお金を貯められましたか。」という、不完全は文章題を、明確な解答に必要なすべての情報を加えて文章題を完成して、立式し解く課題が出題されている。

算数に関わる数学的内容と指導上知識が問われる試験である。

3.2 MS:空間と図形教育1 G.Stephanie 14名

ピタゴラスの定理を、紙を切って成り立つことを確かめているが、自分でできた学生はいなかった。この授業では、「生徒にさせる一絵・図を書くー記号で表す(E-T-S 理論)」を説明した。その後、E-T-S 理論で、三角形の内角の和を求める授業を設計する課題が出された。次に、円や垂線、角の2等分線、平行線を点集合でどう表すかを討議し、それを利用して地図上のパズル(場所は、学校と幼稚園から同じ距離、養老院からは反対側、350m)を作図で解かせた。

MS:授業デザインⅢ G.Stephanie 3名



球の体積の模擬授業である。学生1名が教師役、学生2名が生徒役である。球と円柱、円錐の模型を用意し、水を入れて公式を導く授業である。教具は数学科から貸し出され、色々な立体の同様な教具が用意されている。指導案も工夫されていた。

3.3 RS:代数の教授法 Th.Weth 8名

$\sin$ の指導に関する国家試験問題を扱った。試験では $y=a \cdot \sin(x+b)+c$ までを説明対象とするが、実際に教えるかは別である。グラフは線対称、点対称、進みねじり運動である等の特徴を述べること。 $\sin$ の代数的性質を引き出す授業を設計することを扱った。なお、学生はタブレット端末を使っている。試験問題でも、同様な課題が出題されている。

Weth 教授は、PC 利用の数学教育で著名な研究者である。しかし、教育法の授業内容では、教育内容や教材の意味・意義の指導を中心にしていた。

バイエルン州の学習指導要領には教育内容は示されているが、教材や具体的な指導法については教師に任せられている。まず、数学内容の理解と指導のポイントを講義するのが必要となるからだと思われる。

3.4 GS,MS,RS:線形代数の基礎 数学科の女性の先生

数学専攻の GS/MS/RS 学生用の数学科目の1つ。学生二人が行列問題を解いている。特に DX 対応する内容ではなく、伝統的な内容と指導方法であった。

3.5 GY 教師対象の研修会 Th.Weth 20人程度

ユーグリッドの互除法と mod を教えている。最後は暗号論に進む。この研修会は、GY の教師達から依頼された内容で、近年、数学の内容が削除されたので、DX に対応した新しい内容を生徒に指導するための準備だそうだ。

4. 日本への示唆

- 1) 数学教育の専任教員4名が、それぞれ GS,MS,RS,GY 担当をして、カリキュラムや授業内容、学生指導を分担している。日本では、大学院設置基準の中で数学教育担当者として各教員を含む2名体制が続いてきた。しかし、今日は、専任教員1名で良しとし、もう1名は特任教授や非常勤講師で充足する大学がある。この原因は、地方国立大学の財政的環境の劣化に関わり、人件費の削除にあるという。今まで通り、少なくとも初等教育専門と中等教育専門の専任教員2名は必置である。
- 2) 教育内容を中心とした指導法である。MS では、数学の力が付かないとの理由で、アクティブ・ラーニング形式による数学指導の評判は良くない。日本では、学習指導要領&解説の内容の説明が主で、その理念や趣旨の浸透を目的とする教育学的視点からの講義が多い。内容を理解し、数学教育学の知見を基盤にした授業研究アプローチができる教員を養成する必要がある。同時に、実践を経験し課題を持った教員のための研修も充実したい。
- 3) ICT の利用については、関数電卓活用の歴史があり、ICT 利用を前提とするモデリング研究が進んでいる。しかし、FAU の指導法では、意外に ICT 利用に関した指導は少ない。日本では、探究学習や STEAM 教育、総合教育等でこれから ICT 利用を有効に利用したい。
- 4) 学校教員採用に大学教員も関わり、学生の卒

業・終了後まで責任を持っている。日本では、採用試験は各教育員会に任せられ、大学教育員が関わることはない。そのため、特に高校・中学校の教員採用試験問題では、大学で学ぶ数学についての理解度が評価されていない。中等学校教員には大学レベルの専門性が必要である。そのためにも、採用試験問題作成や評価に大学教員を含めたメンバーで実施したい。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 22K02530 の助成を受けたものである。

参考文献

[1] 守屋誠司・渡邊伸樹・他 3 名(2011)「テレビ会議を利用したエリート算数・数学教員養成のための基礎研究 -数学教育学のピーク制とバイエルン州の数学教員養成から-」, 玉川大学教育学部紀要『論叢』2010, 43-53

表 1 2023 年冬学期(9月～2月)開講科目(仮翻訳)

	月	火	水	木
1限目 8:00～9:30	GS算術,代数と算数の基礎 GY確率の教授法	GSインタシップのための付随指導 MS計算ゼミ RSデータと偶然の教育	GSインターンシップ (実習校) MSインターンシップ (実習校) RSインターンシップ (実習校) 8:00～13:00	GS算術と代数と算数の基礎
2限目 9:45～11:15	GS算術基礎の補完課題と演習 GS算術基礎の補完課題と演習A GS算術基礎の補完課題と演習E MS国家試験受験生向け数学教育アド バンスゼミ GY解析の教授法	GS数学教育選択ゼミ3(絵本の中の 数学1) GS算術基礎の補完課題と演習C GS算術基礎の補完課題と演習F MS空間と図形のゼミ1 MS中等学校の数学教育ゼミ RS代数の教授法	GS数学教育選択ゼミ3(課外学習での 数学)	GS数学教育選択ゼミ3(課外学習での 数学) GS算術基礎の補完課題と演習H RS計算理論&微積分の基礎と応用
3限目 11:30～13:00	GS国家試験受験生向け数学教育アド バンスセミナー GS算術基礎の補完課題と演習B GS数学教育選択ゼミ3(プログラミング 初歩: Bee-Bots利用) RS国家試験受験生向け数学教育アド バンスゼミ MS空間と図形ゼミ I GY国家試験アドバンス数学教育	GS数学教育選択ゼミ3 (絵本の中の 数学2) GS算術基礎の補完課題と演習D GS算術基礎の補完課題と演習G MS計算の演習		
4限目 14:00～15:30		MS授業デザインの基礎	MSインターンシップ付随演習	

表 2 2023(24)年夏学期(4月～7月)開講科目(仮翻訳)

	月	火	水	木	金
1限目 8:00～9:30	GS初等授業の数学(選択2) GS小学校幾何の基礎 RS・BS算術の教授法 RS数領域の教授法	GS演習D MS関数的つながり(データと偶然) RS国家試験のためのアドバンスゼミ		GS小学校の基礎	GYインターンシップ (実 習校) 8:00～13:00
2限目 9:45～11:15	GS演習A GS演習E GS絵本の中の数学(選択演習1) MS空間と図形ゼミ II BS解析の教授法 RS幾何の教授法	GS演習B GS演習G GS演習I RS・BS空間と図形の教授法		GS絵本の中の数学(選択演習4) RS初等確率論の数学ゼミ	
3限目 11:30～13:00	GS演習F GS国家試験用主セミナー MS確率の基礎の選択ゼミ	GS演習C GS演習H GS演習J MS国家試験のためのアドバンスゼミ		MS空間と図形演習 II	
4限目 14:00～15:30	GY国家試験のためのアドバンス 数学教育			MS教授デザインの基礎	GYインターンシップ付随 演習 13:00～15:00

[原著論文]

職業教育に繋がる中等教育における数学教育について ——ドイツの職業教育の紹介——

守屋誠司

要 約

職業教育へ繋げられる中等教育における数学教育を研究する必要がある。そのために、複線型中等教育を実施しているドイツ・バイエルン州の基幹学校と実科学校の教育目標と教育内容、卒業試験問題を調べた。また、バイエルン州とバーデン・ヴュルテンベルク州の職業学校(Berufsschule)を現地調査したので、そこでの数学教育を紹介する。

キーワード：数学教育，職業教育，ドイツ，Berufsschule，中等教育

I 目的と目的設定の理由

卒業後、非理系大学・高等専門学校への進学や企業への就職を考えている中等学校の生徒への数学教育の研究を喫緊に遂行しなければならない理由として、大学生の学力不足の問題がある。今日の大学教育では、新入生に対するリメディアル教育は一般的となり、そこでは、高等学校の数学の復習をしている場合が多い。筆者の勤務する非理系である教育学部では、新入生に対して高校1年生修了レベルの数学検定試験準2級合格を課している。しかしながら、1年間のリメディアル教育後でも、平成22年入学生の約2割の学生は不合格であった(富永(2012))。中学校、高等学校の6年間、数学を学んだにも関わらず、文系大学生の学力は中学3年～高校1年のレベルなのである。大学等の高等教育機関進学率は同年齢者の50数%であるが、非進学者の数学レベルはさらに低いのではと推察される。確かに日本の数学カリキュラムは系統性があり、各高等学校における単位認定制度は機能しているはずなのだが、実際の学力の保証は、不十分で危ない実態があると認識する。

学力不足の要因の一つに、学校で教えられる数学の内容とカリキュラムが、時代に合っていないのではと考えられる。日本の学校教育で指導される数学の内容は、微分方程式にいたる解析学の理解を最終目標とするカリキュラムになっているとあって良いだろう。このカリキュラムの源は、産業革命の進展に伴い重・軽工業に必要な数学を学ばせ、それらに従事し産業を発

展させられるエリートや優秀な技術者の育成という20世紀初頭からの発想にあった。しかし高度情報通信社会といわれ、産業や社会で必要とされる数学が多様となった今日では、理系エリートのために作成された従来のカリキュラムは、様々な職種へ就職するであろう生徒らに不応を起こさせる。

このように考えると今後の中等学校においては、就職希望者や非理系進学者のための学力保障システムが必要である。例えば、建築関係者の基礎学力を保障するためには、今日のカリキュラムでは体系的でない平面幾何を改良した上で、内容を増やした立体幾何も体系的に学ばせる必要がある。また、生産に関わる中小企業従事者に必要な数学もあるはずである。

以上のように、旧社会に対応した統一カリキュラムを全国一律に指導する日本の教育制度は限界にきていると考えられる。日本社会の発展のために、就職希望者や非理系進学希望者のための中等教育学校（中学校・高等学校）における数学の教育内容とカリキュラムを再考し、再構築することは大きな課題である。そこで、筆者らは、次のことを目標に研究を始めた。

- ① 諸外国の複線型カリキュラムと内容・教材を調査研究し、日本のカリキュラムへの適用性を検討する。
- ② 国内の職業高校における専門教育科目と数学科目との関連や、普通高校文系における数学履修の様相を調査し、実態と課題を明らかにする。
- ③ 職業教育や文系大学等進学に適応する数学の教育内容と教材を開発し、カリキュラムを提案する。

この研究の一環として、本稿では、伝統的な複線型の教育システムを継続し、教育レベルの高いドイツ・バイエルン州の基幹学校と実科学校の教育目標と教育内容、卒業試験問題を調べた。また、バイエルン州とバーデン・ヴュルテンベルク州の職業学校（Berufsschule）を現地調査したので報告する。生徒の学力をどのように捉えて教育し、卒業時の学力保証をどのように行い、さらにその後の職業教育をどう行っているかを調べることは、現在の日本で問題となっている学力低下と低学力生徒への対応、就職難、ニートの増加という問題を解決するヒントになると考えた。

Ⅱ ドイツの教育制度

ドイツの義務教育は6歳から始まり、地域の公立の基礎学校（Grundschule）に9月から入学する。バイエルン州のこの学校は4年制であるが、ベルリン市などは6年制を採っている。基礎学校を卒業すると公立の中等教育学校である、日本の中学校に相当する基幹学校（Hauptschule）/中等学校（Mittelschule）、普通高校に相当す

複線型学校システム



図1 バイエルン州の学校システム

る実科学校（Realschule）、大学進学校に相当するギムナジウム（Gymnasium）から選択して入学するのが一般的である。

基幹学校/中等学校の生徒は、卒業後に職業見習いとして職業に就きながら職業学校で理論と高度な技術、一般教養を学ぶ。働きながら週2日ずつ通う場合と、学校が遠方の生徒は2週間くらい集中講義に通う場合とがあり、授業料は一般に無料である。就職しながら学校に通い教育を受けるこのシステムはデュアルシステムといわれ、「1969年に職業教育法（Berufsbildungsgesetz vom 1969）が成立し、工業、商業、農業、手工業などの個別経営部門ごとに別々に規制されていた職業訓練行政が統一法にしたがうようになってからは、2つの職業教育機関（筆者注：企業と学校）はより協調的な関係を築くようになる」（寺田（2003）, p. 9より）から、今日に続いている。従って、基幹学校等のカリキュラムでは、卒業後すぐにこのシステムに対応できるようにと配慮されている。基幹学校は主に5年制を採っているが、希望者はさらに1年間通い高度な内容を学ぶこともできる。なお、2011年からバイエルン州の基幹学校は、中等学校と呼び名を変え、新たな教育システムに移行しているが、それについての詳細は稿を改めて考察することにする。

6年制の実科学校の生徒は卒業後に就職して職業学校に通ったり、職業専門学校（Berufsfachschule）に進学した後で基幹学校卒業生より専門的技術や知識が必要な職業に就いたりする。なお、高等学校修了証明に相当専門アビトゥーアを取得して、さらに、工業専門大学等の専門大学に進学もできる。

ギムナジウムの生徒は卒業後に一般の総合大学への進学を希望している。ギムナジウムは近年制度が変わり9年制から8年制となった。この学校では大学進学のために、高度な教育内容を教えている。通常のギムナジウムの他に、例えばベルリンの職業ギムナジウム（Berufsgymnasium）のように、職業関連科目に重点をおいたギムナジウムもある。このギムナジウムでは、経済や法律の科目があり、これら科目で卒業試験を受けてアビトゥーアを取得し、総合大学の経済系や法律系に進学する生徒が多い。

基礎学校の卒業時に前述したこれら3種類の中等教育学校から一つを選択する。子どもの希望も考慮されるのだが、基本的には親と基礎学校4年生のときの担任の先生が、子どもの成績や親の希望をもとにしてどの種類の学校に入学させるかを決定することが多い。大まかに基幹学校/中等学校、実科学校、ギムナジウムの順で生徒の学力や教育内容のレベルは高くなっている。最近では子どもの大学進学を希望する親が多いため、ギムナジウムへの入学者数が増えてきている。近年、移民としてドイツに入国したドイツ語を母国語としない親の子女が基幹学校に入学しているため、言語を良く理解できないことによる低学力化とそれに伴った生徒指導上の問題が起きている。かつてのドイツのマイスター制度を支えた職人の誇りなど、見る影さえないともいわれる（川口（2004））。

次は、卒業試験制度である。基幹学校や実科学校、ギムナジウムの卒業資格は、卒業国家（筆者注：州のこと）試験において一定の成績を獲得することで得られる。この試験は必修教科と

選択教科のすべてで実施され、それら教科のすべてに合格しなければ卒業資格を獲得できない。バイエルン州においては、州として統一した試験問題が作られ、実施されている。州によっては学校ごとに作ることになっているところもある。この試験によって得た成績はその後の就職活動や大学進学などに大きな影響を及ぼすため、単に卒業資格を取れば良いのではなく、好成績が求められる。

Ⅲ 数学教育の目標と内容

1. 基幹学校の教育目標と授業方法

基幹学校の教育目標と教育内容の詳細は守屋・他(2011)を参照にして欲しい。大まかには、基幹学校のほとんどの生徒は卒業後に就職するために、職業に就いたときに対応できる学力を形成しておくことを教育の第1の目標としている。授業では「自分で考える」ようにするなど、問題解決のために数学を一人で使えることが目標となっている。また、目標には「限界にぶつかる」という表現があるが、現状の内容の理解だけで満足することなく、より高度な数学の学習を続けるようにと示唆している。

授業を行う際には、日常世界の問題や生徒が興味を湧かせている内容などから始めるのが大切であり、また、数学の授業以外のところで困難な問題に遭遇したときに、一人でそれを処理できるような力をつけさせる指導をするよう述べられている。

2. 基幹学校の教育内容

日本の中学校とそれほど変わらないが、論証を全く扱わない。さらに確率も扱われていない。日本以上の内容としては、複雑な一次方程式と、複雑な複合平面図形や複合立体図形の面積や表面積・体積の求積を扱っている点である。

各学年には、自然数、四則演算、幾何学、項と方程式、分数、現実の中の数学など、5単元ないし6単元があり、各々の単元に目標が設定されている。特徴として、まず、様々な活動を通して理解を深め、抽象概念を形成していく必要があると、指導方法に言及している点である。次に、計算と作図が重要視されている点である。作図ではコンパスとゲオドライエック（分度器の機能を組み込んだ直角二等辺三角形の定規）を使う。計算は平面幾何では面積と周囲の長さ、立体幾何では体積と表面積、密度から重量を求めることが中心となっている。さらに、日本以上に現実の中の課題を取り扱うことを重要視している。第5学年、第6学年においては「現実の中の数学（Sachbezogene Mathematik）」という単元がある。

3. 実科学学校の目標の序文

前文には、数学は日常生活における様々な困難を克服することに生かされる一方、他方ではさらに続く学校教育や職業的なキャリアの基礎にも必要不可欠であり、数学的な能力は文化技術の一部であるというように、職業訓練における数学の意味付けがされている。

さらに、数学の授業は小学校で取得した知識、能力、技能を基盤に構築する。その際には、生徒の考え方が、まだ、具体的な概念にとらわれていることを考慮に入れ、カリキュラムは具体物を使った操作による経験を積むことを可能にしている。生徒が段々と発達していくのに従って、数学授業の重要な課題は、生徒の考え方を具体的思考から抽象的思考に導いていく。さらに、7年生以降は、数学の授業の細分化がなされ、選択必修科目群ⅠおよびⅡ、Ⅲにおける授業は、教授内容や取り扱う内容の深さ、要求の高さにほとんど一貫して区別されている。選択必修科目Ⅰではより深く数学の授業が行われるとしている。この後に、算術と代数、幾何、データと頻度、代数と幾何の関係、問題解決と目標が続く。

4. 実科学学校の教育内容

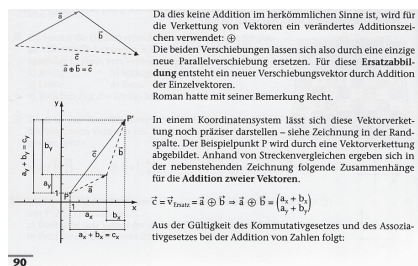


図2 7年生 (K. Gierse(2002)p.90 より)

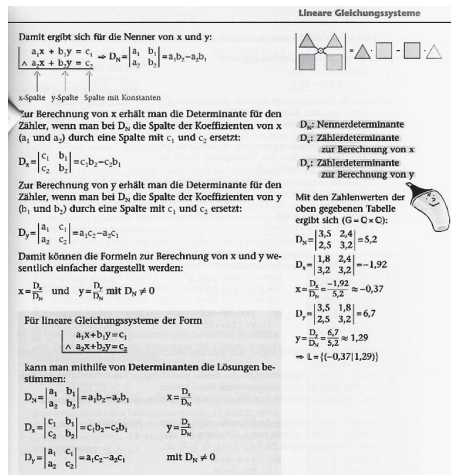


図3 9年生 (K. Gierse(2004)p.17 より)

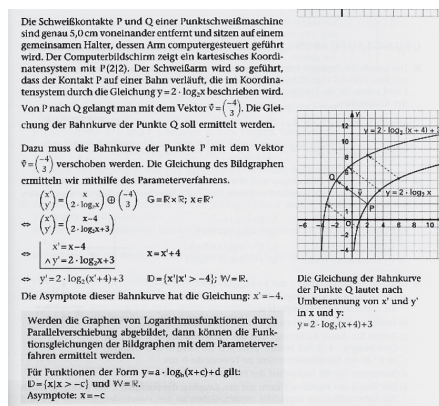


図4 10年生 (K. Gierse(2005)p.49 より)

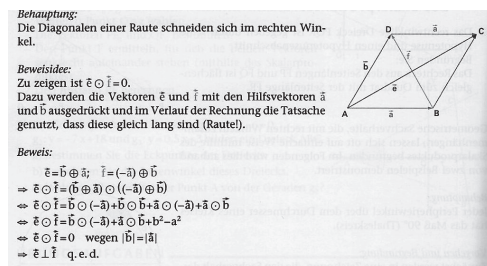


図5 10年生 (K. Gierse(2005)p.122 より)

概ね、日本の高等学校の数学Ⅱ・Bまでの範囲であるが、微積分は扱われない。また、日本のような厳密な図形の論証も扱われない。さらに、立体の体積・表面積は9年生と日本に比べてかなり遅い。ただし、次のように日本より高度な内容を扱う。

5年生で、集合、簡単な一次方程式を扱う。6年生で、日本の中1にあたる平面幾何、一次方程式、正負の加減を扱う。

7年生で、マイナスを含むべき乗と指数計算、一次不等式、平行移動からベクトルの導入、ベクトルの成分表現と加減（図2）、平行・対称・90度回転移動の一次変換、円周角を扱う。8年生で、式の展開と因数分解、2次関数における平方完成と最大値・最小値、分数数式の加減乗除、和集合、対応、一次不等式と座標上での集合表現、立体幾何（二面角）を扱う。9年生では、日本の理系大学初年で扱う行列、行列式、行列式による連立方程式の解法がある（図3）。連立不等式、三角形の面積公式の行列式表現（ここで三角形等の各種図形の求積公式やピタゴラスの定理を扱う）、ユークリッドの高さ定理・放物線（焦点）、相似変換、放物線と直線・放物線接点や接線等、カバリエリの原理を使った柱体・錐体の体積・表面積を扱う。

10年生は、指数・対数・三角関数（図4）、ベクトルの内積と内積を使った証明問題（図5）、行列表現の一次変換とそれを使ったフラクタル図形であるシェルピンスキー・ガスケッ作成手順を扱う。

このように全体的に、日本より1年程度レベルが高く、集合、行列、ベクトルは日本の中学校1学年から指導される。さらに、立体幾何の内容が豊富である。ただし、論証と言うより計量や数値計算が多いのが特徴である。

Ⅳ 卒業のための資格

基幹学校、実科学校、ギムナジウムにはそれぞれ卒業資格を与えるための試験が存在しており、各教科に設けられている。必修科目と選択科目があり、すべてにおいて一定以上の成績を取らなければ、卒業資格が与えられない。バイエルン州の数学の卒業国家（注：州のこと）試験について紹介する。なお、基礎学校では卒業国家試験はないが、共通テスト程度のものがあり、その成績は進路決定の重要な資料となっているという。

1. 基幹学校の卒業試験（2007年）

バイエルン州では2つのタイプの試験が用意されており、その2つの合計点によって成績がつけられる。電卓や公式集を使用せずに解くA問題、それらを使って良いB問題である。

1. A問題の例

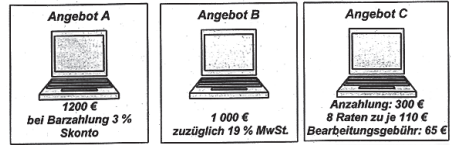
問7 ノートパソコンの購入方法が3種類あり、どのプランで買うと一番安いかを説明する問

題である。

「Aのプラン……ノートパソコンの価格は1200ユーロだが、現金での支払いの場合3%引きされる。Bのプラン……ノートパソコンの価格は1000

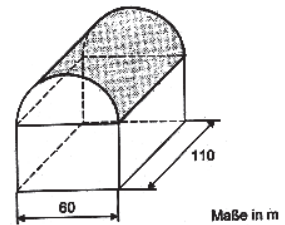
ユーロだが、付加価値税19%かかる。Cのプラン……現金で300ユーロ払い、残りは8回の分割払いで1回あたりの支払額は110ユーロである。手数料料として65ユーロがかかる。」

A問題は、このように消費者としてだけでなく、卒業後に、仕事上でも遭遇するであろう基本的な問題が出題される。



2. B問題の例

G3問4 「美術館の最上階部分は半円柱型になっている。この反った屋根は外側に特別なコーティングをする必要がある。このコーティングは1平方メートルあたり、労働工賃も含め160ユーロ費用がかかる。市議会はこのために150万ユーロを財政から用意した。この金額で十分に足りるだろうか。」



B問題は、日常生活に必要な知識や、それらを解決する方法が問われているやや複雑な問題が多い。公式は暗記の対象ではなく、その適用場面の判断や実際に計算できるかが評価される。計算の正確さよりも計算方法の妥当性に重点がおかれている。%を使った割合の問題は小学校高学年程度のレベルであるが、一元一次方程式の問題は高校入試レベルであり、成績下位の生徒を対象としている割にはレベルが高い。図形の求積では、ピタゴラスの定理の応用が到達目標となっている。

2. 実科学学校の卒業試験（2011年）

1. A問題の例

A1 「ダフネは“若手の研究会”に参加する予定である。そこでの発表のために彼女はすでに水槽内のミジンコの生殖について研究している。研究当初は120匹のミジンコだった。彼女の推測では翌週からは一日35%増殖するとしている。

1. 実験の初日からの日数 x とミジンコの数 y との関係は指数関数 $y = y_0 \cdot k^x$ で表せる。その関数式を書け。
2. 実験3日目終了時点でのミジンコの予想される数を計算によって求めよ。
3. 最初にミジンコの数500より大きくなるのは実験何日目であるか。計算せよ。
4. 実験開始から最初の週の最終日にミジンコの数838匹であることを確認した。ダフネが毎日35%増殖するとした仮定は正しいか。その理由を述べよ。」

A2 問題は略すが、2つのベクトルが与えられて、それによってできる平行四辺形に関わる

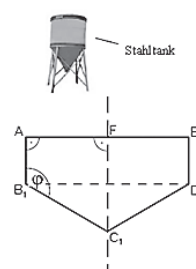
問題である。

A3 「ある会社は鉄鋼タンクを製造している。軸方向に切断すると軸に対称の五角形ABCDEがある。頂点Cと辺AEの中点Fは対称軸上にある。

$E = 2.00\text{m}$, $FC = 2 \cdot AB$, $\angle BAE = 90^\circ$, $\angle AFC = 90^\circ$

$\angle CBA$ は単位 $104.04 \leq \phi \leq 160.02$ で表される。

右の図は $\phi = 120^\circ$ の五角形ABCDEを示している。



1. 体積 V を ϕ の関数で表せ。
2. 最もよく売られるタンクは容積 5000 リットルである。計算によって適切な角の大きさ ϕ を求めよ。結果は小数点第二位までで丸めよ。」

2. B問題の例

B1 問題は略すが、底面が菱形の四角柱の作図と切断面の問題等で、空間能力と三角関数が問われる。

B2 問題は略すが、関数 $y = 1.5^{x+2} - 4$ と $y = -6 \cdot 1.5^{x-1} + 3$ の作図と面積に関する問題。

A問題は現実場面との関わりを持つ問題である。B問題は純粋に数学の問題であるが、作図が最初に入り、その後で総合的な知識を必要とする設問が続く。日本の高等学校の数学Ⅱ・B(微積分を除く)とほぼ同じレベルになっている。しかし、立体や空間の問題などは、日本の生徒、特に文系の生徒にはかなり難しい内容であろう。

V 職業学校での数学授業の実際

伝統的な複線型の教育システムを採り、PISAの成績がドイツ国内の上位であり、普通教育が成功していると考えられるバイエルン州とバーデン・ヴュルテンベルク州において、普通教育との接続する職業教育はどのように行われているかを現地調査することとした。2012年3月にバイエルン州フルト市にある職業学校 Martin-Segitz-Schule/Staatliche Berufsschule III Fürth, 同年12月にバーデン・ヴュルテンベルク州カールスルーエ市にある職業学校 Heinrich-Huebsch-Schule とバイエルン州エアラゲン市にある Staatliche Berufsschule を訪問し、数学を指導している授業を参観したので紹介する。

1. Martin-Segitz-Schule/Staatliche Berufsschule III Fürth

- 1) 住所：Otto Straße 22, D90762 Fürth (<http://www.b3-fuerth.de/>)
- 2) 概要：バイエルン州立の職業学校で、電気工学、情報学、メディア工学、金属工学の各学科がある。10年～12年生までの学校で、約3000人の学生が在学する。教員数は45名。生徒は、



図6 車のバッテリーの原理を学習している



図7 論理回路の設計をしている

2.7 Kräfte

Eine Kraft F lässt sich durch einen Pfeil zeichnerisch darstellen (Bild 1). Die Länge des Pfeiles entspricht der Größe der Kraft und wird durch den Kräftemaßstab bestimmt, z.B. $50 \text{ N} \pm 1 \text{ mm}$. Die Pfeilrichtung gibt die Richtung der Kraft auf der Wirkungsline an. Greifen zwei Teilkräfte F_1 und F_2 an einem Körper an, so kann man die Ersatzkraft F ermitteln:

- Bei parallelen Kräften durch Summieren (Bild 2a und b).
- Bei nicht-parallelen Kräften durch Konstruieren (Kräfteparallelogramm Bild 2c) oder durch Rechnen (Trigonometrie, Satz des Pythagoras beim Winkel 90°).

Beispiel:
Die Kraft F_1 in Bild 2c besitzt 200 N , die Resultierende ist $F = 300 \text{ N}$. Wie groß ist die Teilkraft F_2 bei einem Winkel von $\alpha = 90^\circ$ zwischen F_1 und F_2 ?

Lösung:
 $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \Rightarrow F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2} = \sqrt{300^2 \text{ N}^2 - 200^2 \text{ N}^2} = 224 \text{ N}$

Kräfte haben die Einheit Newton. $[F] = \text{N}$

Aufgaben zu 2.7

1. Auf einen Wagen wirken mit gemeinsamer Wirkungsline die Teilkräfte $F_1 = 500 \text{ N}$, $F_2 = 700 \text{ N}$ und $F_3 = 1200 \text{ N}$. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Ersatzkraft $a)$ wenn alle Kräfte in gleicher Richtung wirken, $b)$ wenn F_3 entgegengesetzt zu F_1 und F_2 wirkt (Kräftemaßstab: $100 \text{ N} \pm 5 \text{ mm}$).
2. An der Wandbefestigung (Bild 3) greifen unter einem Winkel von $\alpha = 90^\circ$ zwei Kräfte $F_1 = 150 \text{ N}$ und $F_2 = 200 \text{ N}$ an. Bestimmen Sie $a)$ rechnerisch und $b)$ zeichnerisch Größe und Richtung der Ersatzkraft F (Kräftemaßstab: $1 \text{ N} \pm 2 \text{ mm}$).
3. An einem Freileitungsmast sind 2 Leitungen im Winkel $\alpha = 100^\circ$ abgespannt (Bild 4). Ermitteln Sie zeichnerisch die Kräfte F_1 und F_2 der beiden Leitungen, wenn der Mast mit einer resultierenden Kraft von $F = 22 \text{ kN}$ belastet wird (Kräftemaßstab: $1000 \text{ N} \pm 2 \text{ mm}$).
4. Ein Lastmagnet (Bild 5) mit einer Gewichtskraft von 2 kN und einer Last von 3000 N hängt an einer zweisträngigen Kette mit einem Spreizwinkel von $\alpha = 45^\circ$. Wie groß ist die Belastung in den beiden Kettensträngen? (Kräftemaßstab: $100 \text{ N} \pm 1 \text{ mm}$).
5. An einem Abzweigmast wirken 3 Zugkräfte $F_1 = 17 \text{ kN}$, $F_2 = 17 \text{ kN}$ und $F_3 = 12 \text{ kN}$ nach Bild 6. Bestimmen Sie zeichnerisch die Kraft F , mit welcher der Mast beansprucht wird, und die Kraft Richtung.

Bild 1: Angriffspunkt, Richtung und Wirkungsline einer Kraft

Bild 2: Kräfte
a) in gleicher Richtung, b) entgegengesetzt, c) senkrecht aufeinander

Bild 3: Wandbefestigung

Bild 4: Spitzenzug

Bild 5: Lastmagnet

Bild 6: Abzweigmast

図8 電気工学の演習書
(P Bastion (2001) p. 37 より)

4年から2年の見習い職人で、若い人である。バイエルン州全体から集まり、1～2週間の集中授業を行っている。ミュンヘンの企業に勤めていて、授業のためにユースホステルに泊まっている生徒もいる。小さい工場では、理論教育ができないし、適当な先生もいないため、ここに来て勉強している。授業料は無料である。併設している Berufsfachschule は、全日制の学校で、17歳～25歳の学生が来る。学生のレベルは職業学校生より低いとのこと。

一般教養の授業はないが、技術関係書は英語の本や論文が多いので英語は行っている。技術の進歩、卒業試験の内容の変更があるので、先生方も常に勉強しているとのことである。

10年前に新しいシステムになり、単一教科としての数学はなくなり、総合学習(10年～11年)の中で扱われている。電気関係の授業を参観した。一つは論理回路の理論で、もう一つはPCを利用した実際の論理回路の設計である。基幹学校では扱っていない数学であるが、仕事上では重要な内容である。図8の使用されている教科書を見ると、基本的な四則演算の復習から始まり、その後は仕事内容に直結する数学を扱っている。

2. Heinrich-Huebsch-Schule Karlsruhe

1) 住所: Fritz-Erlar-Straße 16, D76133 Karlsruhe (<http://www.huebsch-ka.de/>)



図9 数学の授業風景

4. Division

Bevor wir zwei komplexe Zahlen dividieren, führen wir noch einen neuen Begriff ein:

$\bar{z} = x - iy$ (gelesen: „z quer ..“) heißt die zu $z = x + iy$ „konjugiert komplexe Zahl“.

Zwei zueinander konjugiert komplexe Zahlen haben also denselben Realteil, sie unterscheiden sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils. In der Gaußschen Zahlenebene bedeutet dies, dass eine komplexe Zahl und ihre konjugiert komplexe Zahl spiegelbildlich zur reellen Achse liegen (vgl. Abb. 9.30).

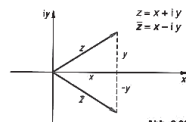


Abb. 9.30

Wir multiplizieren z mit $\bar{z}$ und erhalten:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2.$$

Das Produkt von z und $\bar{z}$ ist also eine (nichtnegative) reelle Zahl.

Diese Tatsache nutzen wir aus, wenn wir den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ zweier komplexen Zahlen in der Gestalt $x + iy$ schreiben wollen:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 - i^2 y_1 y_2 + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) + i \operatorname{Im} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-3 + 4i}{2 - 5i} &= \frac{(-3 + 4i)(2 + 5i)}{(2 - 5i)(2 + 5i)} = \frac{-6 - 20 + i(8 - 15)}{4 + 25} = \frac{-26 - 7i}{29} \\ &= -\frac{26}{29} - \frac{7}{29}i \end{aligned}$$

図11 複素数の除法

(P. Bardy (2009) p. 205 より)

142. Berechnen Sie die Länge der Kopfschraube in mm!

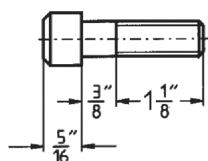


Abb. 2.9

図10 分数の応用問題

(P. Bardy (2009) p. 34 より)

2) 概要：ビジネススクールの感じで、職業学校、職業専門学校、マイスター学校などのいくつかの学校があり、この学校を最終的に修了すると学士の学位が取得できるとのことであった。

参観したクラスは、2年間企業に就職しながら、学校で勉強している生徒達であった。2年間で4セミスター学習し、1セミスターあたり520ユーロの授業料がかかる。

2ヶ月前から始まった代数の授業を参観した。基幹学校や実科学学校修了者など、いろいろな学歴の生徒がいるので、数学のスタートレベルを同じにしている。20歳から40歳の生徒のクラスで、大工などいろいろな職業の生徒がいる。

技術者用の代数の教科書を使った、二元一次連立方程式の授業であった。代入法とその練習2題を生徒が解いた後、 $y = \dots$ と式変形して等式を作る方法で、それら同じ問題を解き直すという授業であった。特に職業と関わらずに、連立方程式の一般的指導であり、レベルは基幹学校の内容である。中括弧の向きさえ分からない生徒もいたが、皆、真剣に学習していた。

教科書は、技術者のための代数書で、分数の足し算の後で、ねじの長さの足し算練習（図10）があるなど、工学系の練習問題がある。この教科書では、複素数の計算（図11）まで扱う。

3. Staatliche Berufsschule Erlangen

1) 住所：Drausnickstraße 1, D91052 Erlangen (<http://www.bs-erlangen.de/index.shtml>)

2) 概要：大きなイベントや会社のパーティーのオーガナイズをするイベントエージェントのクラスを参観する。就職していないとこの学校には入学できなく、就職先は、銀行、サービス業（イベント業）、商店などである。2年～3年で卒業試験がある。卒業試験には1回落ちても良いが、会社等の許可を得て再度通学の上で2回目に挑戦できる。ただし、3回目のチャンスはない。卒業後に、職業高等専門学校（Fachoberschule）に進学して卒業すると、アビトウア資格で、一般の総合大学は除いた、各分野の単科大学（Hochschule）に進学できる。このクラスは、90%がギムナジウムを出ているため、イベント員としてのレベルアップを目的にしている生徒が多く、そのまま職業を続けるという。

普段はイベント関係の仕事をして、集中授業を各科目10時間受ける。2週間授業+2週間職場を繰り返す。一般には2年～3年で卒業するが、学歴・既得資格・商工会議所・学校で判断して2年の短縮になることがある。

Ausgangssituation:

Sie haben bereits die Gesamtkosten der unten angegebenen Kreditangebote berechnet. Ihr Chef möchte aber von ihnen wissen, ob es nicht eine Möglichkeit gibt die 3 Darlehensvarianten auf 1 Blick hin vergleichbar zu machen.

Nun denken Sie über die Ihnen bereits bekannte Zinsformel nach:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

Mit welcher Variablen könnte man hier die Kreditkosten vergleichbar machen?

HypoVereinsbank Länderspark Group	HypoVereinsbank Länderspark Group	HypoVereinsbank Länderspark Group
Alternative 1: Fälligkeitsdarlehen	Alternative 1: Ratendarlehen	Alternative 1: Annuitätendarlehen
Darlehensbetrag: 32.000,00 €	Darlehensbetrag: 32.000,00 €	Darlehensbetrag: 32.000,00 €
Nominalzinssatz: 5,25 % p.a.	Nominalzinssatz: 5,55 % p.a.	Nominalzinssatz: 5,30 % p.a.
Disagio: 2 %	Disagio: 1 %	Disagio: 1,25 %
Bearbeitungsgebühr: 0,50 %	Bearbeitungsgebühr: 0,75 %	Bearbeitungsgebühr: 0,75 %
Laufzeit: 5 Jahre	Laufzeit: 5 Jahre	Laufzeit: 5 Jahre
Das Darlehen wird am Ende der Laufzeit komplett zurückgezahlt.	Das Darlehen wird in jährlichen Raten während der Laufzeit zurückgezahlt.	Das Darlehen wird während der Laufzeit in gleichbleibenden Raten zurückgezahlt.
Gesamtkosten:	Gesamtkosten:	Gesamtkosten:
		Annuität: 7.452,59 €

図12 本時の課題

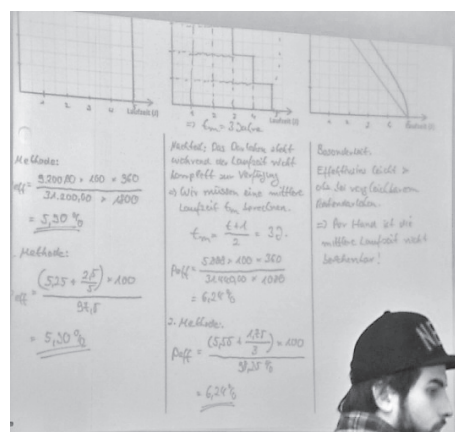


図13 課題プリントの解答

デュアルシステムでは学校と企業が協力していて、授業をサボる生徒の情報を企業に教えるなど、情報交換もしっかりされている。

授業料は無料で、遠くの生徒のために宿舎もある。州で決められたカリキュラムがあるので、それによって各学校がカリキュラムを作っている。教師のための研修講座があり、4年に1度10日間の研修義務がある。

この学校でも数学単独の授業はない。参加した授業では、銀行からの融資を受ける際の利子計算を扱っていた。このクラスでは、こういった金融関係だけでなく、イベント会場の部屋の大きさに対応した避難路面積の設計計算もするとのことである。イベントエージェントのための授業を開講している職業学校は少なく、ニュルンベルク、パッサウ、バイロイトなどから集

Aufgabe 1 Die Universal Event GmbH benötigt ein Darlehen über 500.000,00 €. Ihr liegen von drei Kreditinstituten Angebote vor.			
	Bank A	Bank B	Bank C
Nominalzinssatz in % p.a.	9	8,5	8,5
Disagio in %	2	3	4
Tilgungsvereinbarung	In gleichen Raten jährlich	Ein tilgungsfreies Jahr, danach in gleichen jährlichen Raten	Am Ende der Laufzeit (8 Jahre)
Tilgungsrate in %	12,5	20	-

1. Erstellen Sie für alle drei Angebote einen Tilgungsplan.
 V2. Ermitteln Sie die effektive Verzinsung für jedes Angebot.
 3. Welchen Einfluss haben tilgungsfreie Jahre auf den effektiven Zinssatz?
 4. Wägen Sie unter verschiedenen Gesichtspunkten ab, für welches Angebot sich die Universal Event GmbH entscheiden sollte.

図14 練習問題

図15 練習問題の解答

中講義を利用して受講に来ている。教科書はなく、教師がプリントを用意している。

授業内容は、イベントを実施するのに、銀行からローン3種類の提案があった。その実質年利を計算する問題である。初めは、総返却額から利子計算をする方法で求め、次には利子だけの計算を試みている。その後で、演習問題が3題出題された。工夫された授業内容で、生徒も真面目に受けている。同様な問題の簡単なものは基幹学校の卒業試験問題にも見られた。ドイツでは、同じ銀行からいくつかのローン返済計画が提案され、借り手が選択することが実際に起こる。その場面を想定して、イベントエージェントとしての学力を養成している。

VI おわりに

学校体系が複線型で、中等教育における学校が選択制であるため、複線型で扱う数学は、その生徒のレベルを考慮し、将来の進路にも合わせた内容となっている。例えば、大学進学を目指すギムナジウムでは、抽象的数学や幾何の証明をしっかりと指導する。一方、卒業後就職する基幹学校では、実際問題の解決に主眼がおかれ、幾何の論証は指導されず、複雑な図形の計量と求積が中心である。その上、各学校で卒業試験があり、卒業生の学力が一定以上であることを保証している。基幹学校や実科学校の生徒の多くは、卒業後に就職し、職業見習いとして働きながら職業学校や職業専門学校に通い、仕事に直結する数学を集中して学ぶ。

このように、学校で学ばれる数学が進路や仕事に直結していて無駄がなく、生徒に過重な負担をかけることなく効率的に数学の学習ができる環境が整えられている。これは、卒業試験制度と合わせて、生徒の学力保証に繋がっている。

単線型教育制度の日本の場合は、全生徒に一律の目標と内容を設定して、その到達度を評価しているため、進路や学力による内容の変更等が容易でない。さらに、現在は100%に近い高等学校進学率で、しかも、職業別の専門高等学校は、総合科高等学校へと改組され普通高等学校との差は少なくなった。このように、戦後の現教育制度ができた当初のように、高等学校入試で学力を測り、進路に応じた選抜をさせるという機能は、今日、低下している。その結果は、学力保証がないままに中等教育を修了していたり、適正・能力に合った就職意識が欠如してい

たり、さらには、大学生の学力や学習意欲の低下という問題に現れたりしている。複線型の導入と、学校教育から一端離れた人に対する学習機会の提供を国家的に支援できるシステムの設置を期待する。

本論文を執筆中に、新総理直属の「教育会議」が設置され、6・3・3・4制等を見直す学制改革が議論されるというニュースがあった。是非とも、本稿で紹介してきたような複線型の目標と内容の導入、さらに卒業試験の導入を検討していただきたい。

謝辞:ドイツ文献の翻訳に際しましては、植村友紀氏（ノートルダム小学校）、有野香里氏（熊本大学院生）、Eiko 出射 Zechlin 氏（ベルリン在住翻訳・通訳者）の協力を得ました。また、職業学校の訪問では、M. Hartmann 教授（カールスルーエ教育大学）、山中信之氏（エアランゲン・ニュルンベルク大学）、K. D. Graf 教授（ベルリン自由大学）にお世話になりました。お礼を申し上げます。

付記:本研究は、平成24年～平成26年文科省科学研究補助金課題番号「24531213」（代表 守屋誠司）の一部である。

参考文献

1. バイエルン州の各学校種の学習指導要領等は次の Web から閲覧できる。(2013年1月現在)
<http://www.isb.bayern.de/schulartspezifisches/lehrplan/mittelschule/>
2. バイエルン州の実科学校卒業試験問題は次の Web から閲覧できる。(2013年1月現在)
<http://www.realschule.bayern.de/lehrer/pruefungen/apr/m/>
3. P. Bastion, 他, “Rechenbuch Elektrotechnik”, Verlag Europa-Lehrmittel, 2001.
4. 寺田盛紀, 『新版ドイツの職業教育・キャリア教育 デュアルシステムの伝統と変容』, 大学教育出版, 2003.
5. 川口マーン恵美, 『ドイツは苦悩する』, 草思社, 2004.
6. K. Gierse, 他, “XQuadrat Mathematik 5-10I”, Oldenbourg, 2002-2005.
7. P. Bardy, D. Markert, “Mathematik für technische Berufe ALGEBRA”, Verlag Handwerk und Technik, 2009.
8. 守屋誠司・植村友紀, 「バイエルン州の基幹学校（Hauptschule）の数学教育について—教育目標と卒業試験問題から—」, 京都教育大学『教育実践研究紀要』第11号, 2011, 31-40.
9. 守屋誠司, 「テレビ会議を利用したエリート算数・数学教員養成のための基礎研究—数学教育学のピーク制とバイエルン州の数学教員養成から—」, 玉川大学教育学部紀要『論叢』2010, 2011, 43-53.
10. 富永順一, 「教育学部における数学的基礎力向上の試みとその教員養成への寄与」, 玉川大学『教師教育リサーチセンター年報』第2号, 2012, 57-68.

Linking Middle School Mathematics Education with Vocational Education: An Introduction to Vocational Education in Germany

Seiji MORIYA

Abstract

It is necessary to examine mathematics education and to link middle school mathematics with vocational education. Therefore, I have examined the educational aims, educational content, and completion tests in mathematics at Hauptschule (vocational preparatory schools) and Realschule in the German Free State of Bavaria, which has a multi-track system of secondary education. In addition, I would like to explain mathematics education in vocational schools (Berufsschule) in the German Free State of Bavaria and the German Federal State of Baden-Wurttemberg.

Keywords : mathematics education, vocational education, Germany, Berufsschule (vocational schools), middle school education

ドイツ・バイエルン州の基幹学校(Hauptschule)の数学教育について

—教育目標と卒業試験問題から—

守屋誠司

植村友紀

(玉川大学 京都教育大学名誉教授) (京都教育大学教育学研究科)

On mathematics education of Hauptschule in Bayern of Germany

— The focusing on educational objectives and national examination —

Seiji MORIYA Yuki UEMURA

2010年11月30日受理

抄録：本稿ではドイツ・バイエルン州の基幹学校(Hauptschule)の教育制度と教育内容に注目して、そこではどのように学力を保証しているのかを学習指導要領と卒業国家試験をもとに調べた。学習指導要領の教育目標は生徒らの卒業後の進路を考えて作られており、生徒らの学力を考慮した内容である。さらに、卒業国家試験は、それらの内容が理解されているかを測り、基幹学校の卒業生としての学力を保証する教育制度の一つであった。

キーワード：数学教育, 卒業国家試験, Hauptschule, ドイツ

I. はじめに

諸外国の数学教育の現状を知ることは、日本の数学教育の問題を見つけたり課題を解決したりする上で大いに参考になる。日本では、アメリカやイギリス、ドイツ、フランス、ソビエト等の数学教育が紹介されてきた。特に1980年以降は、アメリカの数学教育の内容が多く紹介され、学習指導要領にも影響を与えてきたと思われる。一方で、アメリカの以外の数学教育に関する情報は少なくなっている。

筆者らは、数学教育の参考とすべき国としてドイツに注目している。それは、伝統的な複線型の教育システムを継続し、さらに、卒業資格を与えることにより学力の保証を行っている点からである。ドイツは第二次世界大戦において敗戦国となりながらも、科学技術においては現在でも世界トップクラスを維持している。その要因の一つとして戦前から伝統的に続くこのドイツの教育制度にあるのではと思える。

日本も戦前は複線型であったが、戦後はアメリカ型の単線型になり今日まで続いている。さらに、優秀な生徒・学生を確保するという入学時の学力を重視する日本の入学試験制度の有効的機能も、進学率の向上と少子化によって一部の学校をのぞいて低下してしまった。近年の教育問題では、戦後のこれら教育制度上の疲労が現れているのではないかと考えられる。

さて、ドイツの学校の中でも、我々は中等教育の学校の一つである基幹学校(Hauptschule)に着目した。基幹学校は3種類ある中等学校のうちの一つであり、学力が低い生徒が通う学校と一般に言われている。基幹学校に進学し在籍する生徒の学力をどのように捉えて教育し、卒業時の学力保証をどのようにしているのかを調べることは、現在の日本で問題となっている学力低下と低学力生徒への対応という問題を解決するヒントになると考えたからである。

本稿では、基幹学校の学習指導要領に示された教育目標と卒業国家試験問題を調べたが、その際にバイエルン州の場合を例とした。それは、バイエルン州は戦前から続く伝統的な教育制度や教育観を持ち、ドイツ国内でも教育熱心な州と言われているからである。例えば、2003年PISA学力調査の数学リテラシーにおいて、ドイツ全体の成績は503点で第17位と世界平均以下の成績であったが、バイエルン州だけを見るとドイツ国内で最も良い533点を取っており、それは日本の534点とほとんど同じであった。

Ⅱ. ドイツの教育制度

ドイツの教育制度で大きな特徴として、州ごとに独立した教育制度、学校体系の複線型、卒業試験制度の 3 点がある。それぞれを説明しよう。

まず、州ごとに独立した教育制度である。教育目標や内容に関しては、日本のように全国一律で定めるのではなく、16 ある各州が独自に定めている。国としての統一された指針は存在するが、強制力はそれほど強くなく、各州が独自の学習指導要領を作成し教育が行われている。さらに、各学校では、州が作成した学習指導要領を基本としながらも、教師の判断により扱う内容や指導時間等を比較的自由に計画して授業が行われている。そのため、隣のクラスと違う内容が指導されているというケースも少なくない。

次に、学校体系は複線型で、中等教育における学校が選択制である。ドイツの義務教育は 6 歳から始まる。入学する年の 6 月 30 日迄に満 6 歳になった子どもたちは、日本の小学校にあたる地域の公立学校である基礎学校 (Grundschule) に 9 月から入学する。この学校は一部の州をのぞき 4 年制である。そしてこの基礎学校を卒業すると公立の中等学校である、日本の中学校に相当する基幹学校、普通高校に相当する実科学学校 (Realschule)、進学校に相当するギムナジウム (Gymnasium) から選択して入学するのが一般的である。これらの学校の違いを、その卒業後の進路の違いで説明しよう。基幹学校の生徒は、卒業後すぐに職業見習いとして仕事に就きながら職業学校 (Berufsschule) に週 1, 2 日ほど通い、職業の専門性とそれにつながる基礎学力を高める。従って、基幹学校のカリキュラムでは、卒業後すぐにこのシステムに対応できるようにと配慮されている。基幹学校は主に 5 年制をとっているが、希望者は 6 年間通いさらに高度な内容を学ぶこともできる。卒業時に生徒たちは少なくとも 15 歳になっており、日本の中学校卒業生とほぼ同じ年齢である。実科学学校の生徒は卒業後に職業専門学校 (Berufsfachschule) に通い、そこを卒業した後、基幹学校卒業生に比べより専門的技術や知識が必要な職業に就く。この学校は 6 年制であり職業に関するカリキュラムが盛り込まれている。卒業時に生徒はすくなくとも 16 歳になっており、その先の職業専門学校卒業時には 18 歳または、19 歳になっており、日本の高等学校卒業生とほぼ同じ年齢である。ギムナジウムの生徒は卒業後に大学への進学を希望している。ギムナジウムは最近制度が変わり 9 年制から 8 年制となった。この学校では大学進学のために、高度な教育内容を教えている。卒業時には 19 歳または、18 歳であり、日本の進学校といわれる高等学校を卒業した生徒と同じ学力レベルである。

基礎学校の卒業時に前述した 3 種類の中等学校から一つを選択する。子どもの希望も考慮されるのだが、基本的には親と基礎学校 4 年生の時の担任の先生が、子どもの成績や親の希望をもとにしてどの種類の学校に入学させるかを決定することが多い。大まかに基幹学校、実科学学校、ギムナジウムの順で生徒の学力や教育内容のレベルは高くなっている。最近では子どもの大学進学を希望する親が多いため、ギムナジウムへの入学者数が増えてきている。なお、進学後でも、ギムナジウムから基幹学校や実科学学校に転校することができる。この逆の転校も選択できるが、実際にはかなり難しい。近年、移民としてドイツに入国したドイツ語を母国語としない親の子女が基幹学校に入学しているため、言語を良く理解できないことによる低学力化とそれに伴った生徒指導上の問題が起きている。ドイツ人の親はこの状況を嫌い、学力的に無理をしてでもレベルの上の実科学学校やギムナジウムに子女を入学させるために、実科学学校やギムナジウムにおいても低学力な生徒の存在が問題となっているという。

最後は、卒業試験制度である。基幹学校や実科学学校、ギムナジウムの卒業資格は、卒業国家試験 (注: 国家とは州のことを指す) において一定の成績を獲得することで得られる。この試験は必修教科と選択教科のすべてで実施され、それら教科のすべてで合格しなければ卒業資格を獲得できない。バイエルン州においては、州として統一した試験問題が作られ、実施されている。州によっては学校ごとに作るようになってきているところもある。この試験によって得た成績はその後の就職活動や大学進学などに大きな影響を及ぼすため、単に卒業資格を取れば良いのではなく、好成績が求められる。

Ⅲ. 数学教育の目標と内容

1. 基幹学校の数学に関する教育目標と授業方法

基幹学校での数学教育の目標は次の通りである。

数学の授業には基幹学校の生徒の一般教養に重要な寄与をするという課題がある。数学の授業は、日常生活や仕事、そして職業でのこと、ならびに、基幹学校以上の教育課程での数学的課題を克服するための基礎を作り出す。内容的には、数学としての学問、工学や情報によって形成された社会からの要求、ならびに生徒の興味や要求、そして学力や応用力などの側面を考慮に入れる。

生徒は日常生活の問題や問題提起に対して、数学的方法を用いて把握し、理解し、そして解くことについて力をつける。しかし、彼らは日常の現象を数値化することの限界にもぶつかる。算術的・代数的・幾何学的課題を解くことを通じて、生徒に計算技能や順応性、そして問題解決思考を生み出せるように、さらに空間の想像力に目覚めるようにさせたい。

授業は、自分で考えることを促し、発想の豊かさを向上させ数学的な活動の楽しさをよび起こさせる事を目指すものである。

(Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel II.2, p.38, Aufgaben und Ziele des Faches より)

基幹学校のほとんどの生徒は卒業後に就職するために、職業に就いた時に対応できる力を形成しておくことが基幹学校における教育の第一の目標としていることが分かる。授業では「自分で考える」ようにするなど、問題解決のために数学を一人で使えることが目標となっている。なお、「限界にぶつかる」という表現は、現状の内容の理解だけで満足することなく、より高度な数学の学習を続けるようにと示唆していると思える。

学習指導要領には教育目標の後に次の授業方法に関する内容も記載されている。

基幹学校の数学の授業は帰納的方法(筆者注:生徒が内発的に数学に接するようにする事)を優先する。それは、生徒の日常世界の問題、あるいは興味を誘うような数学的問題提起から始まる。生徒の経験、体験の範囲から数字による実例を利用することにより、数の理解力が強くなり、さらに実際に生きている世界と数学との関係が明らかになる。計算の方法や解決の方法を変えてみることで、生徒たちが問題を把握することや自分ひとりで処理することの助けになる。

(Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel II.2, p.38, Methoden より)

授業を行う際には、日常世界の問題や生徒が興味を湧かせている内容などから始めるのが大切である、また、数学の授業以外のところで困難な問題に遭遇したときに、一人でそれを処理できるような力をつけさせる指導をするよう記されているのが特徴である。

2. 各学年の各領域における教育目標

各学年には、自然数、四則演算、幾何学、項と方程式、分数、現実の中の数学など、5 単元ないし 6 単元があり、各々の単元に目標が設定されている。この目標には主に 6 つの特徴がある。

1 点目は、様々な活動を通して理解を深め、抽象概念を形成して行く必要があると、指導方法に言及している点である。ほとんどの単元で何らかの活動が盛り込まれている。特に幾何の単元ではそれが顕著に表れている。例えば第 6 学年の「直方体と立方体の体積と表面積」では表面積や体積の概念を、単位立方体による体積の測定や立体の構成面の分析によって獲得すると述べている。

2 点目は、一つの概念やイメージを形成するのに一つの方法だけではなく、様々な方法で形成するべきであるとしている。例えば第 5 学年の「幾何学上の図形と関係」において、見取り図による活動を行うことで空間概念を鍛えることができ、さらに幾何図形を頭の中で思い描く練習を通して鍛えられるとしている。

3 点目は、ドイツの幾何の目標において論証についての文言がないということである。幾何以外の単元においても説明する程度にとどまり、論証は行われない。幾何では計量計算が重要視されており、基幹学校の生徒の学力と進路を考慮すれば、厳密な数学的な論証ができるよりも正確な計量計算ができる方が必要であるとの考えからであろう。

4 点目は、3 点目とも関連しているが、計算と作図が重要視されている点である。特にその違いが表れているのが幾何についての単元である。日本の場合、中学校では論証が中心の目標となっているが、ドイツの場合には作図と計算が中心になっている。作図ではコンパスと図 1 の三角定規と定規・分度器の機能を持つゲオドライエック(Geodreieck)を使った作図を行う。計算は平面幾何では面積と周囲の長さ、立体幾何では体積と表面積、密度から重量を求めることが中心となっている。

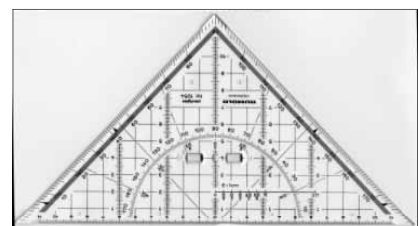


図1 Geodreieck

5 点目は、日本以上に現実の中の課題を取り扱うことを重要視している。第 5 学年、第 6 学年においては「現実の中の数学(Sachbezogene

Mathematik)」という単元がある。さらに、他の学年では、同じ単元はないが、各単元の中には日常や現実場面を取り扱うことが盛り込まれている。

6 点目は、主語の違いである。日本の小学校の学習指導要領の目標には「一できるようにする。」のように主語が児童ではなく教師となっている。しかしドイツの場合ほとんどが「生徒(Die Schüler)」になっている。生徒が授業を通して身につけるべき課題であり、生徒が自分自身で目標に向かう意味が強い。教師のための教育目標ではなく生徒のための学習目標であるという認識が強いからと考える。

3. 各学年の教育内容

各学年で扱う具体的教育内容を表 1 にまとめた。日本とそれほど変わらないが、先に述べた中学校で論証を扱わないことの他に、確率も扱われていないことがあげられる。日本以上の内容としては、複雑な一次方程式と、複雑な複合平面図形や立体図形の面積や体積の求積を扱っている点である。

表1 基幹学校における教育内容

	第5学年(小学5年相当)	第6学年(小学6年相当)	第7学年(中学1年相当)
数と式	100 万, 10 億, 1 兆 10 倍ずつの単位の表記法 - 不等号(大小関係の表示) - 数の見積もりや概数と概算(四捨五入) - 桁の違う数同士の四則演算 3 つの数での加法・減法・乗法の暗算 - 四則のそれぞれの筆算での計算方法 - 括弧のついた式の計算方法(加法と減法の交換法則) - 四則演算の計算の順序 1 次方程式(正の整数限定) - 同分母での加法減法 - 帯分数表記 - 小数の加法減法(小数以下第 3 位)	- 分数の四則演算(異分母の加法減法, 乗法, 除法) - 語彙の意味(分子, 分母, 真分数, 帯分数, 仮分数) - 小数の表記法(分数への変換, 小数点以下第 5 位) - 概数(小数, 四捨五入) - 四則のそれぞれの筆算の方法(小数) 1 次方程式(正の有理数) - 等式変形と移項の関係	- 四則計算(仮分数同士, 帯分数同士, 異分母の帯分数) - 小数から分数へ, 分数から小数への変換 - 循環小数 - 四則混合問題(小数, 分数) - 百分率(分数と小数と百分率の関係, 割合) - 負の数(整数限定) - 負を取りあつた四則演算(整数限定) 3 項以上の加法減法(計算の効率性) - 方程式(等式変形と移項, 式変形の際の説明の表記法) - 文字式の計算(2 文字以上)
図 形 (幾何)	- 立方体, 直方体, 三角柱, 円柱, 多角錐(主に三角錐・四角錐), 円錐, 球(名前の確認) - 長方形, 三角形, 円, 平行四辺形, 菱形(名前の確認) - 立体図形(頂点, 面, 辺, 側面, 底面, 上面) - 辺で構成されたモデル, 面で構成されたモデル(面体) - 立方体, 直方体の展開図 - 射影幾何学(見取り図のかき方) - 平面図形(直線, 線分, 曲線, 点) - 直角, 平行, 線対称図形, 拡大縮小の Geodreieck での作図方法 - 座標系での図形の表現方法 - 長さの単位(mm, cm, dm, m, km) - 正方形と長方形およびそれらの融合図形の面積と周囲の長さ	- 四角形, 平行四辺形, 菱形, 台形, 扇型, 等脚台形, 長方形, 正方形, 円(名前の確認) - 座標系を使った作図(正方形, 長方形, 菱形, 平行四辺形) - 円の作図 - 平行移動 - 角の意味(鋭角, 直角, 鈍角, 平角, 360°) - Geodreieck を用いた角の取り方 - 五角柱, 六角柱(説明程度) - 回転体, 見取り図のかき方) - 射影幾何 - 立方体と直方体の体積と表面積	- 二等辺三角形や正三角形の性質 - 鋭角三角形, 直角三角形, 鈍角三角形 - 四角形(菱形) - 三角形の内角の和 180° (帰納的証明) - コンパスや Geodreieck を用いた作図(三角形や四角形) - 平行四辺形の面積 - 台形, 平行四辺形, 菱形, 二等辺三角形, 正三角形の周囲の長さ - 座標系を用いての平行四辺形や三角形の表示 - 三角柱の表面積と体積 - 台形, 菱形, 扇型の面積および周囲の長さの求め方 - 複合図形の面積および周囲の長さ
関 数, 資 料 の 活 用	- 棒グラフ(メモリの読み取り, グラフ表記法) - 資料の読み取り - 現実問題(お金, 質量, 時間, 長さ, 面積, 容積, 水, 街の中, 学校)	- 資料の読み取り - 現実問題(お金, 質量, 時間, 長さ, 面積, 容積, 水, 街の中, 学校)	- グラフ表示の有効性 - 座標系を用いて表現 - 比例関数(負の数はない, 式, グラフ, 表) - 比例算, 比例関数の計算・円グラフや棒グラフ(百分率の表示変形) - 現実問題(お金, 質量, 時間, 長さ, 面積, 容積, 水, 街の中, 学校)

	第8学年(中学2年相当)	第9学年(中学3年相当)
--	--------------	--------------

数と式	・百分率(概数), 千分率 ・百分率から千分率へ, 千分率から百分率への変換・負の数(有理数まで拡張) ・自然数, 整数, 有理数(違い, 大小関係) ・四則演算(負の数の有理数を含む) ・四則混合問題 ・交換法則, 結合法則, 分配法則 ・文字式の計算 ・1次方程式の解き方(等式変形と移項, 小数が入ったもの) ・1次方程式の解が負になる場合 ・他分野の公式と方程式を用いた問題	・百分率 ・現実問題(利息, 年利, 月利, 日利) ・指数(10の指数と指数が2のもののみ) ・10の指数(分数表記, 小数表記) ・平方根と2乗の関係, 計算 ・電卓を用いた平方根の計算方法 ・1次方程式(分数が混ざったもの) ・文字式の計算 ・他の分野との融合(幾何と物理など) ・方程式を立式すること
図形 (幾何)	・コンパスと Geodreieck を用いた作図(垂直二等分線, 垂直, 平行, 三角形, 角の二等分線, 座標系を用いたもの) ・融合図形(三角形, 平行四辺形, 台形, 円など), 不定形の面積 ・円の円周と面積(πではなく3.14使用) ・扇形の弧の長さとの面積 ・角柱や円柱 ・投影図による図形の表現方法(立体図形の推測) ・見取り図のかき方(角柱, 円柱) ・体積, 表面積(一般的な角柱, 円柱)・比を用いた文章問題	・コンパスを用いた模様作成 ・平行四辺形, 菱形, 正多角形(正五角形と正六角形が中心)の性質(論証は不要) ・比を用いた拡大縮小 ・三平方の定理(計算のみで, 証明は不要) ・複雑な複合図形の面積や表面積, 体積 ・立体図形の対角線 ・投影図と見取り図(立方体, 直方体, 角柱, 円柱, 円錐, 角錐) ・三角錐, 四角錐, 円錐(体積, 表面積) ・複合図形(角柱と角錐, 円柱と円錐など)
関数	・比例関係(整数倍) ・反比例関係(整数倍) ・比例, 反比例グラフの読み取り ・速さ, 密度, 価格, ローンに関するもの	・比例, 反比例(文章問題, 融合問題, 小数・分数倍)
資料の 活用	・百分率と千分率(グラフ, 表) ・グラフや図表の読み取りや解釈 ・現実問題(国家予算, 家計, エネルギー)	・エクセルによる利子計算 ・記述統計(テレビの視聴, エネルギー消費, 交通, 労働と仕事, 平均値) ・グラフや表の作成(適したもの)

IV. 卒業のための国家資格

基幹学校, 実科学校, ギムナジウムにはそれぞれ卒業資格を与えるための試験が存在しており, 各教科に設けられている。必修科目と選択科目があり, すべてにおいて一定以上の成績をとらなければ, 卒業資格が与えられないことは先に述べた。本章では図2の2007年度に行われたバイエルン州の数学の卒業国家試験について紹介する。なお, 基礎学校では卒業国家試験は無いが, 共通テスト程度のものであり, その成績は進路決定の重要な資料となっている。

バイエルン州では2つのタイプの試験が用意されており, その2つの合計点によって成績がつけられる。Aタイプの試験問題は, 電卓や公式集を使用せずに解く問題である。Bタイプの試験問題では, 電卓や公式集を使用して解くことが許されており, 3つの問題のグループがあり, そのうち2つのグループの問題に答えなければならない。A, Bの試験は同じ日に休憩を挟んで行われる。Aタイプは16点満点で試験時間30分間の試験であり, Bタイプの問題は32点満点の試験時間70分間の試験である。合計点数48点満点で成績4である16点以上とらなければ, 数学の卒業国家試験に合格したことにはならない。以下はAタイプ, Bタイプの各問題とその問題に対するコメントである。

49001

**QUALIFIZIERENDER
HAUPTSCHULABSCHLUSS
2007**

BESONDERE LEISTUNGSFESTSTELLUNG AM 27.06.2007
Teil A: 8.30 Uhr bis 9.00 Uhr
(Teil B: 9.10 Uhr bis 10.20 Uhr)

MATHEMATIK

Teil A

Bei Teil A der besonderen Leistungsfeststellung zum Erwerb des qualifizierenden Hauptschulabschlusses im Fach Mathematik sind Taschenrechner und Formelsammlung als Hilfsmittel nicht zugelassen.

Gesamtbewertung für Teil A und Teil B:

Platznummer (ggf. Name/Klasse): _____

Punkteverteilung:	Punkte:	Teil A:	von
Note 1 ⇒ 48,0 - 41 Punkte			16 Punkte
Note 2 ⇒ 40,5 - 33 Punkte			32 Punkte
Note 3 ⇒ 32,5 - 25 Punkte			48 Punkte
Note 4 ⇒ 24,5 - 16 Punkte			
Note 5 ⇒ 15,5 - 8 Punkte			
Note 6 ⇒ 7,5 - 0 Punkte			

Note:

Erstkorrektor: _____

Zweitkorrektor: _____

図2 タイプAの表紙

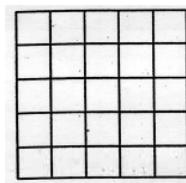
1. タイプ A の問題

問1 1 リットルあたりの値段を求める問題であるが、販売店での表示価格ラベルが示されているだけで問題文の記載はない。しかし、ドイツでは、価格ラベルに1 リットルや1kg あたりに換算した値段が表示されているため、何が問われているかは生徒が分かる。



20×0,5 となっているのは、0.5 リットルのアップルサイダーが 20 本入っているという意味であり、日本における掛け算とは乗数と被乗数の意味が逆となっている。また、小数点の表記も、ドイツでは「,」を使用している。

問2 右図が与えられていて、問題文には「全体の面積の 24%分に色を塗りなさい。」と指示されている。この図はマス目が 25 個あり、全体を 100%であるとすれば、一つあたり 4 %分になるので、6 マス分を塗りつぶせばよい。24%という、一見すると 25%とは違い、塗ることが難しいように感じられるが、正確にマス目一つ分を計算すれば塗りつぶすことができ、生徒の観察力と考察力を試している。



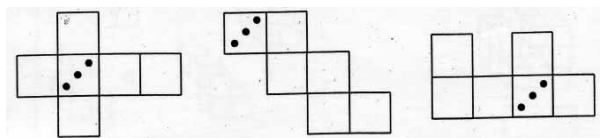
問3 数列が与えられており、空欄に当てはまる数字を答える問題である。a)は順番に差が 1 ずつ増えているので簡単だが、b)はそれぞれが $2n-1$ の 2 乗の数になっていて難しい。数列は指導されていないので一般項を求めない。差に注目して、直観や試行錯誤によって規則を見つけ出せるかを問う問題である。

a)	14	13	11	8	4	-1	
b)	1	9	25	49			

問4 不等号を答える問題であり、指数表記されている数式を小数表記へと変換するか、または小数表記されているものを指数表記へと変換できるかが評価される。例えば a)の問題であれば $1.2 \cdot 10^5$ を 0.000012 と変換するか、または、0.0012 を $1.2 \cdot 10^3$ と変換するかのどちらかを行わなければならない。仕事で使うであろう有効桁数による数値表現の理解が問われている。

a)	$1,2 \cdot 10^{-5}$		0,0012
b)	$4,2 \cdot 10^7$		$0,042 \cdot 10^9$

問5 次のような 3 つの展開図が与えられていて、「サイコロの場合には向かい合っている面の点の合計は 7 個になっている。次の立方体の展開図のどこに 4 の点をかけばよいか。かく必要があるものだけを記入せよ。」



正しい展開図を選ぶとともに点の位置も考えなければならない。まず、展開図からサイコロができてあがる様子を頭の中でイメージできるか否か、次に、どの面が平行になるか、空間における対応する面の関係を正しく把握できるかが問われている。このような情報が多く与えられていて、その中から必要なものを選択させる出題方法は参考になる。

問6 問題は右のような空欄がはいった式が示してある。この式が成り立つように空欄に数字を当てはめる問題である。係

$$4 \cdot (\square \cdot x + \square) - 4 = -12 \cdot x + 20 - 4$$

数がすべて 4 の倍数なので、4 で因数分解してしまいそうになるが、括弧と等式の性質をしっかり理解しているか評価する問題である。左辺に -4 があるが、右辺をみると同様に -4 があることから、この -4 は空欄を考える上で何の影響もないことが判断でき、右辺の -4 を除いた式を因数分解すれば左辺の式と同じ形になる。空欄は同じ数がいいるとは限らないので、それぞれの空欄に対して別の文字をおき、方程式として解くことはできない。既知の知識の中で、問題解決に有効な知識を探し出し、それを利用する力もこの計算問題においても求められている。これも、日本ではあまりみられない問題である。

問7 ノートパソコンの購入方法が 3 種類有り、どのプランで買うと一番安いかを説明する問題である。

「Aのプラン…ノートパソコンの価格は 1200 ユーロだが、現金での支払いの場合 3%引きされる。

Bのプラン…ノートパソコンの価格は 1000 ユーロだが、付加価値税 19%かかる。

Cのプラン…現金で 300 ユーロ払い、残りは 8 回の分割払いで 1 回あたりの支払額は 110 ユーロである。手数料として 65 ユーロかかる。」

日常で出会う、身近な問題である。まずそれぞれのプランの意味を理解していなければならない。例えば付加価値

Angebot A	Angebot B	Angebot C
1200 € bei Barzahlung 3 % Skonto	1 000 € zuzüglich 19 % MwSt.	Anzahlung: 300 € 8 Raten zu je 110 € Bearbeitungsgebühr: 65 €

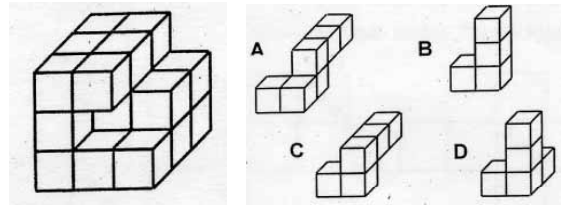
値税はどのように支払額に影響を及ぼし、どのように計算すれば良いのかということは当然知っているものとして取り扱われている。その上、それぞれを正確に計算し、その計算結果をもってどれが一番安くなるのかを「説明」しなければならない。単に計算できるだけでなく、計算の意味や計算方法、その結果の意味を第三者に正確に伝える表現力も問われている。

問8 ある生徒の成績が、6回のうち5回目までの示された表と6回分の平均点が与えら

4	2	3	1	2	?
---	---	---	---	---	---

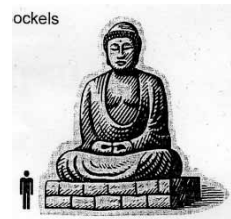
れているとき、6回目の成績を求める問題である。平均の求め方や、その意味を理解しているかどうか問われている。

問9 立方体で構成された図が掲載されている。その右側にAからDまでの図があり、「立方体になるように立体を補って完全なものにせよ。A、B、CまたはDのうちどれがぴったり当てはまるか。」



空間の中で、その構成要素を分析できるかが問われている。知能テストでみられる問題だが、日本では数学の問題として出題されることは少ない。しかし、空間の幾何をほとんど指導していない日本の中学校で、どの程度の正解率が出るかを調べてみる価値はあろう。

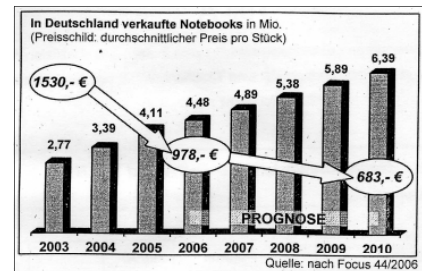
問10 右図があり、「旅行客が像の隣に立っている。土台を含めた像の高さの見積もりを説明せよ。」



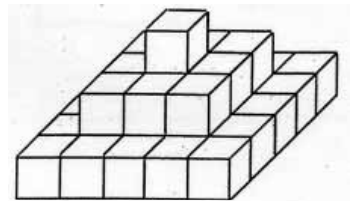
像の高さや人の高さが与えられてはおらず、人の身長を自分で想定し、それをもとに像の高さを推測する。日常では多く見かける場面であるが、必要な情報を自分で探すこの種の問題は、日本では出題される機会は少なかった。

問11 グラフが与えられ、「2003年から2006年までの間にノートパソコンの価格は何%低下したか。」

このグラフには、問われている内容を求めるのに不要な情報も載せてある。例えば、2010年の値段の予想値は必要ではないし、売り上げ台数の推移も必要ではない。このように、日常の場面では欲しい情報だけが記載されている場面は少ない。それに対応できるか、つまり、必要な情報だけを抜き出して、問われている内容に答えることができるかが問われている。問10や問11のように、日本でも、情報不足、情報過多の課題から、必要な情報を見つけて解答するといった出題を多くする必要があるだろう。



問12 右図が与えられており、その図の中にピラミッド型の立体を構成している立方体はいくつあるか求めさせる問題である。見えている部分はもちろんのこと、見えていない部分も形から推測し、個数を考えなければならない。これも、問9と同様に日本では試験に出題されない問題であろうが、意外にできないのではないかとと思われる。



以上のように、タイプAは基本的な問題である。日常生活で見かける、もしくは必要となるかもしれない内容に対して簡潔に答えられることが問われている。電卓や公式集を使用せずに解ける内容であり、最低限の技能と知識が求められている。しかも、単に数値を答えるだけでなく、説明させているところにも特徴がある。

2. タイプBの問題

グループ1

問1 問題は文章だけで与えられ、「ディスコ ムーンライトにおいて、お客の音楽の好みに関するアンケートを行い、結果は次のようになった。6分の1はメタルが好みであると答え、3分の1はロックを好んで聴いており、ヒップホップはロックよりも28人多く、残りの36人はテクノを選んだ。それぞれの音楽の好みには何人ずついるか。方程式を用いてこの課題を解説せよ。」

方程式の文章題で求め方も評価対象となっている。与えられている条件の理解、方程式の立て方、方程式の解き方など、様々な要素をみることができる。

問2 バイエルン州の各行政区域の人口数を示した表が与えられ、

「a) バイエルンにおける男性と女性の人口をパーセンテージで示せ。

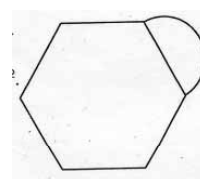
b) 円柱ダイアグラムを用いて Schwaben の男性と女性の数を示せ。ただし、1cm を 10 万人とする。」

Regierungsbezirk	Bevölkerung		
	insgesamt	männlich	weiblich
Oberbayern	4 258 210	2 082 577	2 175 633
Niederbayern	1 195 450	588 907	606 543
Oberpfalz	1 087 930	535 211	552 719
Oberfranken	1 097 589	533 948	563 641
Mittelfranken	1 711 539	835 717	875 822
Unterfranken	1 339 592	658 231	681 361
Schwaben	1 788 158	876 156	912 002
Bayern	12 478 468	?	6 367 721

Quelle: Bayerisches Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung

a) はパーセンテージの意味、求め方を知っているかが問われている。また、この問題のように桁数が多い計算は電卓を用いて計算する。さらに有効桁数が示されていないことから、生徒自身に有効桁数を設定させている。これにより、人口を比べるときに、どのぐらいの有効桁数が適しているのかを考える、表現することが問われている。b) では円柱ダイアグラムというグラフを知っていて、正確に描けるかどうか問われている。

問3 右の図が与えられていて、半円の面積が 25.12dm^2 とするときの、正六角形の面積を計算する問題である。円周率は指定されておらず、問題に与えられている値から円周率が 3.14 であることを推測するか、または、前提として 3.14 であるということを知っておかなければならない。さらに、円の面積を求める公式から半径または直径を求めること、そして、その半径または直径を用いて正六角形の面積を求めることが問われている。なお、正多角形の求積公式は公式集に掲載されているので、それを参照することもできる。



問4 「マヤとフローリアンはともに職業見習いである。

a) マヤの毎月の実収入は 407.94 ユーロである。彼女の控除税率は 21.55% である。マヤの税込みの給料はいくらか。

b) フローリアンは税込みで 576 ユーロ稼いでいる。彼の給料は 2.5% 高くなる。控除税率 22.5% を用いて、彼の新しい実収入を計算せよ。」

これを解くためには控除税率の意味や仕組みを知っていなければならない。理解できていれば、計算式も簡単にできるであろう。この問題の特徴は、就職し給料を得たときに初めて払う税のことが取り扱われている点である。基幹学校の生徒たちは卒業後に職業に就き給料をもらう者が大半であるため、それに対応した問題となつていられる。しかも、税率が 21.55% と 22.5% という具体的な数値であり、所得により税率が変わるところもより現実に近い場面を設定し作られた問題であろう。

グループ 2

問1 右の方程式を解く問題である。難易度は日本高校入試レベルと同じかそれ以上である。分数式の中に小数も入っており、工夫して計算する必要がある。

$$\frac{3,5 \cdot (2x - 24)}{7} - 4 \cdot (x - 2) = \frac{5x - 138}{3}$$

また、電卓だけで計算することは困難であり、手計算で式を簡単にしなければならない。等式における性質を十分に理解し、さらに計算の効率を考え、どの項から簡単にしていくべきなのか、どのように簡単にしていくべきなのか、様々な要素が問われている問題である。

問2 図は与えられておらず、文章だけが与えられている。問題は、

「点 A(-4 | 2) と点 B(6,5 | -4) を単位 1cm の座標系にせよ。また、直線 g は両方の点を通っている。

a) 直線 g は点 s において x 軸で分けられている。点 s の座標を求めよ。

b) 点 c(6 | 1) を通り、直線 g に対して垂直な直線を描け。

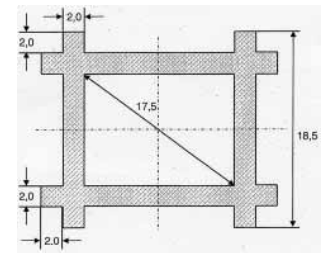
c) 点 c(6 | 1) を通り、直線 g に対して平行な直線を描け。」

グラフ用紙は与えられてはおらず、自分で座標軸等をかき、点を取り、図をかかなければならない。日本では主題されない方法であろう。まず直線 g の式が求められなければこの後の問題を解くことは難しい。直線の傾きの意味が分からなければ、垂直及び平行の線を正確に描くことはできない。特に b) は難しいであろう。式を求めさせるのではなく、その式の持つ意味を視覚化できるかが問われている。なおドイツでは点の座標の表記方法は上記のように x 座標と y 座標の間に「|」を用いて、(x 座標 | y 座標) と表す。

問3 右の図が与えられていて、色のついた部分の面積を求めるという問題である。ピタゴラスの定理を使って中

央の長方形の横の長さを求めなければならない。複雑な図形であるため、解答に工夫が必要である。長さの単位は **cm** という指定もある。

この図形は、建築資材として見かけそうな形であり、卒業後の職業を意識した問題である。日本ではまず出題されない図形であろう。



問4 文章題になっており、「バターとヨーグルトは乳製品である。

a) 50g のバターを製造するのに牛乳が 1 リットル必要である。80kg のバターを製造するのに何リットルの牛乳が必要か。

b) 1 リットルの牛乳は 1030g のヨーグルトを生み出す。1500 リットルの牛乳で作られるとき、150g ずつ容器に詰めると何個のヨーグルトができるか。」

a) では単位変換が正しく行えるかどうか問われており、g を kg に、または、kg を g に変換することが求められる。b) は全体の量から詰めることのできる数を求める問題である。これらは、日本では小学校 5 年生の割合の問題である。

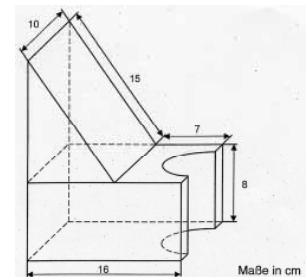
グループ 3

問1 日本の高校入試レベルか、それ以上の問題である。小数点以下

$$7,04 \cdot (x - 0,2 : 0,08) - 1,225x = -800 \cdot (-0,002) + 3x - 0,125 \cdot (1 + 8x)$$

第3位までの数が含まれており、小数の末位は統一されてはいない。計算は主に電卓で行うが、正確に数を読み取り、計算しなければ桁がずれてしまう。係数の計算は電卓を利用するが、式変形は手計算を必要とする。なおドイツでの「:」は日本の「÷」の記号にあたる。

問2 右図において、欠けている半円柱の底面の直径が 8cm であるとき次の立体の体積を求める問題である。三角柱と直方体と半円柱の複合図形である。構成されている立体を分析する、さらに、体積を求めるのに必要な値を自分で求めることが必要となる。立体の上部にある図形は、三角柱であることに気づきどの面を底面と捉え、どの辺を高さと捉えるかを考え、ピタゴラスの定理を用いて、必要な辺の長さを求めることになる。



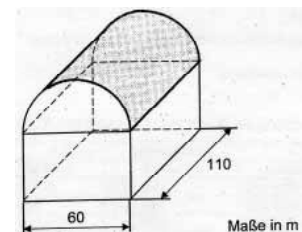
問3 文章問題となっており、「ヘラーさんはスクーターとヘルメットを買いに行きます。

a) スクーターを買うために、銀行から支払い期間 8 ヶ月間で 2100 ユーロを借りた。銀行の年利は 8,5 % である。さらに手数料として、貸付金総額の 2,75% 必要であった。彼は銀行に総額いくら払わなければならないか。

b) ヘルメットは店頭価格の 30% 引きにしてもらい、126 ユーロだけ支払った。ヘルメットの最初の店頭価格を求めよ。」

現実で起こりうる場面が設定されている。銀行から借りる場合の利息計算ができるかどうか、銀行から借りた場合の基本的な返済の仕組みを理解しているかが問われる。さらに、現実に近いように手数料まで設定してある。単に数学の力を問うだけでなく、社会に通用する知識と計算技能を持ち合わせているかも問われている。

問4 右図が与えられていて、「美術館の最上階部分は半円柱型になっている。この反った屋根は外側に特別なコーティングをする必要がある。このコーティングは 1 平方メートルあたり、労働工賃も含め 160 ユーロ費用がかかる。市議会はこのために 150 万ユーロを財政から用意した。この金額で十分に足りるだろうか。」



単に表面積を求めさせる問題ではなく、実際に起こりそうな問題設定となっている。まず、半円柱の表面積を正確に求める際に円周率は自分で設定する必要もある。さらに、表面積を求めるだけでなく、その結果を用いて単位面積あたりの労働工賃と予算が示してあり、その予算で十分かどうかを検討する必要がある。費用を求め、その費用と予算とを比較し、足りるかどうかを判断するという現実が起こりうる内容になっている。

以上がタイプBの問題であり、日常生活に必要な知識や、それらを解決する方法が問われている問題が多い。公式は暗記の対象ではなく、その適用場面の判断や実際に計算できるかが評価される問題である。計算の正確さよりも計算方法の妥当性に重点が置かれている。%を使った割合の問題は小学校高学年程度のレベルであるが、一

元一次方程式の問題は高校入試レベルであり、成績下位の生徒を対象としている割にはレベルが高い。図形の求積では、ピタゴラスの定理の応用が到達目標となっていることがわかる。



写真1 ミュンヘンの基幹学校



写真2 過去問題による演習

卒業資格試験への対策が各学校で実施されている。写真1は2010年3月にミュンヘン校外の基幹学校を訪ねたときの試験対策の授業風景である。写真2のように担任が過去問題を用意し、生徒がペアになってそれを解いている。

V. おわりに

基幹学校は、卒業後に職業学校に通いながら職業見習いとして働くであろう生徒が通う中等学校である。教育目標は生徒の卒業後のことを前提とした内容となっている。そしてその目標が達成できているかどうかを州単位の卒業試験で判断し、卒業生の学力が一定以上であることを保証している。

日本の場合、中学校入学段階で3年後や将来の進路をはっきりと意識している生徒は少ないであろう。しかし、基幹学校のほとんどの生徒は入学の時点で進路を決めている。目標はその卒業後の進路にあわせて設定すればよい。日本のものよりも具体的で明確になりうる。取り扱う内容に関しても、ギムナジウムや実科学校に比べ学力が低い生徒が多いことを踏まえ、彼らの学力に適し、かつ、必要性のある内容を選択すればよい。これは、生徒に過重な負担をかけることなく効率的な指導ができ、生徒の学力保障にもつながる。日本では単線型のために中学生に一律の目標を設定してその到達度を評価しているが、今後はドイツのような複線型の目標と内容の導入、さらに卒業試験の導入を検討する必要がある。

参考・引用文献

1. バイエルン州の基幹学校の学習指導要領は次のホームページから閲覧できる。
<http://www.isb.bayern.de/isb/index.aspx>
 ISB - Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München-Lehrplan für die bayerische Hauptschule -
 1-1 Kapitel II.2 <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=13aa2580247de0e6b87c87c24abe3907>
 1-2 Jahrgangsstufe 5 <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=20bcd3e06f1b4865ee526c75d030147a>
 1-3 Jahrgangsstufe 6 <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=15497f5621e148ad7f76d5a4a9f7c275>
 1-4 Jahrgangsstufe 7 <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=867cc9703599a3ab672e67cb19986cdc>
 1-5 Jahrgangsstufe 8 <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=b465c24c93879a028c04af4f7b8c1f2b>
 1-6 Jahrgangsstufe 9 <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=5eae5da17f344be57fae0ee7d2ed610b>
2. マックス・プランク教育研究所研究者グループ著、天野正治・木戸裕・長島啓記訳『ドイツ教育のすべて』、東信堂、2006
3. 守屋誠司、「ドイツの文化環境と教育制度から示唆される日本の数学教育の課題」、『京都教育大学実践教育研究紀要』第7号、2007、21-30
4. 「QUALIFIZIERENDER HAUPTSCHULAB-SCHLUSS 2007 MATHEMATIK Teil A」, 「同 Teil B」

離散数学（幾何・情報通信）からの学習題材の提案

東海大学理学部情報数理学科

酒井利訓

著者は所属する東海大学において幾何学や離散数学の授業をもつほかに、付属校・提携校の生徒や、数学に関心のある一般の高校生を対象とする講座等をもつ機会がある。本稿では、それらの講義で扱ってきた題材の中からとくに離散幾何学や情報通信に関わる離散数学における高校生を対象とする学習題材をいくつか提案する。

1 整数距離の点集合

著者が所属する東海大学では、全国にある 20 の付属校・提携校（ともに中学校・高等学校）に所属し、選抜試験を通過した生徒を対象とする学園オリンピックとよばれる学びの場が与えられる。数学部門では 2024 年度は 16 名の生徒が参加し、7 月 30 日から 8 月 2 日にわたってオンラインで 4 名の講師の講義を受け、そこで提示された課題に取り組んだ。その成果は、8 月 6 日、9 月 7 日の中間発表会および 11 月 9 日の成果発表会で発表された。

著者は 2024 年度の学園オリンピックにおいて、「互いに整数距離にある格子点の集合」を題材とする下記の課題を出題した。

課題 1. どの 2 点間の距離も整数である 4 つの格子点で、どの 3 点も同一直線上になく、かつ、4 点が同一円周上にならないような点の配置を見つけよ。また、そのような 4 点の構成方法として異なるものをできるだけ多く見つけよ。

課題 2. どの 3 点も同一直線上になく、かつ、どの 4 点も同一円周上 ない 5 個の格子点の配置を考える。2 点間距離として現れる 10 個の値のうち、9 個 (以上) が整数となる点の配置を見つけよ。(できれば最大距離ができるだけ小さいものを見つけよ。)

課題 3. 図 1 はどの 2 点間の距離も整数で、どの 3 点も同一直線上に なく、かつ、どの 4 点も同一円周上 ない 6 点の配置である。この配置はどのように向きを変えても格子点だけでは実現できないことを証明せよ。(線分の長さの比や角の大きさは正確であると考えてよい。)

以下において、これらの課題や取り組ませ方、生徒の解答例などについて解説する。

1.1 事前の解説

課題に先立ち、背景となる問題や問題解決に役立てられそうな知識や考え方として、下記の項目を解説した。

- (1) 用語の解説：平面上の点について、どの 3 点も一直線上にないとき、それらは一般の位置にあるという。以下では、点集合の点は一般の位置にあるものとする。また、座標平面上の点で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ。
- (2) 三平方の定理およびその逆：今回の参加者は高校生だけであったため、確認のみであった。

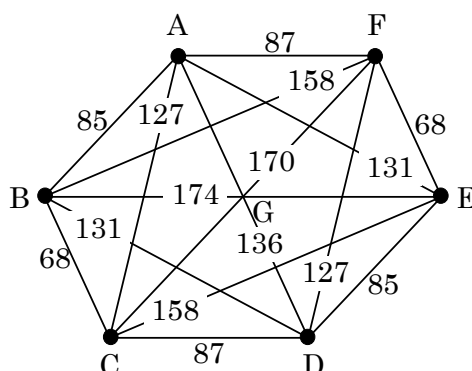


図 1. [23] の図にラベルを追加

- (3) ピタゴラス数 : $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$ を因数分解することにより $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$ を導く. これと三平方の定理の逆により, $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ (m, n は自然数で, $m > n$) がピタゴラス数であることがわかる. さらに, 「 m, n は互いに素で, 偶奇が異なる」とすることで, 原始ピタゴラス数 (最大公約数が 1 であるピタゴラス数) で a が奇数であるものが得られる.
- (4) トレミーの定理: 円に内接する四角形 ABCD (図 2) について, $AB \times CD + DA \times BC = AC \times BD$ が成り立つ.
- (5) ピタゴラス三角形を用いることで, 一般の位置にあり, どの 2 点間の距離も有理数である 6 点の配置が得られる. 図 3 は 3 : 4 : 5 のピタゴラス三角形を用いた場合の例 [7] であり, トレミーの定理により $x = 7/5, y = 24/5$ が得られる. 原点を中心とする 5 倍の相似拡大により, どの 2 点間の距離も整数である 6 点 that 得られる.
- (6) 異なる 2 個の原始ピタゴラス三角形に対して, 斜辺の長さをそれらの公倍数となるように拡大したものを考える. これらを組み合わせ, さらに適当な相似拡大を行うことで, 一般の位置にあり, どの 2 点間の距離も整数である 10 点の配置が得られる. 図 4 は 3 : 4 : 5 のピタゴラス三角形と 5 : 12 : 13 のピタゴラス三角形を組み合わせた場合の例である.
- (7) 異なる k 個の原始ピタゴラス三角形を用いて (7) と同様に考えると, 一般の位置にあり, どの 2 点間の距離も整数である $4k + 2$ 個の点の配置が得られる.
- (8) 「平面上の無限個の点からなる集合 S について, S のどの 2 点間の距離も整数であるなら, S の点は同一直線上にある (Erdős-Anning の定理)」ことの証明 (アウトライン): 3 点 $A, B, C \in S$ が同一直線上にないものとする. これら以外の S のどの点も A と B から整数距離にあるので, $|PA - PB| \in \{0, 1, 2, \dots, AB\}$ で定まる有限個の双曲線 (退化した場合なども含む) 上にあり, 同様に $|PA - PC| \in \{0, 1, 2, \dots, AC\}$ で定まる有限個の双曲線上にもある. 2 つの双曲線の交点は高々 4 個だから, S は有限集合でなくてはならず, 矛盾である.
- (9) 「どの 2 点間の距離も奇数であるような平面上の 4 点は存在しない [21]」ことの証明 (アウトライン): 各辺の長さが奇数である四面体の体積を V とすると $V^2 = (8k + 4)/288$ (k は整数) と書ける. 一方, どの 2 点間の距離も奇数であるような平面上の 4 点が存在するならば, そ

これは各辺の長さが奇数である体積 0 の四面体の 4 頂点と見なせる。しかし、 $(8k+4)/288 \neq 0$ だから、矛盾である。

(5)～(7) は、実質的には有理数距離にある点の配置を見つけることが問題の本質部分である。生徒に与えた課題においては、「整数距離にある格子点の配置」として出題しているが、これについても、実質的には有理数距離にある有理点 (x 座標も y 座標も有理数である点) の配置を見つけることが本質部分であり、以下の解説における前提にもなっている。

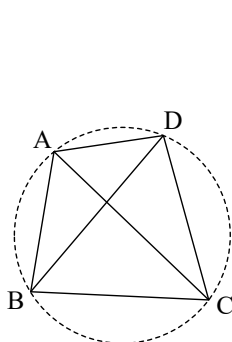


図 2

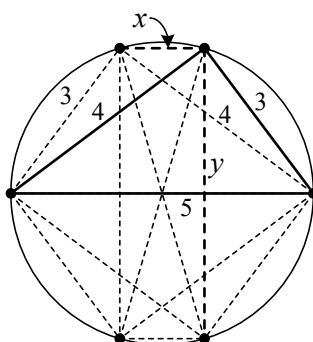


図 3

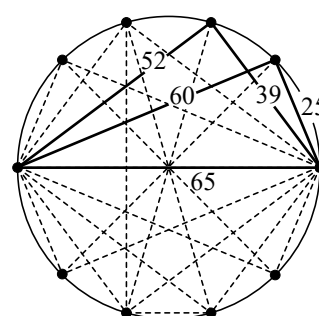


図 4

1.2 課題と解説

上記で得られる「互いに整数距離にある点の集合」はいずれも、一般の位置ではあるが、同一円周上にある点からなる集合である。生徒たちに課した上述の課題では、「どの 4 点も同一円周上にない」という条件を追加し、さらに、「どの点も格子点である」という条件が課されている。「格子点」の条件を課さない場合、6 点からなる点集合 [23] をインターネットで見つけることができる。また、事前の説明で紹介されたピタゴラス三角形を利用しようと生徒が考え、直角をはさむ 2 辺が座標軸に平行になるように直角三角形を配置していくことが予想されたため、座標を求めることはそれほど負担にならないであろうと考えた。なお、生徒の取り組みを観察して、ピタゴラス三角形を回転させるなど、座標を求めることが難しそうな操作を行っている場合には、適切なヒントを与え、生徒自身の発想を極力生かせるように努めることとした。

1.2.1 課題 1 の解説

図 5 から図 8 までは 4 点が格子点となる場合の座標の例は容易に求められるため、座標について記すことはここでは省略する。

図 5 は合同な 4 つのピタゴラス三角形を用いた構成である。この図では $3:4:5$ のピタゴラス三角形を用いており、この配置が「最大距離が最小」の配置でもある。図 6 では 2 種類 ($3:4:5$ と $5:12:13$) のピタゴラス三角形を用いており、この図の下側の部分を上側に折り返すことで図 7 が得られる。図 8 も $3:4:5$ のピタゴラス三角形と $5:12:13$ のピタゴラス三角形を用いているが、左と右で異なる組み合わせ方をしており、E は $\triangle ABD$ の垂心に一致する。

図 7 のタイプの配置の特殊な場合として、「三角形の 3 頂点と外心」からなる 4 点の集合を得ることもできる。図 9 は、合同な 2 つのピタゴラス三角形 ABC , ADC を組み合わせたものであ

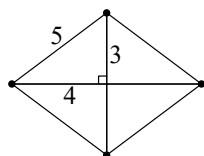


図 5

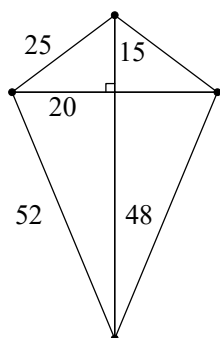


図 6

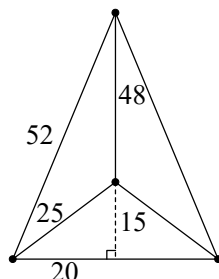


図 7

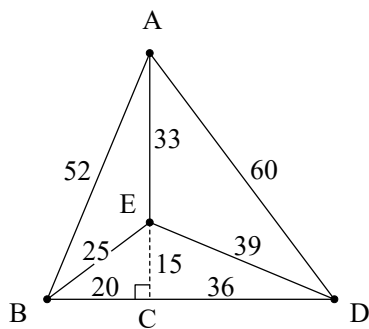


図 8

り, $\triangle ABD$ の外心を O , 半径を R とする. $\angle ABC = \beta$ とおくと, $\sin \beta = AB/AC \in \mathbb{Q}$ より $R = AD/2\sin \beta \in \mathbb{Q}$ である. また, 外心 O は整数係数の方程式で表される 2 直線の交点だから有理点である. そこで, $R = AO = BO = DO$ が整数, O が格子点となるように, 全体を適当な整数倍に拡大することにより, 所望の点集合の 1 つが得られる. 図 9 では 3 辺の長さが 3, 4, 5 であるピタゴラス三角形を用いており, 全体を 8 倍に拡大することで題意をみたす 4 点の集合 (例えば $\{O(0, 0), A(0, 25), B(-24, -7), D(24, -7)\}$) が得られる. $\triangle OBC, \triangle ODC$ もピタゴラス三角形となるため, 図 9 の配置は図 7 のタイプの特例な場合とみることができる.

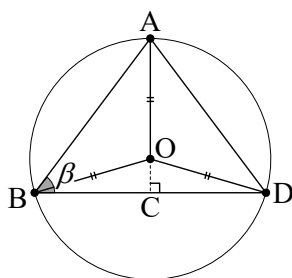


図 9

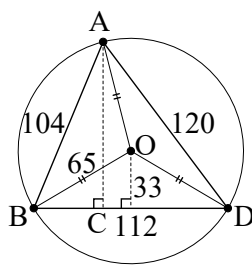


図 10

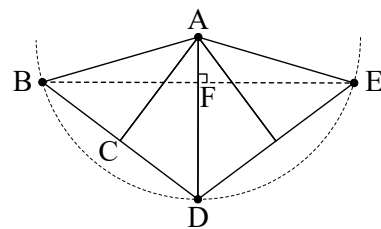


図 11

図 9 を導いたのと同様の考え方は, 相似でない 2 つのピタゴラス三角形に対しても適用できる. 図 10 に示される 4 点の集合 (C は含まれない) は, $5 : 12 : 13$ のピタゴラス三角形 ABC と $3 : 4 : 5$ のピタゴラス三角形 ACD から得られており, $C(0, 0), A(0, 96)$ とすると, $B(-40, 0), D(72, 0)$ であり, 外心 O は $(16, 33)$ である.

図 11 の構成法は, 第 1.1 節の (7) についての別証明 (第 1.2.4 節参照) をヒントにしているが, ここでは円の中心も点の 1 つとして用いている. 4 つの合同なピタゴラス三角形で構成された四角形 $ABDE$ の 4 頂点からなる集合を, 原点を中心に適当な倍率で拡大すればよい. $\triangle BDF$ が $\triangle ADC$ に相似であることなどから, これらの 4 点が, 有理数距離にある有理点として表現できることがわかり, そこから整数距離にある 4 個の格子点 (例えば $\{A(0, 0), B(-24, -7), D(0, -25), E(24, -7)\}$) が得られる.

1.2.2 課題 2 の解説

本問において「どの 2 点間の距離も整数」とした場合、問題は格段に難しくなる（条件をみたす 5 点が存在するか否かの結論も得られなかった）。しかし、「2 点間距離として現れる 10 個の値のうち、9 個だけが整数」の場合も許すことにすると、例えば図 12, 13 の配置が条件をみたす。これらの図に示される 5 点は、いずれも図 10 に示される 4 点に 1 点を加えたものであり、4 点の座標を $(0, 0)$, $(0, 96)$, $(-40, 0)$, $(72, 0)$, $(16, 33)$ とすると、もう 1 つの点は、図 12 では $(0, -96)$, 図 13 では $(0, 30)$ である。

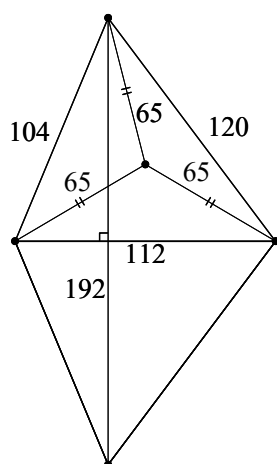


図 12

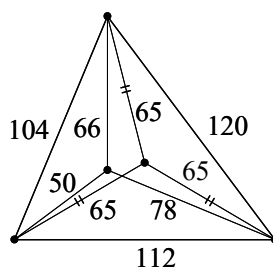


図 13

図 14 に示す点集合 (B は含まれない) は生徒が見つけた点集合 $\{O, O', A, A', A''\}$ を原点を中心に $1/8$ 倍したものである。生徒は GeoGebra を使って試行錯誤をしてこの配置を見つけた。

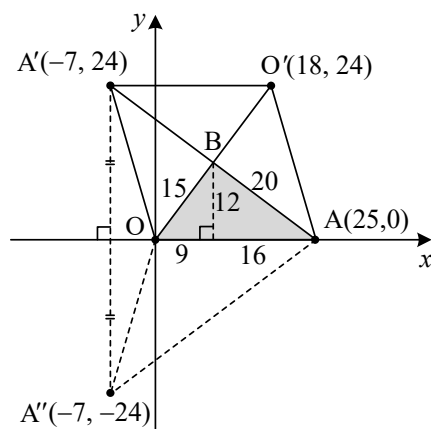


図 14

1.2.3 課題 3 の解説

AC が座標軸に平行でないとすると、AC を斜辺とするピタゴラス三角形が存在するので、 $AC = k(l^2 + m^2)$ (k, l, m は自然数) と書ける。ここで、AC の長さ 127 は素数だから $k = 1$ であり、したがって、 $127 = l^2 + m^2$ と書けることになる。しかし、このような自然数 l, m は存在しない。したがって、AC は座標軸に平行である。同様に BD も座標軸に平行である。しかし、AC と BD は平行でも垂直でもないので不合理である。

1.2.4 関連する話題

第 1.2.1 節で言及した第 1.1 節 (7) の「別証明」は、大学において学部生を対象とする幾何学の授業において扱った。「ピタゴラス三角形の 1 つの鋭角を α とし、 $P_k(\cos 2k\alpha, \sin 2k\alpha)$ とおくと、 P_k (k は非負整数) はすべて異なり、どの 2 点間の距離も有理数である」ことから証明できる (P_k がすべて有理点であることもわかる)。 P_k がすべて異なることを証明するために、

ピタゴラス三角形の鋭角 α に対して、 α/π が無理数である

ことを示すが、そのために

$0 < q < 1$ をみたす有理数 q で $\cos q\pi$ が有理数となるものは $q = 1/3, 1/2, 2/3$ だけである

ことを示す。その際、「 x についての方程式 $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ ($a_1, a_2, \dots, a_n$ は整数) が有理数の解をもつならば、その解は整数である」ことが使われる [29]。これらの一連の流れは数学への関心が高い高校生にはよい学習題材になると思われる。

2 一般の位置にある点を題材とする問題づくり

著者は 2023 年に、一般の高校生を対象に、離散幾何学についての講義を行った。生徒は、まずオンデマンドの動画を視聴し、それを参考に課題に取り組み、後日開催されたオンラインで配信される講義に参加した。課題は、一般の位置にある n 個の点の集合を題材とする問題を考え、可能であれば自分なりの結論を導いたり、予想を立てたりすることであった。

2.1 オンデマンドでの講義内容

オンデマンドの動画では、以下のテーマで講義をした。(2), (3) における **2 色点集合** とは、平面上の一般の位置にある点で、それぞれが赤または青の一方で着色されているような点の集合のことである。

- (1) 凸 n 角形・真空凸 n 角形の頂点の存在保証点数 (および n 点に含まれる凸 n 角形の頂点の組の個数) : 凸 n 角形の頂点の存在保証点数とは、次が成り立つ m の最小値のことである : 「平面上の一般の位置に m 個の点がどのように配置されていても、その中には凸 n 角形の頂点のなす n 個の点が存在する」 [18, 27, 34]。また、真空凸 n 角形とは、内部に他の点を含まない凸 n 角形のことである [20, 22, 25, 28]。

- (2) 2色点集合における単色真空凸 n 角形（頂点がすべて同色である真空凸 n 角形）の頂点の存在保証点数の存在性 [17].
- (3) 2色点集合の均等分割：（問題例）凸型の町に8校の小学校と4000人の小学生がいる．各小学校に500人ずつとなるように町を8個の凸型の学区に分けることはできるか？（注．できる [16]．一般化した結果については [15, 26, 30].）
- (4) 無交差単調道：平面上の一般の位置にあり，1から n までの自然数でラベルづけされた n 個の点を考える．番号は飛び飛びでよいので，できるだけ多くの点を交差が生じないように結びたい．どの程度多くの点を結べるか？ すなわち，次が成り立つ m の上界および下界を求めよ： n 個の点の配置やラベルのつけ方によらず， m 個以上の点を結べる [32, 33].

2.2 課題への取り組み

課題「一般の位置にある n 個の点からなる集合 P を題材に問題を考え，可能であれば自分なりの結論を導いたり，予想を立てたりする」に対して生徒から提出された問題には例えば，次のようなものがあつた．著者から生徒へのコメントの概略とともに記す（問題，コメントとも，本稿への掲載向けに表現を変えてある）．

- (1) P が3次元空間の点からなる集合（どの4点も同一平面上にないものとする）の場合について，凸 k 面体の頂点の存在保証点数はどうなるか．

【コメント】 2次元版の定理から上界が得られる．

- (2) P に属する最大距離の2点を直径とする円を C とする． C に含まれる P の点が最も少なくなるとき，その個数は何個か．

【コメント】 0である．つまり， C が内部に1点も含まないことがある．なお，直径の両端となる2点をうまく選べば， C の周上および内部の点は $\lceil n/3 \rceil + 1$ 個以上にでき，この結果は最良である [12].

- (3) P のすべての点を折れ線で結んで最初の点に戻るとき，最大何個の交差をつくることができるか．（2名の生徒から）

【コメント】 この問題に対しては，2013年にÁlvarez-Rebollar 他 [14] が下界 $n^2/12 - O(n)$ および上界 $5n^2/18 - O(n)$ を与えており（上界の証明は [13]），著者は，これとは異なる上界 $4\overline{\text{cr}}_P(K_n)/(n-1)(n-2)$ ([31]；ここで， $\overline{\text{cr}}_P(K_n)$ は P の点を頂点とし，直線分を辺とする完全グラフがもつ交差の個数を表す）などの発表準備を進めていた時期であつた．著者による結果は，「すべての閉路グラフにわたる交差の個数の総和」を2通りに計算することから導かれ，1つの閉路グラフに含まれる交差の個数の平均値として得られている．

- (4) P の何組かの2点对を直線分で結ぶ．交差が生じないようにどれだけ多くの線分を引くことができるか．

【コメント】 最終的に P の点の三角形分割が得られることになる． P の凸包（ P の点すべてを含む最小の凸集合）が k 角形なら，線分は $2n - k - 2$ 本である．なお，交差が起こらないように結ぶときの線分の長さの総和を題材とする問題も見られた．

- (5) 凸六角形の 6 頂点の組で、互いに素なものは何組取れるか。

【コメント】 簡単な下界としては $\lfloor (n-11)/6 \rfloor$ が挙げられる。この問題の他にも、「凸 k 角形の頂点となる k 点組の個数」に関する問題が複数見られた。

- (6) P の点を 3 色で任意に塗分けて得られる 3 色点集合に単色真空凸四角形は少なくとも何個存在するか。

【コメント】 3 色の場合は単色真空三角形すら存在しないような点集合を構成できる [17]。この他、2 色点集合に対する問題も見られた。

3 誤り訂正符号理論

3.1 相手のウソまで見破る数当てマジック

付属高校の生徒を対象とする出前授業では、誤り訂正符号（ハミング符号）の原理を応用したマジックを実演し、その解説を行い、最終的に参加者が同じマジックを実演できるようにした。マジックに先立ち、QR コード¹について簡単な説明をして、少しの汚れがあっても、元の正しいデータを復元できることを実験で確かめた。これにより、誤り訂正符号理論の有用性を認識させることができた。

続いてのマジックは、次の流れで実施する。

マジックの流れ

- (1) 最初に生徒の一人に 1 から 15 までの整数の中から 1 つを選んでもらう（声には出さない）。
- (2) 演者は「これから 7 枚のカードを見せます。その中にあなたが選んだカードがあるかないかを答えてください。1 回だけなら嘘をついてもかまいません。」と生徒に伝え、図 15 の 7 枚のカード（色のついた丸印は裏面に付けられている）を 1 枚ずつ見せていく。
- (3) 演者は生徒が「ある」と答えたカードと「ない」と答えたカードを分けて置いていく。
- (4) 生徒の回答結果から、演者は「生徒が嘘をついたか否か」、「嘘をついた場合にはどのカードに関して嘘をついたか」を見抜き、さらに生徒が選んだ数を当てる。

図 15 の A~D の 4 枚のカードは、相手が正直に答える場合の数当てマジックのカードとしてよく知られている（例えば、[4] に解説がある）。2 進法を利用してつくられており、生徒が選んだ数を当てるには、

「あります」と答えたカードの左上の数を加えればよい。 (1)

この仕組みについての解説はここでは省略する。

残りの E~G の 3 枚のカードは、「誤り訂正」ができるように付け加えられたカードである。1 から 15 までの各自然数について、その数が書かれたカードにつけられた赤、青、緑のマークがどれも偶数個（0 個でもよい）になるように、E, F, G のカードに数が書き入れられている。この作成方法により、相手が選んだ数は次のように当てることができる。

¹QR コードは (株) デンソーウェーブの登録商標です。

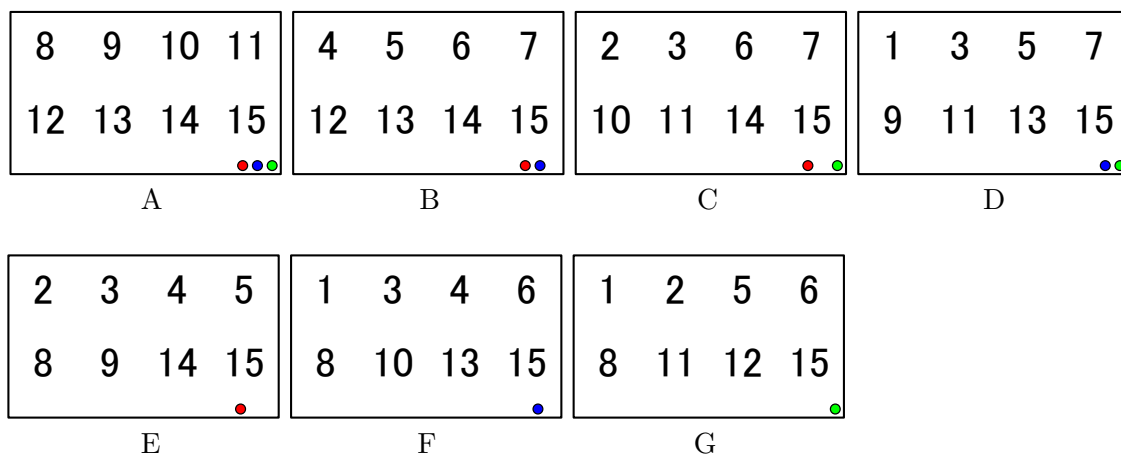


図 15. 実際は、色のついた丸印は裏面につけられている。

相手が選んだ数の当て方

- (1) 相手が、「あります」と答えたカードについて、赤、青、緑のマークの個数を調べる。

相手がすべてのカードに対して正直に答えていれば、赤、青、緑のマークの個数はすべて偶数になる。赤、青、緑のマークの個数のうち、いくつかが奇数である場合、例えば、青のマークは偶数個であるが、赤と緑のマークが奇数個ずつである場合には、赤と緑の両方のマークだけがつけられたカードに関して、相手がウソをついたことになる。

- (2) 相手が嘘をついたカードがある場合、そのカードを別の側に移動する。

そのカードが「ある」と答えたカードの側に入っている場合には、「ない」と答えたカードの側に移動し、「ない」と答えたカードの側に入っている場合には、「ある」と答えたカードの側に移動する。これにより、生徒が正直に答えた場合の振り分け方が得られたことになる。

- (3) 「ある」の側のカードのうち、マークが2個以上つけられているカードの左上の数を加える。

マークが2個以上つけられているカードは、「相手が正直に答える場合の数当てマジックのカード」である。したがって、(1)により、生徒が選んだ数がわかる。

このマジックでは、正直に答えればカードが4枚ですむところ、1回のウソを許したために、カードを3枚も追加したと考える生徒もいるかもしれない。しかし、 $m = 2^{2^n - (n+1)} - 1$ までの自然数に対する数当てマジックについて、正直に答える場合のカードの枚数 $\log_2(m+1) = 2^n - (n+1)$ に対して、誤り訂正に必要なカードの枚数は n に過ぎず、ほとんど $\log_2(\log_2 m)$ である ($\lim_{n \rightarrow \infty} n / \log_2(\log_2 m) \rightarrow 1$)。したがって、例えば10京(17桁)までの数当てマジックを作るのに必要なカードは63枚で、そのうち、誤り訂正用のカードは6枚だけである。

3.2 瞬間記憶

このマジックは水平垂直パリティ検査符号のしくみをそのままマジックにしたものである。この題材での授業を実施する機会はなかったが、簡単に解説を記しておく。なお、トランプのカードは模様の側を裏とする。

マジックの流れ

- (1) 生徒たちに 36 枚のトランプを、表裏を任意の向きで 6×6 に並べてもらう (図 16(a)).
- (2) 演者はアシスタントに「カードをもう少し増やしましょう」と伝え、13 枚追加して 7×7 にしてもらう (図 16(b)).
- (3) 演者はカードの配置を憶え (るふりをし) てから生徒の一人に「私が見ていない間に、1 枚だけカードの裏表の向きを変えてください」と伝え、生徒の一人がカードを反転させる (図 16(c)).
- (4) 演者はカードを見渡して、どのカードを反転させたかを当てる。

このマジックの種は、アシスタントによる 13 枚のカードの追加のしかたにある。アシスタントは各行、各列に 1 枚ずつ追加する際に、その行や列の裏向きのカードの枚数が偶数になるように追加していく (図 16(b)). 右下の位置に追加するカードは、右端の列に着目しても、下端の行に着目しても、どちらでも同じ向きになる。生徒がカードを 1 枚反転させた後、演者は裏向きのカードが奇数枚になっている行と列を見つける。それらの交差する位置にあるカードが、生徒が反転したカードである。

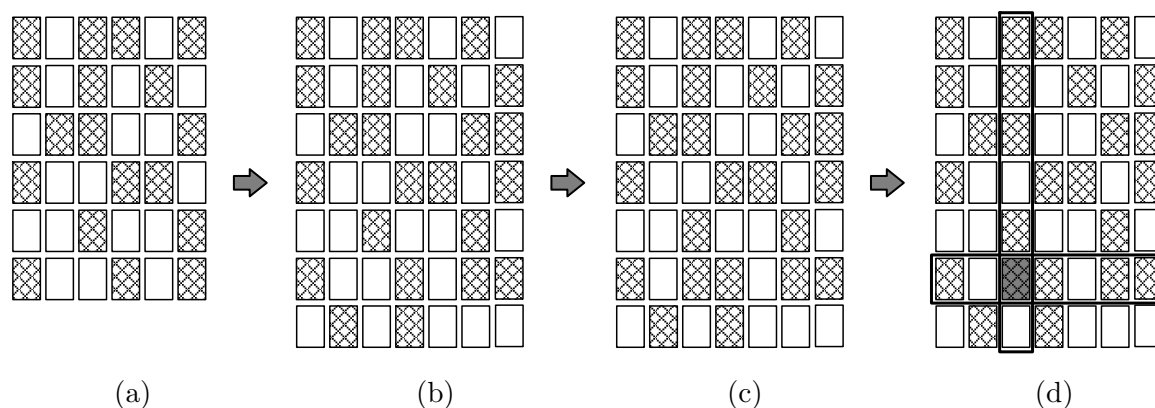


図 16

4 講義で扱った題材

この章では、大学の学部の学生や付属校の教員を対象とする授業で扱った題材のなかから、中学生や高校生の学習題材として使えるようなものを、効果的と思える範囲で紹介する。

4.1 アウトライン・フォント

たとえば、Microsoft の Word のフォントを設定するウィンドウを開くと、下の方に「TrueType フォントです」という表示がある。このことは、文字の境界が放物線 (2 次のベジェ曲線) を繋いで構成されていることを意味している。各放物線の形状を決定しているのは図 17 に示すような 3 点 A, B, C で、各放物線は 2 点 A, B を両端点とし、これらの点における接線は点 C で交わってい

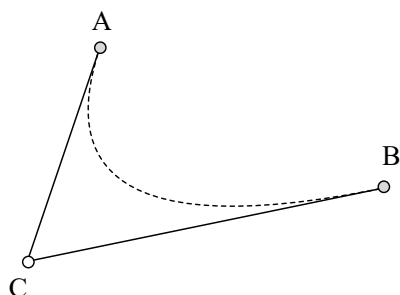


図 17

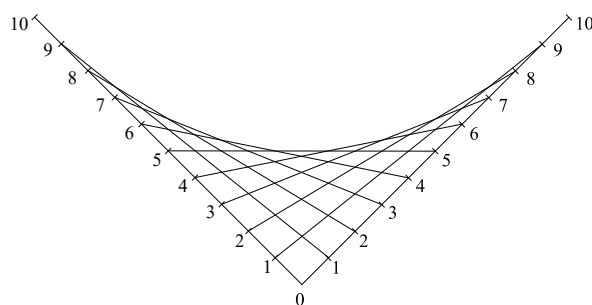


図 18

る. 3 点が与えられたとき, もとの放物線がどのようにして復元できるかは 1 つの学習題材となり得る.

図 18 は, 等間隔に目盛りの入った 2 つの線分に対して, 一方の目盛り i ($0 \leq i \leq 10$) の点ともう一方の目盛り $10-i$ の点を線分で結んだ図である. これらの線分の境界に “放物線” が浮かび上がって見える (目盛りの入った線分は異なる長さであってもよく, また, 直交していなくてもよい). この現象は, 「3 点から放物線を復元する」 ことと大きく関わっている.

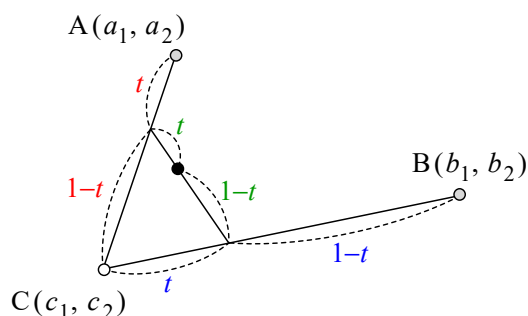


図 19. 同色の t と $1-t$ は同一線分上における比を表す.

図 19 のように 3 点 A, B, C の座標を定めると, 図 17 の放物線 (弧) は, 媒介変数 $t \in [0, 1]$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t)^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + 2t(1-t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

と表される. これを

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t) \left\{ (1-t) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\} + t \left\{ (1-t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\}$$

と表すと, (x, y) が図 19 に示される比で定まる点であることがわかる.

(2) において, 例えば

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(2t-1) \\ (2t-1)^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となり, 軌跡が放物線 $y = x^2/4$ ($-2 \leq x \leq 2$) であることがわかる. 図 18 において, 左上端, 右上端の点をそれぞれ $(-2, 1), (2, 1)$ として, 最下端の点を $(0, -1)$ とすると, 図 18 に示される各線分はこの放物線の接線になっている. このことは次のようにして確かめられる. まず, 線分 AC を $t : (1-t)$ に内分する点 $(2t-2, 1-2t)$ と線分 BC を $(1-t) : t$ に内分する点 $(2t, 2t-1)$ を結ぶ直線の方程式を求めると, $y = (2t-1)x - (2t-1)^2$ となる. これと放物線の方程式を連立して y を消去すると $\frac{x^2}{4} = (2t-1)x - (2t-1)^2$ となり, これより $\{x - 2(2t-1)\}^2 = 0$ が得られる. したがって, 放物線 $y = x^2/4$ と直線 $y = (2t-1)x - (2t-1)^2$ が (3) (図 19 の P にあたる点を表す) で与えられる点で接することがわかる.

図 19 においてとくに $t = 1/2$ のときを考えると,

$$\left. \begin{array}{l} \text{放物線上の 2 点 A, B における接線が点 C で交わるとき, 線分 AC, BC の} \\ \text{中点 D, E を結ぶ線分は, その中点 F で放物線に接する} \end{array} \right\} \quad (4)$$

ことがわかる (図 20). さらに, 線分 AD と FD も放物線の 2 つの接線であるから, それらの中点 H, I (図 21) を結ぶ線分の中点 J も接点であり, 同様にして, 線分 BE, FE の中点を結ぶ線分 KL の中点 M も接点である. 同様の操作を繰り返していくことで, もとの放物線上の点を次々に得ることができる [8].

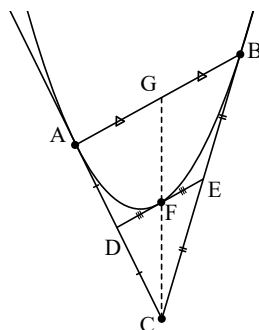


図 20

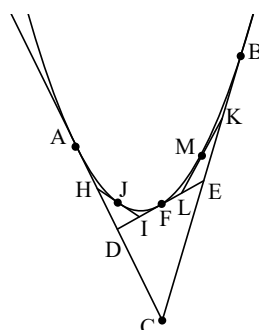


図 21

古代ギリシアのアルキメデスは取り尽くし法を用いて放物線と弦で囲まれる領域の面積を求めた [24] が, その際に, (4) と関連する事実が用いられている. 図 20 において, 線分 AB と直線 CF の交点 G は AB の中点であるが, アルキメデスは「弦 AB の中点を通り, 放物線の軸に平行な直線と放物線の交点」として放物線上の点 F を定めた. 彼は「F における放物線の接線が AB に平行である」という事実を命題 18 として導き, それを利用した. F を定めたときと同様にして, 「弦 AF の中点を通り, 放物線の軸に平行な直線と放物線の交点」および「弦 BF の中点を通り, 放物線の軸に平行な直線と放物線の交点」として放物線上の点 J, M (図 21) を定めることができ, 同様にして, 放物線上の点を次々に定めていくことができる. これらの点を取り尽くし法の三角形の頂点として用いられる.

4.2 CDMA（符号分割多元接続）

ベクトルを「数を並べた順序組」と定めて次元の制約を除けば、情報にまつわる多くの題材をベクトルと関連づけられる．その一例が携帯電話などに使われていた通信方式 CDMA（Code Division Multiple Access: 符号分割多元接続）である．CDMA は同一の周波数帯域内で 2 つ以上の複数の通信（多元接続）を行うために用いる技術の総称であり [35]，その原理は次のとおりである [5]：

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ は、互いに直交し、同じ大きさ l をもつ n 次元ベクトルとする．数値で与えられた n 個の情報 $a_1, a_2, \dots, a_m$ ($a_i = \pm 1$ でなくてもよい) があるとき、これらを n 個のベクトル $a_i \vec{v}_i$ ($1 \leq i \leq n$) に変換し、それらを加えることで 1 つのベクトル

$$\vec{u} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

にまとめる．このベクトル $\vec{u}$ と各 $\vec{v}_i$ との内積を考えると、

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v}_i &= a_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_i + a_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_i + \dots \\ &\quad + a_{i-1} \vec{v}_{i-1} \cdot \vec{v}_i + a_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + a_{i+1} \vec{v}_{i+1} \cdot \vec{v}_i + \dots + a_n \vec{v}_n \cdot \vec{v}_i \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + a_i |\vec{v}_i|^2 + 0 + \dots + 0 = a_i l^2 \end{aligned}$$

となり、 i によらない定数 l^2 で割ることで、 i 番目の情報 a_i を復元できる．

情報通信に即して具体例を挙げると以下ようになる．図 22 に示すように、同一の基地局 S を使う B_1, B_2, B_3, B_4 の 4 人が、それぞれ、 A_1, A_2, A_3, A_4 と通話するものとして、 $B_1 \sim B_4$ が S からの電波を受信する状況を考える（図 22）． A_i が B_i に送信した情報（数値）を a_i ($1 \leq i \leq 4$) と

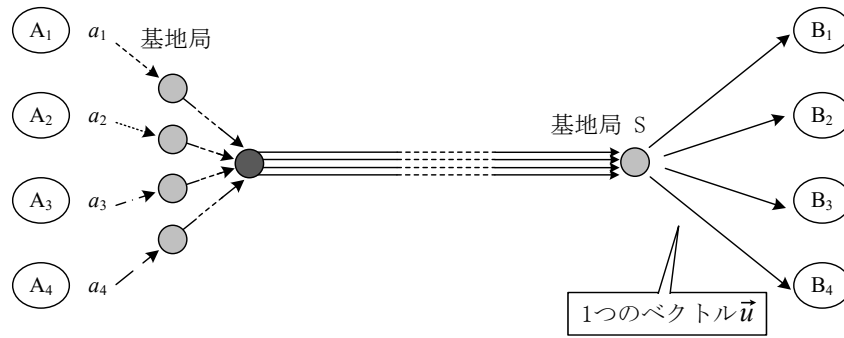


図 22

する．基地局 S は 4 つのベクトル

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, 1, -1, -1), \vec{v}_3 = (1, -1, -1, 1), \vec{v}_4 = (-1, 1, -1, 1) \quad (5)$$

を $B_1 \sim B_4$ の 4 人に割り当てる．これらは

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \quad (i \neq j), \quad |\vec{v}_i|^2 = 4 \quad (1 \leq i \leq 4)$$

をみたす．ここでは、 B_i に $\vec{v}_i$ が割り当てられたものとする ($1 \leq i \leq 4$)．基地局 S は、 $A_1 \sim A_4$ からの 4 つの情報 $a_1 \sim a_4$ を 1 つのベクトル

$$\vec{u} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 + a_4 \vec{v}_4$$

にまとめ、このベクトルを送信する． $\vec{u}$ を受信した各 B_i の端末は、自身に割り当てられたベクトル $\vec{v}_i$ と $\vec{u}$ の内積を計算して、その値を $|\vec{v}_i|^2 = 4$ で割った値を計算する．例えば B_2 であれば、

$$(\vec{u} \cdot \vec{v}_2) / 4 = (a_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 + a_4 \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_2) / 4 = (0 + 4a_2 + 0 + 0) / 4 = a_2$$

となり、 A_2 が送信した情報 a_2 を受け取ることができる．

なお、数学的な観点だけから述べれば、「互いに直交し、同じ大きさをもつベクトル」として $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$ としてもよい（この場合、 $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ となる）が、「干渉に強い」などの工学的な理由により (5) のようなベクトル（ウォルシュ・アダマール行列の行ベクトル）などが用いられる．

4.3 万能マス

6L の容積をもつ直方体の形をしたマス（容器）を使うと、図 23 (a), (b), (c) に示すように、6L, 3L, 1L を量ることができる．したがって、大きな容器 A からマスに 1 回だけ水を汲み出して、もう 1 つの容器 B に 1L, 3L, 6L の各量の水を入れることができる．

また、最初に A から 6L 汲んでおき、マスに 1L 残るまで B に水を注ぐことで、B に 5L の水を入れることもできる（このようにして B に水を注ぐ操作を $(a) \xrightarrow{B} (c)$ と表すこととする．A に水を戻す場合は $\xrightarrow{A}$ を用いる）．同様に考えると、 $(b) \xrightarrow{B} (c)$ で B に 2L の水を入れることができる．また、 $(a) \xrightarrow{B} (b)$ に続けて $(b) \xrightarrow{A} (c)$ の操作を行い、マスに残った 1L を B に注ぎ出すことで、B に 4L の水を入れることができる．

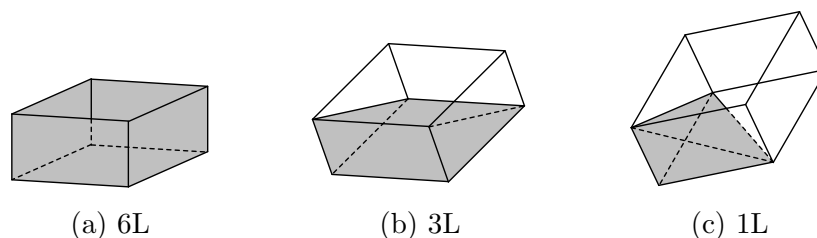


図 23

以上により、6L のマスを使うことで、容器 A から 1 回だけ水を汲み出して、容器 B に 1L から 6L までの 1L 刻みの量を入れられることが分かった．以下においても、

A からマスで水を汲み出すのは 1 回だけとするが、マスから B に水を注いだり、A に水を戻したりすることは何度行ってもよいこととする．

また、マスで水の量を量る際には、水面がマスの頂点のうちの 3 つ (以上) を含んでいる（つまり、水面の位置が数学的に正確に定まる）こととする．これらの条件のもとで、容器 B に 1L から nL (n は自然数) までの 1L 刻みの量を入れられるマスを nL 万能マス [1, 9, 10, 11] とよぶ．ここでは、マスの容積そのものも nL とする．

4.3.1 41L 万能マス

図 24 に示されるマス (3 つとも同じ) について, 底面積 $S = 3$, $h_1 = 12$, $h_2 = 13$, $h_3 = 16$ としたもの (または底面積を k 倍して各高さを $1/k$ 倍したもの) は容積 41 であるが, その単位を L とする. すると, このマスは 41L 万能マスである. このことを 2 つの段階を経て確認する.

1 回で量れる量

学生には次の問題に取り組ませた.

問題 1. 図 24 (a)~(c) にグレーで示される立体 E-ABC, B-ACFD, ABC-DEF (いずれも底面積は S) の体積を求めよ.

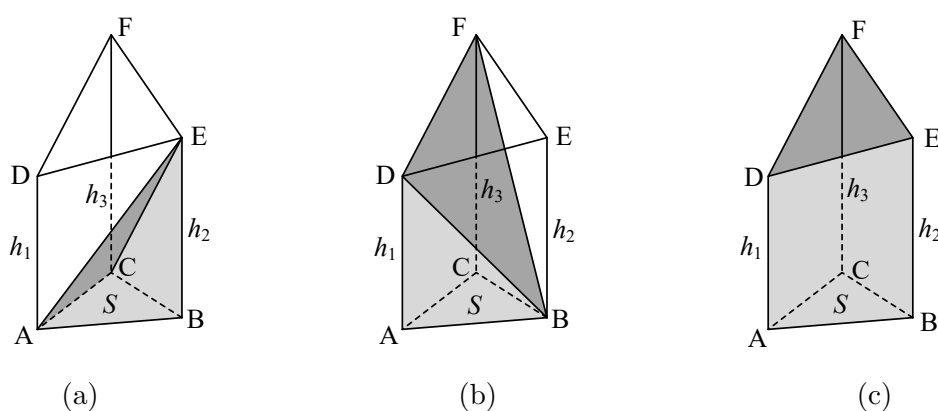


図 24

【解説】 立体 E-ABC は三角錐だから, $E-ABC = Sh_2/3$ である. 立体 B-ACFD は 2 つの三角錐 D-ABC (下側) と D-FBC (上側) に分けられて, 上側の三角錐 D-FBC を三角錐 A-FBC, すなわち F-ABC に等積変形 (図 25) することで,

$$B-ACFD = D-ABC + F-ABC = Sh_1/3 + Sh_3/3 = S(h_1 + h_3)/3$$

とわかる. 立体 ABC-DEF は立体 B-ACFD (図 24 (b)) と三角錐 D-BEF を合わせた立体である. 三角錐 D-BEF は三角錐 A-BEF, すなわち F-ABE に等積変形でき, これはさらに三角錐 C-ABE, すなわち E-ABC に等積変形できて, その体積は $Sh_2/3$ である. よって,

$$ABC-DEF = B-ACFD + E-ABC = S(h_1 + h_3)/3 + Sh_2/3 = S(h_1 + h_2 + h_3)/3$$

図 24 に示されるマスにおいて, $S = 3$, $h_1 = 12$, $h_2 = 13$, $h_3 = 16$ としたものをマス M とよぶこととする. マス M で直接量れる水の量を非減少順に書くと, 問題 1 より, 12, 13, 16, 25, 28, 29, 41(L) とわかる. 以下では, この並びの先頭に 0 を追加して得られる数列

$$\{a_n\} : 0, 12, 13, 16, 25, 28, 29, 41 \quad (6)$$

を考える.

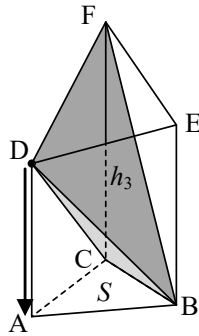


図 25

階差の和

例えば，マス M に容器 A から水を 29L 汲み出して，M に 25L 残るまで B に水を注ぎ（この時点で B には 4L 入る），さらに，M に 16L 残るまで容器 A に水を戻した後，残った 16L の水を B に注げば，B には合計で 20L の水が入れられる。B に入る水の量 20(L) は， $(29 - 25) + 16$ によって求められるが，これは「(6) で隣り合う項の差（階差）」を用いて，

$$\{(29 - 28) + (28 - 25)\} + \{(16 - 13) + (13 - 12) + (12 - 0)\}$$

と表される．すなわち，20 は数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の何項かの和として表される．一般に，次が成り立つ：

M を使って B に入れられる水の量 (L) は，階差数列 $\{b_n\}$ の何項かの和として表される．

M が 41L 万能マスであることを示すためには，

$$1 \text{ から } 41 \text{ までのどの整数も } \{b_n\} \text{ の何項かの和として表される} \quad (7)$$

ことを示せばよい．このことを示すために，次の問題に取り組ませた（ここでは証明は省略する）．

問題 2. $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$ をみたす自然数 c_i ($1 \leq i \leq n$) について，次が成り立つことを証明せよ．

1 から $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ までのどの自然数も異なる何個か（1 個でもよい）の c_i の和として表される条件は

- (1) $c_1 = 1$ かつ
- (2) $c_k \leq c_1 + c_2 + \cdots + c_{k-1} + 1$ ($2 \leq k \leq n$)

が成り立つことである．

マス M に関する数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は，12, 1, 3, 9, 3, 1, 12 であり，これらの項を非減少順に並べた数列を $\{c_n\}$ とすると，

$$c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 3, c_4 = 3, c_5 = 9, c_6 = 12, c_7 = 12$$

である．これが問題 2 の (1), (2) (ただし $n = 7$) をともにみたすことは容易に確かめられる．

4.3.2 127L 万能マス

41L 万能マスは底面の形が三角形で側面が底面に垂直であるが，その容積 41L はこのような形状の万能マスの中で最大の容積であることが示される [10]．底面は三角形のままとして，側面が底面に垂直でなくてよいものとするれば，底面が三角形の 127L 万能マス（図 26 に示すような三角形 ABC を底面とする形状であるが，正確にはもっと細長い）が存在し，これは底面が三角形の万能マスで最大の容積をもつ [11]．量り出せる水の量を計算する際には，

$$O-AEC = O-ABC \times OE/OB, \quad O-AEF = O-ABC \times OE/OB \times OF/OC,$$

$$O-DEF = O-ABC \times OD/OA \times OE/OB \times OF/OC$$

などの計算を用いる．

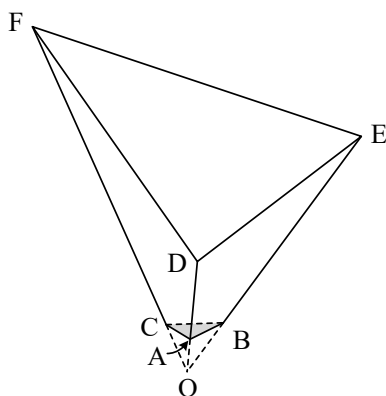


図 26

なお，底面が長方形の万能マスについては，858L 万能マス [9] が現在知られている最大の容積のものである．

謝辞

東邦大学理学部名誉教授の佐藤洋一先生には，情報通信に関する多くのご教示をいただきました。また，本研究は JSPS 科研費 JP22K02530 の助成を受けたものです。皆様のご支援に心より感謝いたします。

参考文献

- [1] 秋山仁：『知性の織りなす数学美：定理づくりの実況中継』中央公論新社，2004.
- [2] 秋山仁，R.L. Graham：『離散数学入門』，朝倉書店，1993.
- [3] 上山清二：Web で学ぶ 情報処理概論. <http://www.infonet.co.jp/ueyama/ip/>
- [4] 小林みどり：『文科系の応用数学入門』牧野書店，1996.

- [5] 佐藤洋一：情報通信のメモ. <http://www.yobology.info/>
- [6] G.A. ジョーンズ・J.M. ジョーンズ著，一樂重雄・河原正治・河原雅子訳：『情報理論と符号理論』シュプリンガー・ジャパン，2006.
- [7] ピーター・フランク，前原潤：『やさしい幾何学問題ゼミナール』，共立出版，1992.
- [8] 武蔵システム：フォント入門. <https://opentype.jp/fontguide.htm>
- [9] J. Akiyama, H. Fukuda, G. Nakamura: Universal measuring devices with rectangular base, in: Discrete and Computational Geometry. JCDCG 2002, J. Akiyama, M. Kano, eds., Lecture Notes in Computer Science, **2866** (2003) 1–8. doi: 10.1007/978-3-540-44400-8_1
- [10] J. Akiyama, H. Fukuda, G. Nakamura, T. Sakai, J. Urrutia, C. Zamora-Cura: Universal measuring devices without gradations, in: Discrete and Computational Geometry. JCDCG 2000, J. Akiyama, M. Kano, M. Urabe, eds., Lecture Notes in Computer Science **2098** (2001) 31–40. doi: 10.1007/3-540-47738-1_2
- [11] J. Akiyama, H. Fukuda, C. Nara, T. Sakai, J. Urrutia: Universal measuring boxes with triangular bases, Am. Math. Mon. **115** (2008) 195–201.
- [12] J. Akiyama, Y. Ishigami, M. Urabe, J. Urrutia: On circles containing the maximum number of points, Discrete Math. **51** (1996) 15–18. doi: 10.1016/0012-365X(94)00076-U
- [13] J.L. Álvarez-Rebollar, J. Cravioto-Lagos, N. Marín, O. Solé-Pi, J. Urrutia: Crossing and intersecting families of geometric graphs on point sets, *Graphs Comb.* **40** (2024) 17. doi: 10.1007/s00373-023-02734-9
- [14] J.L. Álvarez-Rebollar, J. Cravioto-Lagos, J. Urrutia: Crossing families and self crossing hamiltonian cycles, XVI Encuentros de Geometra Computacional (2015) 13-16. <https://dccg.upc.edu/egc15/en/wp-content/uploads/2013/10/AbstractsXVIEGC.pdf>
- [15] S. Bspamyatnikh, D. Kirkpatrick, J. Snoeyink: Generalizing ham sandwich cuts to equitable subdivisions, Discrete Comput. Geom. **24** (2000) 605622.
- [16] S.S. Cairns: Networks, ham sandwiches, and putty, Pi Mu Epsilon Journal **3** (1963) 389-403. JSTOR 24338222
- [17] O. Devillers, F. Hurtado, G. Krolyi, C. Seara: Chromatic variants of the ErdősSzekeres theorem on points in convex position, Comput. Geom. Theory Appl. **26** (2003) 193-208. doi: 10.1016/S0925-7721(03)00013-0
- [18] P. Erdős, G. Szekeres: A combinatorial problem in geometry, Compos. Math. **2** (1935) 463–470.
- [19] P. Frankl, 前原潤：『幾何学の散歩道：離散・組合せ幾何入門』共立出版，1991.
- [20] T. Gerken: Empty convex hexagons in planar point sets, Discrete Comput. Geom. **39** (2008) 239–272. doi:10.1007/s00454-007-9018-x
- [21] R. L. Graham, B. L. Rothschild, E. G. Straus: Are there $n + 2$ points in E^n with odd integral distances?, Amer. Math. Monthly **81** (1974) 21–25.
- [22] H. Harborth: Konvexe Fnfcke in ebenen Punktmengen, Elem. Math. **33** (1978) 116–118.
- [23] H. Harborth: Integral distances in point sets, Charlemagne and His Heritage. 1200 Years of Civilization and Science in Europe **2** (1998) 213–224, Brepols, Turnhout.

- [24] L. Heath: The Works of Archimedes, Cambridge University Press, 1897.
- [25] J.D. Horton: Sets with no empty convex 7-gons, Can. Math. Bull. **26** (1983) 482–484. doi:10.4153/CMB-1983-077-8
- [26] H. Ito, H. Uehara, M. Yokoyama: 2-dimensional ham-sandwich theorem for partitioning into three convex pieces, Discrete and computational geometry (LNCS **1763**) (2000) 129–157.
- [27] J.D. Kalbfleisch, J.G. Kalbfleisch, R.G. Stanton: A combinatorial problem on convex regions, Proc. Louisiana Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium, **1** (1970) 180–188, Baton Rouge, La.: Louisiana State Univ.
- [28] C. Nicolas: The empty hexagon theorem. Discrete Comput. Geom. **38** (2007) 389–397. doi:10.1007/s00454-007-1343-6
- [29] I. Niven, Numbers: Rational and Irrational, Mathematical Association of America, 1961.
- [30] T. Sakai: Balanced convex partitions of measures in $\mathbb{R}^2$, Graphs Combin. **18** (2002) 169–192.
- [31] T. Sakai, Number of crossings in Hamiltonian cycles on given n points, 投稿中.
- [32] T. Sakai, J. Urrutia: Monotonic polygons and paths in weighted point sets, Computational Geometry, Graphs and Applications (LNCS **7033**) (2011) 164–175.
- [33] T. Sakai, J. Urrutia: Non-crossing monotonic paths in labeled point sets on the plane, Book of Abstracts :The 31st European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2015) (2015) 141–144.
- [34] G. Szekeres, L. Peters: Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem, ANZIAM J. **48** (2006) 151–164. doi:10.1017/S144618110000300X
- [35] 符号分割多元接続, 日本語版ウィキペディア <https://ja.wikipedia.org/wiki/符号分割多元接続> 2023 年 11 月 10 日 21:16 版

数学教育学会 学会課題 Study Group における学校数学全体像研究の系譜

数学教育学会では、学校数学の全体像について、学会課題 SG を設立して研究してきた。

2005～2006 21 世紀中葉における学校数学全体像の構築に向けて

代表 町田彰一郎
研究報告集 全 118 頁

2013～2014 戦後数学教育の評価と将来に向けての対応についての研究

代表 守屋誠司
報告書 189 頁

2015～2016 日本人の成長過程と現代数学とに適応した数学の教育課程の試み

代表 河合博一
研究報告集 全 160 頁

2015～2016 知識社会を自立協働して支える人材育成に求められる学校数学とは

代表 町田彰一郎
研究報告集 全 88 頁

2017～2018 2030 年代を俯瞰した数学教育を考える

代表 砂田利一

2019～2020 2030 年代を俯瞰した我が国の一般数学教育の在りうべき内容を世に問う

代表 砂田利一

2021～2022 Society5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の試み

代表 白石和夫
<https://mes-j.or.jp/activity/sg/>

2023～2024 Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の実施
とその評価とまとめ

代表 白石和夫
<https://mes-j.or.jp/activity/sg/> (予定)

後書き 残された課題

今季 SG は、

- (1) 高度化する数学需要への対応
- (2) 学ぶ意義のわかるカリキュラム
- (3) 教員養成・研修のための数学周辺教材作成

の3点を目指し活動してきた。(1)、(2)については、少し先を見る視点で学習系統案を一つ作成した。今後、様々な試案が作成され、比較・検討されることが望まれる。(3)数学周辺教材作成については不十分なままで終わってしまった。数学教育で学べる数学と世の中で使われる数学とのギャップが拡大している今日、それを少しでも埋めていくためになすべきことは多い。そこに本学会が果たすべき責務が大きいことを記して本報告書を閉じる。(白石和夫)

数学教育学会 2023～2024 年度 課題 Study Group

「Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の実施とその評価」

代表 白石 和夫 (文教大学名誉教授)

世話人 河合 博一 (KMI)

構成員 守屋 誠司 (京都教育大学名誉教授)

町田彰一郎 (埼玉大学名誉教授)

船倉 武夫 (千葉科学大学名誉教授)

酒井 利訓 (東海大学)

高山 琢磨 (大和大学)

丹 洋一 (宮城学院女子大学)

佐藤 一 (明治大学)

寛 捷彦 (早稲田大学名誉教授)

本報告書は、令和4年度～令和6年度科学研究費 基盤研究(C) (一般) (課題番号 22K02530 研究代表者 守屋誠司) による研究を含む。

数学教育学会 2023～2024 年度 課題 Study Group

「Society 5.0 に対応できる文理融合の学校数学の構築と教員養成・研修の実施とその評価」
報告書

編 集 課題 SG 代表 白石和夫

発行日 2025 年 2 月 28 日 (2025 年 6 月 16 日 追補)

発行所 一般社団法人 数学教育学会

住 所 〒112-0012 東京都文京区大塚 1-4-15 アトラスタワー茗荷谷 105 (株)甲文堂内